This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

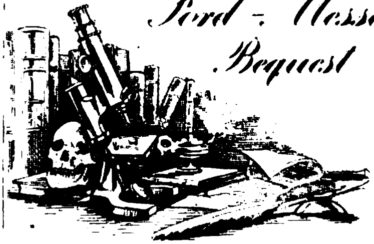
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest



AS
182
.S14

BERICHTE

83686

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

SIEBENUNDVIERZIGSTER BAND.

1895.

MIT EINER TAFEL UND 8 FIGUREN.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.

INHALT.

Seite

F. Stohmann, Calorimetrische Untersuchungen. Vierunddreissigste Abhandlung . . . .

W. Ostwald, Ueber das Prinzip des ausgezeichneten Falles . . . 37

H. Ambronn und H. Held, Ueber Entwicklung und Bedeutung des Nervenmarks. (Mit 1 Tafel.) 38

Pfeffer, Ueber ein Zimmer mit constanten Temperaturen 52

Sophus Lie, Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung 53

A. Mayer, Die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode und das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variabeln 129

W. Ostwald, Ueber physiko-chemische Messmethoden 145

M. von Frey, Beiträge zur Sinnesphysiologie der Haut. Dritte Mittheilung 166

C. Neumann, Ueber einen Ersatz des Dirichlet'schen Princips für gewisse Fälle 185

G. Scheffers, Eine Abbildung der Geraden des Raumes in der Ebene 201

Sophus Lie, Bestimmung aller Flächen, die eine continuirliche Schaar von projectiven Transformationen gestatten 209

Sophus Lie, Verwerthung des Gruppenbegriffes für Differentialgleichungen. I. 261

H. Bruns, Zusatz zu der Abhandlung »Das Eikonal« im XXI. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe 323

W. Pfeffer, Ueber elektiven Stoffwechsel 324

P. Drude, Eine bequeme Methode zur Demonstration des elektrischen Brechungsexponenten von Flüssigkeiten. (Mit 5 Figuren.) 329

J. Thomae, Ueber den Zusammenhang zwischen den Steiner'schen und den Poncelet'schen Polygonen 352

F. Stohmann, Calorimetrische Untersuchungen. Fünfunddreissigste Abhandlung 375

Sophus Lie, Ueber seine aus dem Jahre 1874 herrührende Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen 400

Seite
F. Hausdorff, Ueber die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre 401
O. Staude-Rostock, Die Focaleigenschaften der Paraboloide. (Mit 2 Figuren) 483
Johannes Wislicenus, Ueber die Umlagerung stereoisomer ungesättigter Verbindungen durch Halogene im Sonnenlichte . . 489
Sophus Lie, Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie . . 494
Albert Dahms, Bestimmung der magnetischen Declination für die magnetische Warte des physikalischen Instituts der Universität Leipzig im Jahre 1895. (Mit 1 Figur.) Vorgelegt und am 12. November eingereicht von Herrn G. Wiedemann. 509
J. Thomae, Wann hat eine durch neun Punkte gegebene Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt? 515
E. Study, Mathematische Mittheilungen 532
Fritz Cohn, Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte 558
W. His, Rede zum Gedächtniss an Carl Ludwig 627

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1896.
Geheimer Hofrath *Ernst Windisch* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe bis Ende des Jahres 1896.
Hugo Berger in Leipzig.
Professor *Adolf Birch-Hirschfeld* in Leipzig.
Geheimer Rath *Otto Böhtlingk* in Leipzig.
Professor *Friedrich Carl Brugmann* in Leipzig.
—— *Karl Bücher* in Leipzig.
—— *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
—— *Heinrich Gelzer* in Jena.
—— *Georg Götz* in Jena.
—— *Albert Hauck* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.
Oberschulrath *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.
Geheimer Hofrath *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
Professor *Carl Lamprecht* in Leipzig.
—— *August Leskien* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Hermann Lipsius* in Leipzig.

Professor *Richard Meister* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *August von Miaskowski* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pertsch* in Gotha.
Professor *Friedrich Ratzel* in Leipzig.
—— *Wilhelm Roscher* in Wurzen.
—— *Sophus Ruge* in Dresden.
—— *August Schmarsow* in Leipzig.
—— *Theodor Schreiber* in Leipzig.
—— *Eduard Georg Sievers* in Leipzig.
—— *Albert Socin* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Curt Wachsmuth* in Leipzig.
Professor *Richard Paul Wülker* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Geheimer Hofrath *Lujo Brentano* in München.
Professor *Friedrich Delitzsch* in Breslau.
—— *Georg Ebers* in München.
—— *Friedrich Kluge* in Freiburg i. B.
—— *Theodor Mommsen* in Berlin.
Geheimer Rath *Erwin Rohde* in Heidelberg.
Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Johannes Wislicenus* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1897.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe bis Ende des Jahres 1897.
Geheimer Medicinalrath *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Professor *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Geheimer Bergrath *Hermann Credner* in Leipzig.

Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Paul Flechsig* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Hans Bruno Geinitz* in Dresden.
Geheimer Rath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig.
Geheimer Medicinalrath *Wilhelm His* in Leipzig.
Professor *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Rath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
Professor *Sophus Lie* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Müller* in Jena.
—— —— *Carl Neumann* in Leipzig.
Professor *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
Professor *Karl Rohn* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Geheimer Rath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
Geheimer Hofrath *Rudolf Wilhelm Schmitt* in Dresden.
Professor *Friedrich Stohmann* in Leipzig.
Hofrath *Johannes Thomae* in Jena.
Geheimer Hofrath *August Töpler* in Dresden.
—— —— *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
Geheimer Bergrath *Clemens Winkler* in Freiberg.
Geheimer Hofrath *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
Geheimer Rath *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.
Geheimer Bergrath *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

Ausserordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Professor *Richard Altmann* in Leipzig.
—— *Hermann Ambronn* in Leipzig.
—— *Paul Drude* in Leipzig.
—— *Friedrich Engel* in Leipzig.
—— *Alfred Fischer* in Leipzig.
Otto Fischer in Leipzig.
Professor *Max von Frey* in Leipzig.
—— *Emil Schmidt* in Leipzig.

Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
Professor *Felix Klein* in Göttingen.
Geheimer Regierungsrath *Adalbert Krüger* in Kiel.
—— —— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.

Archivar:

Ernst Robert Abendroth in Leipzig.

Verstorbene Mitglieder.

Ehrenmitglieder.

Falkenstein, Johann Paul von, 1882.
Gerber, Carl Friedrich von, 1891.
Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von, 1865.

Philologisch-historische Classe.

Albrecht, Eduard, 1876.
Ammon, Christoph Friedrich von, 1850.
Becker, Wilhelm Adolf, 1846.
Brockhaus, Hermann, 1877.
Bursian, Conrad, 1883.
Curtius, Georg, 1885.
Droysen, Johann Gustav, 1884.
Ebert, Adolf, 1890.
Fleischer, Heinrich Leberecht, 1888.
Flügel, Gustav, 1870.
Franke, Friedrich, 1871.
Gabelentz, Hans Conon von der, 1874.
Gabelentz, Hans Georg Conon von der, 1893.
Gersdorf, Ernst Gotthelf, 1874.
Göttling, Carl, 1869.
Gutschmid, Hermann Alfred von, 1887.
Hänel, Gustav, 1878.
Hand, Ferdinand, 1851.
Hartenstein, Gustav, 1890.
Hasse, Friedrich Christian August, 1848.
Haupt, Moritz, 1874.
Hermann, Gottfried, 1848.
Jacobs, Friedrich, 1847.
Jahn, Otto, 1869.
Janitschek, Hubert, 1893.
Köhler, Reinhold, 1892.
Lange, Ludwig, 1885.
Marquardt, Carl Joachim, 1882.
Maurenbrecher, Wilhelm, 1892.
Michelsen, Andreas Ludwig Jacob, 1881.
Nipperdey, Carl, 1875.

Noorden, *Carl von*, 1883.
Overbeck, *Johannes Adolf*, 1895.
Peschel, *Oscar Ferdinand*, 1875.
Preller, *Ludwig*, 1861.
Ritschl, *Friedrich Wilhelm*, 1876.
Roscher, *Wilhelm*, 1894.
Sauppe, *Hermann*, 1893.
Schleicher, *August*, 1868.
Seidler, *August*, 1851.
Seyffarth, *Gustav*, 1885.
Springer, *Anton*, 1891.
Stark, *Carl Bernhard*, 1879.
Stobbe, *Johann Ernst Otto*, 1887.
Tuch, *Friedrich*, 1867.
Ukert, *Friedrich August*, 1851.
Voigt, *Georg*, 1891.
Wachsmuth, *Wilhelm*, 1866.
Wächter, *Carl Georg von*, 1880.
Westermann, *Anton*, 1869.
Zarncke, *Friedrich*, 1891.

Mathematisch-physische Classe.

d'Arrest, *Heinrich*, 1875.
Baltzer, *Heinrich Richard*, 1887.
Bezold, *Ludwig Albert Wilhelm von*, 1868.
Braune, *Christian Wilhelm*, 1892.
Bruhns, *Carl*, 1881.
Carus, *Carl Gustav*, 1869.
Cohnheim, *Julius*, 1884.
Döbereiner, *Johann Wolfgang*, 1849.
Erdmann, *Otto Linné*, 1869.
Fechner, *Gustav Theodor*, 1887.
Funke, *Otto*, 1879.
Hansen, *Peter Andreas*, 1874.
Harnack, *Axel*, 1888.
Hofmeister, *Wilhelm*, 1877.
Huschke, *Emil*, 1858.
Knop, *Johann August Ludwig Wilhelm*, 1891.
Kolbe, *Hermann*, 1884.
Kunze, *Gustav*, 1851.
Lehmann, *Carl Gotthelf*, 1863.
Lindenau, *Bernhard August von*, 1854.
Ludwig, *Carl*, 1895.
Marchand, *Richard Felix*, 1850.
Mettenius, *Georg*, 1866.
Möbius, *August Ferdinand*, 1868.
Naumann, *Carl Friedrich*, 1873.
Pöppig, *Eduard*, 1868.
Reich, *Ferdinand*, 1882.
Scheerer, *Theodor*, 1875.
Schenk, *August*, 1891.
Schleiden, *Matthias Jacob*, 1881.
Schwägrichen, *Christian Friedrich*, 1853.
Seebeck, *Ludwig Friedrich Wilhelm August*, 1849.
Stein, *Samuel Friedrich Nathanael von*, 1885.
Volkmann, *Alfred Wilhelm*, 1877.
Weber, *Eduard Friedrich*, 1871.
Weber, *Ernst Heinrich*, 1878.
Weber, *Wilhelm*, 1891.
Zöllner, *Johann Carl Friedrich*, 1882.

Leipzig, am 31. December 1895.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1894 eingegangenen Schriften.

---

1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1894. Berlin d. J.

Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1894, No. 39—53. 1895, No. 1—38.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 21. Berlin 1894.

Winter, Franz, Eine attische Lekythos des Berliner Museums. Fünfundfünfzigstes Programm zum Winkelmannsfeste der Archäolog. Gesellschaft. Berlin 1895.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 27, No. 19. 20. Jahrg. 28, No. 1—18. Berlin 1894. 95.

Die Fortschritte der Physik im J. 1888. 1889. 1893. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 44, 45, 49. Abth. 1—3. Braunschweig 1894. 95.

Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin i. J. 1893. 1894. 1895, No. 1. 2. (Jahrg. 12—14). Berlin d. J.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 8 (Jahrg. 1894), No. 20—26. Bd. 9 (Jahrg. 1895), No. 1—18. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 20 (1894/95), No. 1—15. Berlin d. J.

Abhandlungen der Kgl. Preuss. geolog. Landesanstalt. N. F. H. 16 (mit Atlas). H. 17 (mit Atlas). Berlin 1895.

Jahrbuch der Kgl. Preuss. geolog. Landesanstalt u. Bergakademie zu Berlin f. d. J. 1893. Bd. 14. Berlin 1894.

Wissenschaftliche Abhandlungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Bd. 2. Berlin 1895.

Die Thätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt i. d. Z. vom 1. März 1894 bis 1. April 1895. S-A. Berlin 1895.

Slaby, *A.*, Das Gesetz von der Erhaltung der Energie und seine Bedeutung für die Technik. Festrede in d. Aula der Kgl. Technischen Hochschule. Berlin 1895.

Pernet, *J.*, *Jäger*, *W.*, u. *Gumlich*, *E.*, Herstellung und Untersuchung der Quecksilber-Normalthermometer. S.-A. Berlin 1895.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 96—98. Bonn 1895.

Zweiundsiebzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1894. Breslau 1895.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Institutes. Jahrg. 12 (1894). I. — Das Klima des Königreichs Sachsen. H. 3. Chemnitz 1895.

Vorläufige Mittheilungen der Beobachtungs-Ergebnisse von zwölf Stationen II. Ordnung in Sachsen. Nov. 1894—Oct. 1895.

Schreiber, *Paul*, Charakter der einzelnen Dekaden, Monate u. des Jahres 1894 in Sachsen nach den Beobachtungen an 12 Stationen. Wetterbericht vom Nov. 1894—März 1895 (in: Wissenschaftl. Beilage der Leipz. Zeitung 1894. 95).

Codex diplomaticus Saxoniae Regiae. Im Auftrage der K. Sächs. Staatsregierung herausgeg. v. *O. Posse* und *E. Ermisch*. 2. Haupttheil Bd. 10. Urkundenbuch der Stadt Leipzig. Bd. 3. Hrsg. v. *Josef Förstemann*. Bd. 15. Urkundenbuch der Stadt Grimma und des Klosters Nimbschen. Hrsg. v. *Ludw. Schmidt*. Leipzig 1894. 95.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. *V. Böhmert*. Jahrg. 39. Suppl. Jahrg. 40 (1894), No. 1—4. Jahrg. 41 (1895), No. 1. 2. Dresden 1894. 95.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1894, Jul.—Dec. 1895, Jan.—Jun. Dresden d. J.

Verzeichniss der Vorlesungen und Übungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1895. Für d. Wintersem. 1895/96. — Bericht über die Kgl. Sächs. Techn. Hochschule für 1894/95. — Die Bibliothek der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule i. J. 1894. Dresden 1895.

Observations astronomiques faites par B. d'Engelhardt. Part. 3. Dresde 1895.

Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichtsvereins. Bd. 9. Düsseldorf 1895. — *Jost*, *W.*, Die Schnitzwerke am Marstall des Jägerhofes zu Düsseldorf. Düsseldorf 1895.

Mittheilungen des Vereins für die Geschichte und Alterthumskunde von Erfurt. H. 16. — *Oergel*, *G.*, Das Collegium majus zu Erfurt. Erfurt 1894.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. H. 26 (1894). Erlangen d. J.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a./M. f. das Rechnungsjahr 1893/94. Frankfurt 1895.

Helios. Abhandlungen u. monatliche Mittheilungen aus d. Gesammtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissensch. Vereins des Reg.-Bezirks Frankfurt. Herausgeg. von *Ernst Huth*. Jahrg. 12, No. 7—12. Jahrg. 13, No. 1—6. Berlin 1895.

Societatum litterae. Verzeichniss der in d. Publikationen der Akademien und Vereine aller Länder erscheinenden Einzelarbeiten auf d. Gebiete d. Naturwissenschaften. Im Auftrage des Naturwissenschaftl.

Vereins für den Reg.-Bezirk Frankfurt herausgeg. von *M. Klittke.* Jahrg. 8 (1894), No. 10—12. Jahrg. 9 (1895), No. 1—9.

Jahrbuch für d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1895. Freiberg d. J.

30. Bericht der oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1895.

Verzeichniss d. Vorlesungen auf der Grossherz. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Giessen. Sommer 1895, Winter 1895/96; Personalbestand S. 1895. — *Behrens, D.*, Friedrich Diez. (Festrede). — *Walther, Heinr.*, Beiträge zur Kenntniss des trichterförmig engen Beckens. (Habilitationsschrift). — 59 Dissertationen a. d. J. 1894/95.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von *R. Jecht.* Bd. 70, H. 2. Bd. 71, H. 1. 2. Görlitz 1894. 95.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Cl. 1894, No. 4. 1895, No. 1—3. Philol.-hist. Cl. 1894. No. 4. 1895, No. 1—4. Geschäftliche Mittheilungen. 1895, H. 1. 2. Göttingen d. J.

Plücker, Julius, Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen hrsg. von *A. Schoenflies* und *Fr. Pockels.* Bd. 1. Leipzig 1895.

Astronomische Mittheilungen von der Königl. Sternwarte zu Göttingen. Hrsg. von *W. Schur.* Th. 4. Göttingen 1895.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1894/95. Grimma 1895.

Nova Acta Academiae Caes. Leopoldino-Carolinae germanicae naturae curiosorum. Tom. 55—62. Halis 1891—94. — Katalog der Bibliothek der Kais. Leop.-Carolin. deutschen Akad. der Naturforscher. Lief. 3—5. Halle 1891—94.

Leopoldina. Amtl. Organ d. Kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. 30, No. 21. 22. H. 31, No. 1—22. Halle 1894. 95.

Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. 19. 20. Halle 1894. 95.

Bericht über die Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle i. J. 1892. Halle d. J.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Originalabhandlungen u. Berichte. Hrsg. vom Naturwiss. Verein f. Sachsen und Thüringen in Halle. 5. Folge. Bd. 5 (d. ganzen Reihe 67. Bd.), H. 3—6. Halle 1894. 95.

Beyschlag, W., Das 200jährige Jubiläum der Universität Halle-Wittenberg. Festbericht. Halle 1895.

Bodemann, Ed., Die Leibniz-Handschriften der Königl. öffentl. Bibliothek zu Hannover. Hannover u. Leipzig 1895.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Herausg. vom Histor.-philosophischen Vereine zu Heidelberg. Jahrg. 5, Heft 1. 2. Heidelberg 1895.

Verhandlungen des Naturhist.-medicinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 5, H. 3. Heidelberg 1894.

Programm der Technischen Hochschule zu Karlsruhe f. d. J. 1895/96. — Lektionsplan der Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1895. Wintersem. 1895/96. — *Haid, M.*, Ueber Gestalt und Bewegung der Erde. Festrede. — 4 Dissertationen v. J. 1893—95.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1894/95. — Verzeichniss der Vorlesungen. Winter 1894/95, Sommer 1895. — *Bruns, Ivo,* De Xenophontis Agesilai capite XI (Progr.). — *Schoene, Alfr.,* Ueber die Alkestis des Euripides. (Rede.) — *Seelig, Wilh.,* Die innere Colonisation in Schleswig-Holstein vor hundert Jahren. (Rede.) Kiel 1895. — 83 Dissertationen a. d. J. 1894/95.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1893, H. 7—12. Berlin 1895.

Schriften des naturwissenschaftlichen Vereins für Schleswig-Holstein. Bd. 10, H. 2. Kiel 1895.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 35 (1894). Königsberg 1895.

Vierteljahrsschrift der Astronom. Gesellschaft. Jahrg. 29, H. 3. 4. Jahrg. 30, H. 1—3. Leipzig 1894. 95.

Catalog der Astronomischen Gesellschaft. Abth. I. Catalog der Sterne bis zur 9. Grösse zwischen 80° nördl. und 2° südl. Declination f. d. Aequinoctium 1875. Stück 10: Zone +20° bis +25°, beobachtet auf der Sternwarte zu Berlin. Leipzig 1894.

Publication der Astronomischen Gesellschaft XVI. *Oppolzer, Th.,* Syzygientafeln für den Mond. Leipzig 1881.

Zeitschrift des Vereins für Lübecker Geschichte u. Alterthumskunde. Bd. 7, H. 1. Lübeck 1894.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule zu Meissen vom Juli 1894 — Juli 1895. Meissen 1895.

Festschrift der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis zu Meissen zur Feier ihres 50jährigen Bestehens. Meissen o. J.

Abhandlungen d. histor. Cl. d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 21 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 68. Bd.), Abth. 1. München 1895.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 18 (in d. Reihe d. Denkschr. d. 66. Bd.). Abth. 3. München 1895.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1894, H. 4. 1895, H. 1. 2. München 1894. 95.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1894. H. 4. 1895, H. 1—3. München 1895.

Lossen, Max, Die Lehre vom Tyrannenmord in der christlichen Zeit. (Festrede). — *Sohncke, L.,* Ueber die Bedeutung wissenschaftlicher Ballonfahrten. (Festrede.) München 1894.

Sechsunddreissigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bericht des Secretariats. München 1895.

Sitzungsberichte der Gesellschaft f. Morphologie u. Physiologie in München. Jahrg. 1894, H. 1—3. Jahrg. 1895, H. 1. München 1895.

22. Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins f. Wissenschaft u. Kunst f. 1893/94. Münster 1894.

Abhandlungen d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 10, H. 3. Nürnberg 1895.

Jahresbericht d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. 1894. Nürnberg 1895.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1894. — Mittheilungen aus dem Germanischen Museum. Jahrg. 1894. — Katalog der im

Germanischen Museum vorhandenen Holzstöcke vom 15.—18. Jahrh. Th. 2. Nürnberg 1894.

Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 9. H. 1. 2. Posen 1894.

Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 7. II. 10. Potsdam 1895.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Hsg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F. Jahrg. 3 (1894), H. 1—4. Stuttgart 1894/95.

Tharander forstliches Jahrbuch. Bd. 17—44. 45, 1. u. Supplem. Bd. 1—6. Dresden 1866—1895.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 48. Wiesbaden 1895.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1894, No. 5—10. Jahrg. 1895, No. 1. 2. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F. Bd. 28, No. 2—7. Bd. 29, No. 1—5. Würzburg 1894. 95.

Oesterreich-Ungarn.

Djela Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti (Agram) 15. U Zagrebu 1895.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti. Svez. 9. 1894. U Zagrebu 1895.

Monumenta historico-juridica Slavorum meridionalium. Vol. 5. Zagrabiae 1894.

Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. 26. Zagrabiae 1894.

Rad Jugoslavenske Akademije znatosti i umjetnosti. Knija 117—122. U Zagrebu 1894. 95.

Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Izd. Jugoslav. Akad. znatosti i umjetnosti. Svez. 13. U Zagrebu 1894.

Sbornik Jugoslavenskih Umjetnih Spomenika. U Zagebru 1895.

Zadarski i Rańinin Lekcionar. Za štampa priredio *Milan Rešetar*. Izd. Juguslav. Akad. Znat. i. umjetnosti. U Zagrebu 1894.

Magyar. tudom. Akadémiai Almanach 1894. 1895. Budapest d. J.

Mathematische u. naturwiss. Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wissensch. herausgeg. Bd. 12 (1893—94). Budapest 1895.

A Magyar tudom. Akad. elhúnyt tagyai fölött tartott Emlékbeszédek. Köt. 4, szám. 1—5. Budapest 1886. 87.

Értekezések a mathematikai tudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 15, 57. 4. 5. Budapest 1894.

Értekezések a nyelv-és-széptudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 16, 57. 4. 5. Budapest 1894.

Értekezések a társadalmi tudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 11, 57. 1—4. Budapest 1890. 91.

Értekezések a természettudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 21, 57. 3. Köt. 23, 57. 3—12. Budapest 1891. 94. 95.

Értekezések a történeti tudományok Köréből. Köt. 15. 57. 1. Budapest 1894.

Archaeologiai Értesitö. A M. T. Akad. arch. bizottságának és av Orsz. Régészeti s emb. Társulatnak Közlönye. Köt. 13, 57. 3—5. Köt. 14, 57. 1—5. Köt. 15, 57. 1—3. Budapest 1893—95.

Mathematikai és természettudományi Értesitö. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 11, füz. 6—9. Köt. 12, füz. 1—12. Köt. 13, füz. 1. 2. Budapest 1893—95.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 25, 57. 4. 5. Köt. 26, 57. 1. 2. Budapest 1893. 94.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 23, füz. 3. 4. Köt. 24, füz. 1—4. Köt. 25, füz. 1. 2. Budapest 1893—95.

Monumenta Hungariae Historica. Cl. II. Vol. 38. Budapest 1894.

Monumenta comitalia regni Transsylvaniae. Köt. 16. 17. Budapest 1893. 94.

Rapport sur l'activité de l'Académie Hongroise des sciences en 1893. 1894. Budapest 1894/95.

Ungarische Revue. Mit Unterstützung der Ungar. Akad. d. Wiss. hrsg. v.. *P. Hunfalvy* u. *Gust. Heinrich*. Jahrg. 13 (1893), H. 6—10. Jahrg. 14 (1894), H. 1—10. Jahrg. 15 (1895), H. 1—4. Budapest 1893—95.

Magyarországi tanulók Külföldön. Vol. 3.

Acsády, J., Két pénzügytörténelmi tanulmány 1565—1604. 1564—1576. Budapest 1894.

Chyzer, C. et *Kulczyński, L.*, Araneae Hungariae. Tom. 1. 2, I. Budapest 1892. 94.

Csánki Dezső, Magyarorszag történelmi földrajza a Hunyadik korában. Köt. 2. Budapest 1894.

Fraknói V. Mátyás király levelei Külügyi osztály. Vol. 1. Budapest 1893.

Hampel J. A réggib középkor emlékei. Vol. 1. Budapest 1894.

Király János. Pozsony város joga a középkorban. Budapest 1894.

Meyer G. A. Szt.-Simon ezüst koporsója Zárában. Budapest 1894.

Munkácsi B. A votják nyelv szótára. Fasc. 3. Budapest 1893.

Óváry L. A M. T. Akad. történelmi bizottságának oklevélmásolatai. II. Budapest 1894.

Simonyi Zs. A magyar határozók. II, 2. Budapest 1895.

Téglás Gábor. Ujabb adalékok az aldunai zuhatagok sziklafelirataihoz. Budapest 1894.

Thaly K. Bercsényi házassága. Budapest 1894.

Zolnay Gy. Nyelvemlékeink a könyvnyomtatás koráig. Budapest 1894.

Verzeichniss d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1895, Winter-Sem. 1895/96. — Uebersicht der akad. Behörden im Studienjahr 1895/96. — Die feierliche Inauguration des Rectors f. 1894/95.

Mittheilungen des historischen Vereins f. Steiermark. Heft 43. Graz 1895.

Zeitschrift des Ferdinandeums f. Tirol u. Vorarlberg. 3. Folge. H. 18. 20. Innsbruck 1874.

Berichte des naturwiss.-medizin. Vereins in Innsbruck. Jahrg. 4. 1874. Innsbruck 1875.

Starohrvatska Prosvjeta. God 1, br. 1—3. Kninu 1895.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Jahrg. 1894, No. 10. 1895, No. 1—7. Krakau d. J.

Acta rectoralia almae universitatis studii Cracovinsis ed. *Wlad. Wisłocki*. Tom. 1, fasc. 3. Cracoviae 1894.

Archivum do dziejów literaturyi oświaty w Polsce (Wydanictwo Akad. w Krakowie. T. 8. W Krakowie 1895.

Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt 3. Kraków 1894.

Biblijoteca pisarzáw polskich (Wydanictwa Akad. umięj. w Krakowie). No. 29. 30. W Krakowie 1894. 95.

Collectanea ex archivio Collegii historici (Archivum komisyi histor.) T. 7. Editionum Collegii histor. Acad. litt. Cracov. No. 53. 54. Kraków 1894.

Corpus antiquissimorum poetarum Poloniae latinorum. Vol. 4. (Nicolai Hussoviani carmina). Cracoviae 1894.

Monumenta medii aevi historica res gestas Poloniae illustrantia. T. 14. W Krakowie 1894.

Pamietnik Akademii umięjetności w Krakowie. Wydział. matemat.-przywd. T. 18, zes. 3. Kraków 1894.

Rocznik Akademii umięjetności w Krakowie. Rok 1893/94. W Krakowie 1894.

Rozprawy Akademii umięjetności. Wydziału filologicznego. T. 20. 21. 23. (Ser. II. T. 5. 6. 8.) — Wydz. histor. filoz. T. 30. 31. (Ser. II. T. 5. 6.) — Wydz. matemat.-przyrodn. T. 27. (Ser. II. T. 7). W Krakowie 1894. 95.

Sprawozdania komisyi fizograficznéj. T. 29. Kraków 1894.

Sprawozdania komisyi językowéj Akademii umięj. T. 5. W Krakowie 1894.

Zbiór wiadomości do antropologii krajowej, wydaw. stariniem komisyi antropolog. Akademii umięj. T. 18. Kraków 1895.

Finkel, Ludw., Bibliografia historyi Polskiej. Cześc. 2, zes. 1. Kraków 1895.

Mittheilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 7. Abth. 1. 2. Laibach 1894.

Izvestija Muzejskega društva za Kranjsko. Letnik 4. V Ljubljani 1894.

Almanach Česke Akademie Cisaře Františka Josefa. Roč̌n. 4. 5. V Praze d. J.

Historický Archiv. Čisl. 3. 6. V Praze 1894. 95.

Bulletin international. Résumés des travaux présentés. Classe des scienc. mathémat. et naturelles. I. Prague 1895.

Rozpravy Česke Akad. Cís. Františka Josefa. Tríd. I (pro vědy filos., právn. a histor.) Ročn. 2. 3. — Tríd. II (mathemat.-přírodn.) Ročn. 2. 3. — Tríd. III (Philolog.) Ročn. 2. 3. V Praze 1893. 94.

Věstnik Česke Akad. Cís. Františka Josefa. Ročn. 2, Čisl. 1—9. Ročn. 3, Čisl. 1—3. Ročn. 4, Čisl. 1—8. V Praze 1893—95.

Oslava stých narozenin Pavla Josefa Šafařika. V Praze 1895.

Sbírka Pramenův ka Poznáni literárniho života. Skupina 1. Rada 2, Čisl. 1. Skup. 2. Čisl. 1. V Praze 1893. 94.

Jaruík, *Jan Urban*, Doe verse starofranconzské legendy o so Kateřině Alexandriuski. V Praze 1894.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften für das Jahr 1894. Prag 1895.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Classe. Jahrg. 1894. — Philos.-histor.-philolog. Classe. Jahrg. 1894. Prag 1895.

Mittheilung der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen. No. 1. 3. 4. Prag o. J.

Uebersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens auf dem Gebiete der Wissenschaft, Kunst u. Literatur i. J. 1893. Prag 1895.

Herman, Nicol., Die Sonntags-Evangelia (Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Hrsg. im Auftrage der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst u. Literatur in Böhmen, Bd. 2). Prag, Wien u. Leipzig 1895.

Holzner, Eug., Studien zu Euripides. Gedruckt mit Unterstützung der Gesellschaft z. Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst u. Literatur in Böhmen. Prag 1895.

Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag über d. J. 1894. Prag 1895.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1894. Jahrg. 55. Prag 1895.

Personalstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag zu Anfang d. Studienjahres 1895/96. — Ordnung d. Vorlesungen im Sommersem. 1895.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrgang 33, No. 1—4. Prag 1894. 95.

Lotos. Jahrbuch f. Naturwissenschaft. Im Auftr. des Vereins »Lotos« hsg. N. F. Bd. 15 (der g. Reihe Bd. 43). Prag 1895.

Verhandlungen des Vereins f. Natur- und Heilkunde zu Pressburg. N. F. Heft 8 (Jahrg. 1892—93). Pressburg 1894.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 18 (1895), No. 1—10. Spalato d. J.

Atti del Museo civico di storia naturale di Trieste. Vol. 9. (N. S. Vol. 3). Trieste 1895.

Almanach der Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Jahrg. 44 (1894). Wien d. J.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Cl. Jahrg. 1894, No. 24—27. Jahrg. 1895, No. 1—9. — Philosoph.-histor. Cl. Jahrg. 1895, No. 1—9.

Archiv f. österreichische Geschichte. Hsg. v. der z. Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 80, H. 2. Bd. 81, H. 1. 2. Wien 1894. 95.

Denkschriften der Kais. Akad. d. Wissenschaften. Mathem.-naturw. Classe, Bd. 60. 61. — Philos.-histor. Classe, Bd. 43. Wien 1893. 94.

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichtsquellen hsg. v. d. histor. Commission d. Kais. Akademie d. Wissensch. Bd. 47. 2. Hälfte. Wien 1894.

Monumenta conciliorum generalium seculi XV, edd. Caesar. Academiae scient. socii delegati. Concilium Basileense. Scriptorum T. 3. P. 3. Vindobonae 1895.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturw. Classe. Abth. I, IIa, IIb, III. Bd. 102 (1893), H. 8—10. Bd. 103 (1894).

H. 1—10. — Philos.-histor. Cl. Bd. 130 (1893). Bd. 131 (1894). Register zu Bd. 121—130. Wien 1894.

Mittheilungen der k. u. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1894. Bd. 37 (N. F. Bd. 27). Wien d. J.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 44, H. 3. 4. Bd. 45, H. 1—9. — *Knapp, J. A.*, Personen-, Ort- u. Sachregister der Sitzungsberichte u. Abhandlungen der k. k. zool.-bot. Gesellsch. 1881—90. Wien 1894. 95.

Brunner von Wattenwyl, C., Monographie der Pseudophylliden. Hsg. von der k. k. zool.-botan. Gesellschaft. Mit Atlas. Wien 1895.

Publicationen für die internationale Erdmessung. Astronomische Arbeiten der k. k. Gradmessungs-Commission. Bd. 6. Längenbestimmungen. — *Herr, Jos.*, Bestimmung der Polhöhe und des Azimutes auf den Stationen Spieglitzer Schneeberg, Hoher Schneeberg und Wĕtrnik. Wien 1894. 95.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums. Bd. 9, No. 3. 4. Bd. 10, No. 1. 2. Wien 1894. 95.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 44 (1894), H. 2—4. Jahrg. 45 (1895), H. 1. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1894, No. 10—18. Jahrg. 1895, No. 1—9. Wien d. J.

Relative Schwerebestimmungen durch Pendelbeobachtungen. Ausgeführt durch die k. k. Kriegs-Marine i. d. J. 1892—94. Hsg. vom k. k. Reichs-Kriegs-Ministerium. Wien 1895.

Mittheilungen der Section f. Naturkunde des Oesterreichischen Touristen-Club. Jahrg. 6. Wien 1894.

Belgien.

Bulletin de l'Académie d'archéologie de Belgique (IV. Sér. des Annales), II. Partie. No. 18—23. Anvers 1894. 95.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1894. 95. (Année 60. 61). Bruxelles d. J.

Bulletins de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Année 63. 64. (1893. 94). III. Sér. T. 25. 26. Bruxelles d. J.

Mémoires de l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 50. Fasc. 2. Bruxelles 1893.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. p. l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 47. 50—52. Bruxelles 1893. 95.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publ. p. l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 53. Bruxelles 1893/94.

Analecta Bollandiana. T. 13. Fasc. 4. T. 14. Fasc. 1—4. Bruxelles 1894. 95.

Annales de la Société R. malacologique de Belgique. T. 27 (IV. Sér. T. 7). Bruxelles 1892.

Mémoires de la Société R. malacologique de Belgique. T. 27 (IV. Sér. T. 7). Bruxelles 1892.

Procès-verbaux des séances de la Société R. malacologique de Belgique. Nov. 1892—Mai 1895.

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 11, Fasc. 1. Bruxelles 1895.

Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1894, No. 3. 1895, No. 1. 2. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Hist. og philos. Afd. 6. Række. Bd. 4, No. 2. — Naturv. og math. Afd. 6. Række. Bd. 8, No. 1. Kjøbenhavn 1895.

England.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 8, P. 4. 5. Cambridge 1895.

Royal Irish Academy. Cunningham Memoirs. No. 10. Dublin 1894.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. III. Vol. 3, No. 3. Dublin 1894.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 20, p. 305—480. Edinburgh 1894/95.

Proceedings and Transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. 9 (Session 1894/95). Liverpool 1895.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. 14, P. 2 (No. 88). London 1895.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 57. 58, No. 340—352. London 1894. 95.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1894. Vol. 185. P. I. II, A. B. — Catalogue of the Philosophical Transactions of the R. Society. London 1895.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 25, No. 495—499. Vol. 26, No. 500—527. London 1894. 95.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1895, No. 4—6. London d. J.

Report on the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger during the years 1872—76. A Summary of the scientific results. P. 1. 2. London 1895.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. IV. Ser. Vol. 8, No. 4. Vol. 9, No. 1—6. Manchester 1894. 95.

The Manchester Museum, Owens College. Studies in Biology from the Biological Department of Owens College. Vol. 3. — Museum Handbooks: Handy Guide to the Museum. — Catalogue of the library, by *W. E. Hogle.* — Catalogue of the Hadfield Collection of shells from Lifu and Uvea, by *J. C. Melvill* and *R. Standen.* Manchester 1895.

Frankreich.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. IV. Sér. T. 3, Cah. 2. T. 4, Cah. 1. 2 et Append. Paris 1894. 95.

Travaux et Mémoires des facultés de Lille. T. 3, Mém. 10—14. Lille 1893.

Mémoires de l'Académie des belles lettres et arts de Lyon. Classe des sciences et lettres. T. 3. — Cartulaire Lyonnais, recueill. et publ. p. *C. Guigne.* T. 2. Paris et Lyon 1893.

Annales de la Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utils de Lyon. VII. Sér. T. 1 (1893). Lyon et Paris 1894.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. N. S. T. 38—40 (1891—93). Lyon et Paris d. J.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille. T. 3, Fasc. 1—3 et Suppl. T. 4, Fasc. 1—3.

Annales de l'Institut botanico-géologique colonial de Marseille. Vol. 1. 1893. Paris d. J.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. Sér. II. T. 1, No. 1—4. Mémoires de la section de médecine. Sér. II. T. 1, No. 1. Mémoires de la section des sciences. Sér. II. T. 1, No. 1—4. T. 2, No. 1. Montpellier 1893. 94.

Bulletin de la Société des sciences de Nancy. T. 13, Fasc. 28. 29. — Catalogue de la bibliothèque. Nancy 1894. 95.

Bulletin des séances de la Société des sciences de Nancy. Année 6, No. 1—3. Nancy 1894.

Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. Année 1895, No. 1—6. Paris d. J.

Comité international des poids et mesures. 16me Rapport aux gouvernements signataires de la convention du mètre sur l'exercise de 1892. Paris 1893.

Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures, publ. sous l'autorité du Comité international. T. 8. Paris 1893.

Journal de l'École polytechnique. Cah. 63. 64. Paris 1893. 94.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 22, No. 9. 10. T. 23, No. 1. 4. 5. 7. 8. Paris 1894. 95.

Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique. Année 18 (1894), No. 9—12. Année 19 (1895), No. 1—10. Athen, Paris d. J.

Mittheilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts, Atheuische Abtheilung. Bd. 19, H. 4. Bd. 20, H. 1—3. Athen 1894. 95.

Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigt te Amsterdam, voor 1894. Amsterdam d. J.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks, Deel 1, No. 4. — Afdeel. Natuurkunde. Sect. I. Deel 2, No. 7. Deel 3, No. 1—4. Sect. II. Deel 4, No. 1—6. Amsterdam 1894. 95.

Verslagen der Zittingen van de Wis- en Natuurkund. Afdeel. d. Kon. Akad. v. Wetensch. van 26. Mai 1894 tot 18. Apr. 1895. Deel 3. Amsterdam 1895.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. III. Reeks, Deel 11. Amsterdam 1895.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. discipl. Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1896. — *Pascoli, Joh.*, Myrmedon aliaque poemata. Amstelodami 1895.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Uitg. door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam. 2. Reeks. Deel 1, II. Amsterdam 1895.

Wiskundige opgaven met oplossingen door de leden van het Wiskundig Genootschap. Deel 6, Stuk 4—6. Neuwe opgaven. Deel 6, No. 166—185. Deel 7, No. 1—25. Amsterdam 1895.

Revue semestrelle des publications mathématiques. T. 1, P. 2. T. 3, P. 1. 2. Amsterdam 1893. 95.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst, uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. N. S. Deel 15. Haarlem 1895.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 28, Livr. 5. T. 29, Livr. 1—3. Harlem 1894. 95.

Huygens, *Chr.*, Oeuvres complètes, publ. p. la Société hollandaise des sciences. T. 6. La Haye 1895.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 4, P. 3. 4. Harlem 1894. 95.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1893/94. Leiden 1894.

Tijdschrift voor Nederlandsche taal- en letterkunde, uitgeg. van wege de Maatsch. der Nederl. Letterkunde. Deel 14 (N. F. 6), Afl. 1—4. Leiden 1895.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging [Leiden]. Ser. II. Deel 6, Stuk 4. Nijmegen 1895.

Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale de Rotterdam 1895.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., ter gelegenheid van de algem. vergad. gehouden den 19. Juni 1894. Utrecht d. J.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1895.

Verslag van het verhandelnde in de algem. vergad. van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van kunsten en wetensch., gehouden d. 19. Juni 1894. Utrecht d. J.

Verslag van de alg. vergad. der leden van het histor. Genootschap, gehouden te Utrecht ter gelegenheid van het 50-jarig bestaan van het Genootschap af 16. Apr. 1895. Utrecht d. J.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 16. 's Gravenhage 1895.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. III. Ser. No. 5. 6. La Haye, 's Gravenhage 1894.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. IV. Reeks. 3, II. Utrecht 1895.

Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 217—240. Firenze 1895.

Atti e Rendiconti dell' Accademia di scienze, lettere ed arte di Acireale. N. S. Vol. 5. 6. (1893. 94). Acireale 1894. 95.

Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Ser. 5. T. 3. Bologna 1893.

Atti della Fondazione scientifica Cagnola dalla sui instituzione in poi. Vol. 12. 13. Milano 1894. 95.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e polit. Vol. 19 (Ser. III, Vol. 10), Fasc. 2. Vol. 20 (Ser. III, Vol. 11), Fasc. 1. — Classe di scienze matematiche e natur. Vol. 17 (Ser. III, Vol. 8), Fasc. 3. 4. Milano 1893—95.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II, Vol. 26. 27. Milano 1893. — Indice generale dei lavori dalla fondazione all' anno 1888. ib. 1891.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena. Ser. II. Vol. 10. Modena 1894.

Spicilegium Casinense. T. 4, P. 1. Montecassino 1895.

Società Reale di Napoli. Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Accad. di archeologia, lettere e belle arti. N. S. Anno 8 (1894). Lugl.-Diz. Anno 9 (1895). Genn.-Giugn. — Atti della R. Accad. di scienze morali e politiche. Vol. 27 (1894—95). — Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Accad. di scienze morali e politiche. Anno 33 (1894). Napoli 1894. 95.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. S. Vol. 10. Padova 1894.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 9, Fasc. 1—6. Palermo 1895.

Atti e Rendiconti dell' Accademia medico-chirurgica di Perugia. Vol. 6, Fasc. 2—4. Vol. 7, Fasc. 1. Perugia 1894. 95.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 9, adunanza del 1. Lugl., 18. Nov. 1894, 13. Genn., 3. Marzo 1895.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Memorie della Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. V, P. I (Memorie). Vol. 1, P. II. (Notizie degli scavi), Vol. 2, Ottob.-Diz. 1894. Vol. 3, Genn.-Sett. 1895. — Rendiconti. Ser. V. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. 3 (1894), II. Sem., Fasc. 10—12. Vol. 4 (1895) [I. Sem.], Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—10. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 3 (1894), Fasc. 10—12. Vol. 4 (1895), Fasc. 1—10. — Rendiconto dell' adunanza solenne del 9. Giugno 1894. Roma d. J.

Mittheilungen des Kais. Deutschen Archaeologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bollettino dell' Imp. Istituto Archeologico-Germanico. Sezione Romana). Bd. 9, H. 4. Bd. 10, H. 1. 2. Roma 1894. 95.

Ministerio di Agricoltura, Industria e Comercio. — Statistica delle biblioteche. P. 1. Vol. 1. 2. Roma 1893. 94.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 7, Fasc. 1—6. Processi verbali delle adunanze 1894. No. 7. 1895, No. 1—4. Siena 1894. 95.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 30, Disp. 1—16. Torino 1894/95.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1894 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1895.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Ser. VII. T. 5, Disp. 4—9. T. 6, Disp. 1—3. Venezia 1894. 95.

Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. 25, No. 1—3. Venezia 1894.

Temi di premio proclamati dal R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti nella solenne adunanza del 19. Maggio 1895. Venezia d. J.

Luxemburg.

Publications de l'Institut R. Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles. T. 23. Luxembourg 1894.

Rumänien.

Buletinul Societăţii de sciinţe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucaresci-România. Anul 3, No. 7—12. Anul 4, No. 1—10. Bucaresci 1894. 95.

Russland.

Acta Societatis scientiarum Fennicae. T. 20. Helsingforsiae 1895.

Bidrag till kännedom af Finska natur och folk, utg. af Finska Vetenskaps-Societ. Häftet 54—56. Helsingfors 1894. 95.

Observations publiées par l'Institut méteorologique central de la Société des sciences de Finlande. Livr. 1. Observations météorologiques faites à Helsingfors en 1893. Vol. 12. Helsingfors 1894. — Observations météorologiques publiées par l'Institut météorologique central. 1889—1890. Kuopio 1895.

Öfversigt af Finska Vetenskabs-Societetens Förhandlingar. 36 (1893—94). Helsingfors 1894.

Universität Kazan. 2 Dissertationen a. d. J. 1895.

Universitetskija Izvěstija. God 34, No. 12. God 35, No. 1—10. — Spisok licam služaščim v. imp. universitetě sv. Vladimira. Kiev 1894. 95.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1894, No. 3. 4. 1895, No. 1. 2. 4. Moscou d. J.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. Sér. V. T. 1, No. 4. T. 2, No. 1—5. T. 3, No. 1. St.-Pétersbourg 1894. 95.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. Sér. VII. T. 42, No. 12. Sér. VIII Cl. phys.-mathém. Vol. 1, No. 8. St.-Pétersbourg 1894.

Repertorium f. Meteorologie, hsg. v. d. Kais. Akad. d. Wiss., red. v. *H. Wild*. Bd. 17. Supplbd. 6. St. Petersburg 1894.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von *H. Wild*. Jahrg. 1893, Th. 1. 2. St.-Petersburg 1894.

Comité géologique, St. Pétersbourg. Bulletins. T. 13, No. 1—9 et Suppl. T. 14, No. 1—5. — Mémoires. Vol. 8, No. 3. Vol. 9, No. 3. 4. Vol. 10, No. 3. Vol. 14, No. 1. 3. St. Pétersbourg 1894. 95.

Acta Horti Petropolitani. T. 13, Fasc. 2. Petropoli 1894.

Trudy S.-Peterburgskago Obščestva estestvoyspytatelej. — Travaux de la Société des naturalistes de St. Pétersbourg. T. 23. Sect. de géologie et de minéralogie. T. 25, 1. Sect. de zoologie et de physiologie. Section de botanique. Protokoly. 1895, 1—5. St. Pétersbourg 1895.

Godičnyi Akt Imp. S. Peterburgsk. Universiteta za 8. Feb. 1895. S. Peterburg.

Obozrěnie propodavanija nauk v Imp. S.-Peterburgsk. Universitetě na osenne i vesenne polugodie 1895/96. S. Peterburg 1895.

Pravila biblioteki Imp. S. Peterburgsk. Universiteta. S. Peterburg 1894.

Vizantijskij vremennik (*Βυζαντινα Χρονικά*), izdavaemyi pri imp. Akad. nauk. T. 1, Vyb. 2. 3/4. S. Peterburg 1894.

Kurono, J., Russko-japonskie razgovor. S. Peterburg 1894.

Melioranski, P. M., Kratkaja grammatika kasak-kirkiskago jazyka. Čast 1. S. Peterburg 1894.

Vostočnyja zamětki. S. Peterburg 1895.

Kadem Bevünetik Volapüka. Jülag, No. 1—17. S. Peterburg 1893—95.

Correspondenzblatt das Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 37. Riga 1894.

Festschrift des Naturforscher-Vereins zu Riga in Anlass seines 50-jährigen Bestehens am 27. März (8. April) 1895. Riga d. J.

Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. J. 1892. 1893. Beobachtungen der Temperatur des Erdbodens i. J. 1888. 89. Tiflis 1894. 95.

Schweden und Norwegen.

Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-katalog. 9 (1894). Stockholm 1895.

Bergens Museum. Aarbog for 1893. Afhandlinger och Aarberetning. Bergen 1894.

Guldberg, G. and *Nansen, T.*, On the development and structure of the whale. P. 1. (Bergens Museum V). Bergen.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1883. Christiania 1884.

Die Norwegische Commission der Europäischen Gradmessung. Resultate der im Sommer 1894 in dem südlichsten Theile Norwegens ausgeführten Pendelbeobachtungen, von *O. E. Schiötz*. Kristiania 1895.

Publication der Norwegischen Commission der Europäischen Gradmessung. Astronomische Beobachtungen und Vergleichung der astronomischen u. geodätischen Resultate. Christiania 1895.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 30. I. II. Lund 1893/94.

Acta mathematica. Hsg. v. *G. Mittag-Leffler*. 18, 4. 19, 1—4. Stockholm 1894. 95.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 26. Stockholm 1894/95.

Ofversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Årg. 50. 51. (1893. 94). — *Théel, Hjahn*, Om Sveriges zoologiska hafsstation Kristineberg. Stockholm 1895.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademiens Handlingar. Deel 32 (N. F. Deel 12). Stockholm 1895.

Antiqvarisk Tidskrift för Sverige, utg. af kongl. Vitterhets Hist. och Antiqvitets-Akademien. D. 5, H. 4. D. 13, H. 1. D. 14, H. 2. 3. D. 15, H. 2, I. D. 16, H. 1—3. Stockholm 1873—95.

Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Bd. 5, No. 1—4. Stockholm 1893—95.

Entomologisk Tidskrift utg. at Entomologiska Föreningen i Stockholm. Arg. 15 (1894). Stockholm d. J.

Nova Acta Reg. Societatis scient. Upsaliensis. Ser. III. Vol. 15, 2. Upsaliae 1895.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. 2, P. I, No. 3. Upsala 1895.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 26 (1894). Upsal 1894. 95.

Schweiz.

Neue Denkschriften der Allgem. Schweizer. Gesellschaft f. d. gesammten Naturwissenschaften. Bd. 34. Basel 1895.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Schaffhausen 30. Jul.—1. Aug. 1894. 77. Jahresversammlung. Jahresbericht 1893/94. Schaffhausen 1894.

Compte-rendu des travaux présentés à la 77. session de la Société Helv. des sciences naturelles réunis à Schaffhouse les 30. Jul.—1. Aug. 1894. Genève 1894.

Argovia. Jahresschrift der Historischen Gesellschaft des Kantons Aargau. Bd. 19—28. Aarau 1888—94.

Basler Chroniken. Hsg. v. d. Historischen u. Antiquarischen Gesellschaft in Basel. Bd. 5. Leipzig 1895.

Mittheilungen der Historischen u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. N. F. Hft. 4. Basel 1894.

19. Jahresbericht der Historischen u. Antiquarischen Gesellschaft in Basel über d. Vereinsjahr 1893/94. Basel 1894.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 10, H. 2. 3. Bd. 11, H. 1. Basel 1894. 95.

Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern a. d. J. 1894 (No. 1335—1372). Bern 1895.

Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Jahrgang 38 (1894/95). Chur 1895 u. Suppl.: Die Ergebnisse der sanitarischen Untersuchungen der Recruten des Kantons Graubünden i. d. J. 1875—79. Bern 1895.

Index lectionum in univers. Friburgensi per mens. aest. 1895 et per mens. hiem. 1895/96. Friburgi Helvet. — Université de Fribourg. Autorités, professeurs et étudiants. Sem. d'hiv. 1894/95. Sem. d. été 1895. Sem. d'hiv. 1895/96. Fribourg 1894. 95. — Festrede zur feierlichen Eröffnung des Studienjahres 1894/95.

Collectanea Friburgensia. Fasc. 3. Friburgi Helv. 1895.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. 32, P. 1. Genève 1894/95.

Vierteljahrsschrift d. Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 39, H. 3. 4. Jahrg. 40, H. 1. 2. Zürich 1894. 95.

Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas. 45—48. — Spomenik. No. 26—28. Beograd 1894. 95.

Srpski etnografski zbornik. Knija 1. Beograd 1894.

Nordamerika.

Transactions of the American Philological Association. Vol. 25 (1894). Boston d. J.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 6. Rochester 1895.

El Instructor. Periódico científico y literario. Año 11, No. 7—12. Año 12, No. 1—4. Aguascalientes 1894. 95.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. 14, No. 116—122. Baltimore 1895.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 16, No. 4. Vol. 17, No. 1—3. Baltimore 1894. 95.

American Journal of Philology. Vol. 15, No. 2—4. Vol. 16, No. 1. Baltimore 1894. 95.

American chemical Journal. Vol. 16, No. 7. 8. Vol. 17, No. 1—7. Baltimore 1894. 95.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Ser. XI, 11. 12. Ser. XII, 1—12. Ser. XIII, 1—8. Baltimore 1893—95.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. N. Ser. Vol. 21. (Whole Ser. Vol. 29.) Boston 1894.

Memoirs of the Boston Society of natural history. Vol. 3, No 14. Boston 1894.

Occasional Papers of the Boston Society of natural history. IV. *W. O. Crosby*, Geology of the Boston Bassin. Vol. 1, P. 2. Boston 1894.

Proceedings of the Boston Society of natural history. Vol. 26, P. 2. 3. Boston 1894.

Bulletin of the Buffalo Society of natural sciences. Vol. 5, No. 4. Buffalo 1894.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 16, No. 15. Vol. 25, No. 12. Vol. 26, No. 1. 2. Vol. 27, No. 1—5. Vol. 28, No. 1. Cambridge, Mass. 1894. 95.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 17, No. 3. Vol. 18. 19, No. 1. Cambridge, Mass. 1894. 95.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass., for 1893/94. Cambridge, Mass. 1894.

Colorado College Studies. 5. annual Report. Colorado Springs 1894.

The Journal of comparative Neurology. Ed. by *C. L. Herrick*. Vol. 4, No. 4. Vol. 5, No. 1. 2. Granville 1894. 95.

Michigan Mining School. Prospectus of elective studies. — Catalogue of the Michigan Mining School 1892—94. Houghton 1894. 95.

Missouri Geological Survey. Vol. 4, I. II. 5—7. Jefferson City 1894.

University of Nebraska. Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Vol. 8, No. 43. — Press.-Bulletin. No. 6. Lincoln 1895.

Transactions of the Wisconsin Academy of sciences, arts and letters. Vol. [1]. 2—8. 9, I. II. Madison 1872—94.

Memorias de la Sociedad científica »Antonio Alzate«. T. 8, Cuad. 1—4. México 1894.

Boletin de la Comisión geológica de México. No. 1. México 1895.

Comisión geológica Mexicana. Expedición científica al Popocatepetl. México 1895.

Occasional Papers of the natural history Society of Wisconsin. Vol. 2, No. 2. Milwaukee 1894.

12. annual Report of the Board of Trustees of the public Museum of the City of Milwaukee 1893/94. Milwaukee 1894.

The geological and natural history Survey of Minnesota. The 22. and 23. annual Report. 1894. 95. — 1. Report of the State Zoologist accompanied with Notes on the birds of Minnesota. Minneapolis 1892 94. 95.

Contributions from the Lick Observatory. [Mount Hamilton]. No. 4. Sacramento 1895.

Publications from the Lick Observatory. Vol. 3. Sacramento 1894.

Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. Vol. 9, P. 2. New Haven 1895.

Report for the year 1894/95, presented by the Board of Managers of the Observatory of Yale University to the President and Fellows. (New Haven o. J.)

Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 8, No. 5. New York 1894.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 26, No. 4, I. II. Vol. 27, No. 1—3. New York 1894. 95.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada for the year 1894. Vol. 12. Ottawa 1895.

Geological Survey of Canada. Annual Report. N. S. Vol. 6 (1892/93). Sheets. Vol. II, Part P. Vol. III, Part F. K. Maps No. 364—372. 379—390. 550. 551. Ottawa 1895.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1894, P. 2. 3. 1895, P. 1. Philadelphia d. J.

Transactions of the Wagner Free Institute of science. Vol. 3, P. 3. Philadelphia 1895.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. Vol. 32, No. 143. Vol. 33, No. 146. Vol. 34, No. 147. Philadelphia. 1893—95.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia. N. S. Vol. 18, P. 2. Philadelphia 1895.

American Journal of Archaeology. 1895. Apr.-Septb. Princeton d. J.

Observatorio meteorológico del Colegio del Estado de Puebla. Resumen correspondiente á cada día. Año 1894. 1895. Enero-Jul. — Pronostico dado para el año de 1892. 93.

Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 6, No. 18. Vol. 7, No. 1—3. St. Louis 1895.

Memoirs of the California Academy of sciences. Vol. 2, No. 4. San Francisco 1895.

Proceedings of the California Academy of sciences. Ser. II. Vol. 4, P. 1. 2. San Francisco 1894. 95.

Bureau of Education. Report of the Commissioner of education for the year 1891/92. Vol. 1. 2. Washington 1894.

11. and 12. annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. 1889/90. 1890/91. Washington 1894.

Boas, F., Chinook Textes. Washington 1894.

Fowke, G., Archaeological Investigations in James and Potomac Valleys. Washington 1894.

Hodge, F. W., List of the Publications of the Bureau of Ethnology. Washington 1894.

Holmes, W. H., An ancient quarry in Indian Territory. Washington 1894.

Mooney, J., The Siouan tribes of the East. Washington 1894.

U. D. Department of Agriculture. Division of Ornithology and Mammology. Bulletin. No. 6. — North American Fauna. No. 8. Washington 1895.

Department of the Interior. N. S. Geological Survey. — Contributions to North American Ethnology. Vol. 9. Washington 1893.

Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. 35, No. 854. *Woodward, R. S.*, Smithsonian Geographical Tables. Vol. 38, No. 969. *Sergi, G.*, The varieties of the human species. No. 970. *Seymour, P. H.*, Bibliography of aceto acetic ester and its derivatives. Washington 1894.

Rockhill, W. W., Diary of a Journey through Mongolia and Tibet in 1891 and 92 (publish. by the Smithsonian Institution). Washington 1894.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures and conditions of the Institution to July 1893. Washington 1894. — Report of the U. S. National Museum f. 1893.

Proceedings of the U. S. National Museum. Vol. 16 (1893). Washington 1894.

United States Coast and Geodetic Survey. Bulletin No. 31. Washington 1895.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress during the fiscal year ending with June 1892. P. 1. Washington 1894.

Bulletin of the U. S. Geological Survey (Department of the Interior). No. 118—122. — Geological Atlas of the U. S. Fol. 1—6. 8—12. Washington 1894.

Monographs of the U. S. Geological Survey. Vol. 23. 24. Washington 1894.

14. annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. 1892/93. P. 1. 2. Washington 1893. 94.

Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 38. 39. 40, Entr. 1—4. Buenos Aires 1894. 95.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. [Córdoba]. T. 14, Entr. 1. 2. Buenos Aires 1894.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1894. 95. (Anno 10. 11). Rio de Janeiro 1893. 94.

Actes de la Société scientifique du Chili. Tom. 4, Livr. 1. 2. Santiago 1895.

Verhandlungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins zu Santiago. Bd. 3, H. 1. 2. Santiago 1895.

Asien.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 32, Afl. 1—4. Deel 33, Afl. 1. 2. Batavia 1894. 95.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 37, Afl. 4—6. Deel 38, Afl. 1—5. Batavia, 1894. 95.

Die Triangulation von Java, ausgeführt vom Personal der geographischen Dienstes in Niederl. Ostindien. Abth. 4. Im Auftrag des Ministeriums der Kolonien bearb. von *J. A. C. Oudemans*. Haag 1895.

Nederlandsch-Indie Plakatboek 1602—1811, dor *J. A. van der Chijs*. Deel 12. 13. Uitgegeven door het Batav. Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia, 's Hage 1894.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia vant passerendsdaer ter plaetse als over gehad Nederlands-India anno 1665. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. med medemaking van de Nederlandsch-Indische Regeering en onder toetcht van J. A. van der Chijs. Batavia, 's Hage 1894.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 47, Stuk 3. Deel 48, Stuk 2. Deel 50, Stuk 1. Batavia, 's Hage 1894. 95. — Catalogus der Ethnologische Verzameling van het Batav. Genootsch. v. kunst. en wetensch. ib. 1894.

Observations made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 16 (1893). Batavia 1894.

Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. Jaarg. 15 (1893). Batavia 1894.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgeg. door de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Deel 54 (Ser. IX, Deel 2). Batavia 1895.

Stein, *M. A.*, Catalogue of the Sanscrit Manuscripts in the Rayhunatha Temple Library of the Maharaja of Jammu and Kaschmir. Bombay 1894.

Indian Museum Notes. Vol. 3, No. 4. 5. Calcutta 1895.

Indian Meteorological Memoirs. Published under the direction of *J. Eliot*. Vol. 7, P. 1. 2. Simla 1894.

Imperial University of Japan (Teikoku Daigaku), Calendar 2554—2555 (1894—95). Tōkyō 2555 (1895).

Journal of the College of science, Imperial University, Japan. Vol. 7, P. 2—5. Tōkyō 1894. 95.

Mittheilungen aus der Medicinischen Facultät der Kais. Japan. Universität. Bd. 2, No. 2. Bd. 3, No. 1. Tokio 1894.

Australien.

Report on the progress and condition of the Botanic Garden during the year 1888. Adelaide 1889.

Proceedings of the R. Society of Victoria. N. Ser. Vol. 7. Melbourne 1895.

Australian Museum. Report for the year 1894. Sydney d. J.

Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 28 (1894). Sydney d. J.

2. Einzelne Schriften.

Bund, Marcus, Die Erde und die Sonne oder Was dreht sich? Wien o. J.

Cayley, Arthur, The collected mathematical papers. Vol. 8. Cambrigde 1895.

Crivetz, Théod., Essai sur le postulat d'Euclide. Bucarest 1895.

Cruls, L., O clima do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro 1892.

——, Determinação das posições geographicas de Rodeio, Entre-Rios etc. ib. 1894.

——, Méthode graphique pour la détermination des heures approchées des eclipses du soleil et des occultations. ib. 1894.

Fritsche, H., Ueber den Zusammenhang zwischen der erdmagnetischen Horizontalintensität und der Inclination. St. Petersburg 1895.

Hale, Geo., On some attempts to photograph the solar corona without an eclipse. S.-A.

——, Astrophysical Journal. S.-A.

Hering, C. A., Das Entwicklungsgesetz der Erde und der Erzlagerstätten. Dresden 1895.

Keeler, Jam. E., Conditions affecting the form and lines in the spectrum of Saturn. S.-A. 1895.

——, A spectroscopic proof of the meteoric constitution of Saturn's rings. S.-A. 1895.

Le Jolis, Aug., Remarques sur la nomenclature hépaticologique. S.-A. 1894.

Perot, A., Sur l'existence et la propagation des oscillations électro-magnétiques dans l'air. S.-A.

Sacco, F., Essai sur l'orogénie de la terre. Turin 1895.

Saint-Lager, Onothera ou Oenothera. Les anes et le vin. Paris et Lyon 1893.

Schreiber, Paul, Ueber registrirende Regenmesser und Pegel. S.-A. 1895.

Schlemüller, Wilh., Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einem theoretischen Gase. Prag. S.-A.

Schuchardt, Hugo, Sind unsere Personennamen übersetzbar? Graz 1895.

Schur, W., Weitere Mittheilungen über die Ergebnisse der Pendelmessungen bei Göttingen. S.-A.

Ullrich, Paul Wilhelm, Die Anfänge der Universität Leipzig. I. Personenverzeichniss von 1409^b bis 1419^a. Werdau 1894.

Vogel, H. C., Ueber das Vorkommen der Linien des Cleveitgasspectrums in den Sternspectren. S.-A. Berlin 1895.

——, Neue Untersuchungen über die Spectra der Planeten. S.-A. Berlin 1895.

Wilde, Henr., On the evidenca afforted by Bode's law of a permanent construction of the Radii vectores of the planetary orbits. S.-A. Manchester 1895.

——, On the multiple proportions of the atomic weights of elementary substances. S.-A. ib. 1895.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

SITZUNG VOM 7. JANUAR 1895.

Vorträge hielten:

Herr F. Stohmann, o. M.: Calorimetrische Untersuchungen.

Herr W. Ostwald, o. M.: Ueber das Princip des ausgezeichneten Falles.

F. Stohmann, *Calorimetrische Untersuchungen.* Vierunddreissigste Abhandlung.

Ueber den Wärmewerth der Amide und Anilide einbasischer Säuren

von

F. Stohmann und Raymund Schmidt.

Vorliegende Arbeit schliesst sich an unsere Abhandlung XXX[1]), welche die Wärmewerthe der homologen aliphatischen Säuren zum Gegenstande hat. Nachdem dort nachgewiesen war, dass die einbasischen Säuren, von der Essigsäure $C_2H_4O_2$ bis zur Behensäure $C_{22}H_{44}O_2$, eine thermisch durchaus homolog verlaufende Reihe bilden, musste es vom grösstem Interesse sein, die Derivate dieser Säuren in gleicher Richtung zu untersuchen. Es war diese Studie um so mehr geboten, als Berthelot und Fogh[2]), bei ihrer Untersuchung der Amide der Essigsäure, Propion- und Benzoësäure und der Anilide der Essigsäure und Benzoësäure, für Acet- und Propionamid eine Differenz von nur 147,9 Cal. gefunden haben, während, nach Analogie des Verhaltens der Säuren, eine Differenz von etwa 156,6 Cal. zu erwarten sein würde, wenn nicht in der homologen Reihe der Amide ganz besondere Gesetzmässigkeiten obwalten.

---

1) Ber. kön. sächs. Ges. d. W. 1893, S. 604.

2) Annal. Chim. Phys. [6] 22, 18.

Wir haben, um hierüber zu entscheiden, die ganze Reihe der Amide und Anilide von der Ameisensäure bis zur Valeriansäure und die der Laurin-, Myristin- und Palmitinsäure untersucht, und kommen zu dem Resultate, dass in beiden Reihen genau dieselben Gesetzmässigkeiten herrschen, welche in der Säurereihe von uns nachgewiesen worden sind. Die Uebereinstimmung geht in der That so weit, dass die Werthe in diesen beiden Reihen, auf Grund der für die Säurereihe gesammelten Erfahrungen, bis auf eine Genauigkeit von 1 : 1000 sich vorher bestimmen lassen, sobald nur der Werth eines der Glieder der Reihen bekannt ist.

Ausserdem musste die Isomerie des Benzamides und des Formanilides uns weiteren Aufschluss gewähren über die in Abhandlung XXXIII [1]) und XXV [2]) gemachten Schlussfolgerungen, nach welchen der thermische Werth der substituirenden Radicale wesentlich verschieden ist, je nachdem das Radical bei der Substitution an ein Kohlenstoff- oder an ein Stickstoffatom gebunden wird. Es ergab sich dabei für das in die Verbindung eintretende Phenyl völlige Uebereinstimmung des Verhaltens der früher studirten Methyl- und der $CH_2 . COOH$-Gruppe und zwar nicht allein bei der Bindung an Kohlenstoff und Stickstoff, sondern auch an Sauerstoff.

Mit dem Studium der Amide und Anilide der zweibasischen Säuren sind wir gegenwärtig beschäftigt. Dieselben werden in einer späteren Arbeit behandelt werden.

Experimenteller Theil.

Formamid,

$$\underset{CO . NH_2}{\overset{H}{\dot{}}} \qquad CH_3NO \;.\;.\;.\;.\; 45.$$

Das Präparat des Handels, von Dr. H. König u. Comp., Leipzig, wurde von uns im luftverdünnten Raume mehrfach fractionirt, bis es bei 13 mm Druck einen constanten Siedepunkt von 117° zeigte (1 u. 2). Es wurde dann von Neuem destillirt, wo-

1) Ber. kön. sächs. Ges. d. W. 1894, S. 248.

2) Journ. f. prakt. Chem. [2] 44, 393.

bei der Siedepunkt, unter einem Druck von 17 mm, constant bei 121° lag (3 und 4). Die übereinstimmenden Zahlen der Verbrennungswärme beweisen die Reinheit und Identität beider Präparate.

Das flüssige Säureamid lässt sich nicht ohne Weiteres zur Verbrennung bringen. Doch gelingt dieses ohne Schwierigkeit nach Zusatz einer nicht grossen Menge von Campher. Der hierzu verwandte käufliche Campher hatte einen Wärmewerth von 9282,3 cal. pro Gramm. Um einer Verdunstung der Substanz während der Wägung vorzubeugen, wurde das Verbrennungsgefäss in mehreren Fällen mit einem gewogenen Collodiumblättchen verschlossen, und der Wärmewerth des letzteren, wie früher, nach Berthelot's Messungen mit 2782 cal. pro Gramm in Rechnung gestellt. Es zeigte sich jedoch, dass der Verschluss in diesem Falle nicht erforderlich war, da Versuch 1, bei welchem ohne denselben gearbeitet wurde, ein gleiches Resultat wie die übrigen ergab.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz			ϑ_n(corr.)	ϑ_1	$\vartheta_n - \vartheta_1$	Wasserwerth W_a	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$
	Formamid Grm.	Campher Grm.	Collodium Grm.	Grad	Grad	Grad	Grm.	cal.
1.	1,4961	0,1733	—	18,2683	15,8171	2,4512	2500	6128,0
2.	1,2127	0,1654	0,0216	18,1327	16,0300	2,1027	2500	5256,7
3.	1,3773	0,1442	0,0134	17,6282	15,4129	2,2153	2500	5538,2
4.	1,1909	0,1191	0,0173	18,0084	16,1126	1,8958	2500	4739,5

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Campher cal.	Collodium cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	26,0	1608,7	—	1643,8
2.	9,1	12,0	1535,3	60,1	1616,5
3.	9,1	12,3	1338,5	37,2	1397,1
4.	9,1	9,4	1105,5	48,1	1172,1

Wärmewerth

	des Formamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	4484,2	2997,3	134,9	99,90
2.	3640,2	3001,7	135,1	100,04
3.	4141,1	3006,7	135,3	100,21
4.	3567,4	2995,5	134,8	99,84
	Mittel	3000,3	135,0	für constant. Volum
			134,9	» » Druck
			62,6	Bildungswärme.

Acetamid,

$$\begin{matrix} CH_3 \\ \dot{C}O\,.\,NH_2 \end{matrix} \qquad C_2H_5NO \;.\;.\;.\;.\; 59.$$

Zur Darstellung wurde Eisessig mit gasförmigem Ammoniak gesättigt und das gebildete Ammoniumsalz im Ammoniakstrom destillirt. Das über 190° Uebergehende wurde aus absolutem Alkohol mehrfach umkrystallisirt. Farblose Krystalle von 82° Schmelzpunkt. Nach Vornahme der Bestimmungen von 1 und 2 wurde das Präparat von Neuem umkrystallisirt und diente dann zur Bestimmung 3. Auf gleiche Weise wurde bei allen Präparaten verfahren, um Controle für deren Reinheit zu haben.

Zur Sicherung der Zündung der sonst gut verbrennenden Substanz wurde eine ganz geringe Menge Naphtalin verwandt.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz		ϑ_n (corr.)	ϑ_1	$\vartheta_n - \vartheta_1$	Wasserwerth W_a	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$
	Acetamid Grm.	Naphtalin Grm.	Grad	Grad	Grad	Grm.	cal.
1.	1,0450	0,0044	18,1299	16,0986	2,0313	2500	5078,2
2.	0,9910	0,0047	17,1594	15,2313	1,9281	2500	4820,2
3.	0,8459	0,0021	17,7507	16,1096	1,6411	2500	4102,7

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpeter-säure cal.	Naphtalin cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	23,8	42,3	75,2
2.	9,1	18,8	45,8	73,7
3.	9,1	21,0	20,2	50,3

Wärmewerth

	des Acetamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5003,0	4787,6	282,5	99,96
2.	4746,5	4789,6	282,6	100,01
3.	4052,4	4790,6	282,6	100,03
	Mittel	4789,3	282,6 für constant. Volum	
			282,7 » » Druck	
			77,8 Bildungswärme.	

Propionamid,

$\begin{matrix} C_2H_5 \\ \dot{C}O.NH_2 \end{matrix}$ C_3H_7NO . . . . 73.

Trocknes propionsaures Ammonium wurde im geschlossenen Rohre auf 230° erhitzt und das entstandene Amid mehrfach aus Chloroform krystallisirt (Bestimmung 1 und 2; 3 nach nochmaliger Krystallisation aus Chloroform; 4 das Präparat von 3 aus Aether umkrystallisirt).

Schmelzpunkt aller Krystallisationen gleichmässig bei 80°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Propionamid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$\vartheta_n - \vartheta_1 . W_a$ cal.
1.	1,0360	18,1943	15,6874	2,5069	2500	6267,2
2.	0,9924	18,3010	15,8968	2,4042	2500	6010,5
3.	1,0228	17,7573	15,2793	2,4780	2500	6195,0
4.	0,9878	17,2684	14,8751	2,3933	2500	5983,2

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	25,5	34,6
2.	9,1	27,0	36,1
3.	9,1	27,0	36,1
4.	9,1	26,5	35,6

Wärmewerth

	des Propionamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6232,6	6016,0	439,2	99,94
2.	5974,4	6020,2	439,5	100,01
3.	6158,9	6021,6	439,6	100,03
4.	5947,6	6021,1	439,5	100,02
	Mittel	6019,7	439,4	für constant. Volum
			439,8	» » Druck
			83,7	Bildungswärme.

Normales Butyramid,

$$\begin{matrix} C_3H_7 \\ CO.NH_2 \end{matrix} \qquad C_4H_9NO \; . \; . \; . \; . \; 87.$$

In wasserfreie Normal-Buttersäure wurde trocknes Ammoniak bis zur Sättigung geleitet und die Masse acht Stunden lang im geschlossenen Rohre bei einer Temperatur von 230° erhalten. Der Röhreninhalt wurde mit einem Gemisch von Petroleumäther und Benzol behandelt, die Lösung von einer gewissen Menge ungelöst bleibender Buttersäure abgegossen und zur Krystallisation gebracht. Das Butyramid wurde mehrmals aus Benzol umkrystallisirt (Bestimmung 1 und 2; 3 und 4 nach nochmaliger Krystallisation aus Aether).

Schmelzpunkt der Krystalle 113,5°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz N. Butyramid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasser-werth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0031	18,0199	15,2593	2,7606	2500	6901,5
2.	0,9800	18,1780	15,4818	2,6962	2500	6740,5
3.	1,0056	18,1317	15,3630	2,7687	2500	6921,8
4.	1,0897	18,5090	15,5137	2,9953	2500	7488,2

Correctionen.

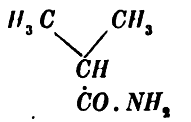
	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	27,4	36,5
2.	9,1	27,9	37,0
3.	9,1	26,8	35,9
4.	9,1	20,9	30,0

Wärmewerth

	des Butyramids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6865,0	6843,8	595,4	100,00
2.	6703,5	6840,3	595,1	99,95
3.	6885,9	6847,5	595,7	100,05
4.	7458,2	6844,3	595,5	100,00

Mittel 6844,0 595,4 für constant. Volum
596,1 » » Druck
90,4 Bildungswärme.

Iso-Butyramid.



C_4H_9NO . . . . 87.

Darstellung: Durch sechsstündiges Erhitzen von trocknem Ammoniumisobutyrat im geschlossenen Rohre bei 230° und mehr-

fache Krystallisation aus absolutem Alkohol. (Bestimmung 1 und 2; 3 nach nochmaliger Krystallisation.)

Schmelzpunkt der Krystalle 127°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Isobutyramid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0016	18,9229	16,1682	2,7547	2500	6886,7
2.	0,9364	17,5329	14,9560	2,5769	2500	6442,2
3.	0,8960	17,7107	15,2433	2,4674	2500	6168,5

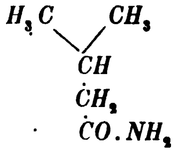
Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	27,1	36,2
2.	9,1	25,2	34,3
3.	9,1	26,6	35,7

Wärmewerth

	des Isobutyramids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6850,5	6839,6	595,0	99,96
2.	6407,9	6843,1	595,3	100,01
3.	6132,8	6844,6	595,5	100,03
	Mittel	6842,4	595,3 für const. Volum	
			596,0 » » Druck	
			90,5 Bildungswärme.	

Iso-Valeramid,



$C_5H_{11}NO$ . . . 101.

Darstellung: Sättigung von Isovaleriansäure mit trocknem Ammoniak und sechsstündiges Erhitzen im geschlossenen Rohre

auf 230°, Lösen und Krystallisiren aus Benzol. Aus Aether umkrystallisirt (Bestimmung 1 und 2; 3 und 4 nach nochmaliger Krystallisation aus Aether).

Schmelzpunkt der Krystalle 128°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Isovaleramid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,8582	17,1458	14,5803	2,5655	2500	6413,7
2.	0,8508	18,0553	15,5137	2,5416	2500	6354,0
3.	0,9301	18,2618	15,4838	2,7780	2500	6945,0
4.	0,9491	18,6148	15,7822	2,8326	2500	7081,5

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	24,4	33,5
2.	9,1	23,8	32,9
3.	9,1	22,9	32,0
4.	9,1	21,2	30,3

Wärmewerth

	des Isovaleramids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6380,2	7434,4	750,9	100,04
2.	6321,1	7429,6	750,4	99,97
3.	6913,0	7432,5	750,7	100,01
4.	7051,2	7429,4	750,4	99,97
	Mittel	7431,5	750,6	für const. Volum
			751,6	» » Druck
			97,9	Bildungswärme.

Laurinamid,

$$\begin{matrix} C_{11}H_{23} \\ \dot{C}O.NH_2 \end{matrix} \qquad C_{12}H_{25}NO \quad . \; . \; 199.$$

Reine Laurinsäure wurde fein zerrieben, mit der äquivalenten Menge Phosphorpentachlorid zusammengebracht und auf dem Wasserbade gelinde erwärmt. Durch gelindes Erwärmen im luftverdünnten Raume wurde zuerst das entstandene Phosphoroxychlorid entfernt und dann das Laurylchlorid destillirt. Das Laurylchlorid wurde in starkes wässriges Ammoniak getropft, woraus sich das Amid abscheidet. Letzteres wurde aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt. Bestimmungen 1 und 2 und 3 und 4 sind mit verschiedenen Krystallisationen ausgeführt.

Schmelzpunkt der Krystalle 102°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Laurinamid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
1.	0,5315	17,2048	15,2284	1,9764	2507,6	4956,0
2.	0,6378	17,5665	15,1944	2,3721	2507,6	5948,3
3.	0,6210	17,5117	15,2034	2,3083	2507,6	5788,3
4.	0,6357	17,5356	15,1715	2,3641	2507,6	5428,2

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	14,8	23,9
2.	9,1	18,5	27,6
3.	9,1	18,0	27,1
4.	9,1	20,4	29,5

Wärmewerth

	des Laurinamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	4932,1	9279,4	1846,6	100,00
2.	5920,7	9283,0	1847,3	100,04
3.	5761,2	9277,2	1846,2	99,97
4.	5398,7	9279,1	1846,5	99,99
	Mittel	9279,7	1846,7	für const. Volum
			1849,7	» » Druck
			140,8	Bildungswärme.

Myristinamid,

$$\begin{matrix} C_{13}H_{27} \\ \dot{C}O.NH_2 \end{matrix} \qquad C_{14}H_{29}NO \quad . \; . \; 227.$$

Darstellung aus reiner Myristinsäure und Phosphorpentachlorid wie beim Laurinamid.

Schmelzpunkt der Krystalle 104°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Myristinamid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,5747	17,5891	15,4010	2,1881	2507,6	5486,9
2.	0,5950	17,7404	15,4758	2,2646	2507,6	5678,7
3.	0,6004	17,0860	14,7991	2,2869	2507,6	5734,6
4.	0,6127	18,2869	15,9525	2,3344	2507,6	5853,7

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	18,0	27,1
2.	9,1	18,5	27,6
3.	9,1	19,1	28,2
4.	9,1	20,0	29,1

Wärmewerth

	des Myristinamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5459,8	9500,3	2156,6	99,98
2.	5651,1	9497,6	2155,9	99,95
3.	5706,4	9504,3	2157,5	100,02
4.	5824,6	9506,4	2157,9	100,05

Mittel 9502,1 2157,0 für const. Volum
2160,6 » » Druck
155,9 Bildungswärme.

Palmitinamid,

$\begin{matrix} C_{15}H_{31} \\ \dot{C}O.NH_2 \end{matrix}$ $C_{16}H_{33}NO_2$ . . 255.

Darstellung wie bei den beiden vorhergehenden, aus Palmitylchlorid und starkem wässrigen Ammoniak.
Schmelzpunkt der Krystalle 105,5°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Palmitinamid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,5626	17,8897	15,7063	2,1834	2507,6	5475,1
2.	0,6022	18,3184	15,9833	2,3351	2507,6	5855,5
3.	0,6003	18,0460	15,7183	2,3277	2507,6	5836,9
4.	0,6751	18,5353	15,9157	2,6196	2507,6	6568,9

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	18,3	27,4
2.	9,1	18,1	27,2
2.	9,1	17,6	26,7
4.	9,1	21,2	30,3

Wärmewerth

	des Palmitinamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100	
1.	5447,7	9683,1	2469,2	100,02	
2.	5828,3	9678,3	2468,0	99,97	
3.	5810,2	9678,8	2468,1	99,97	
4.	6538,6	9685,4	2469,7	100,04	
	Mittel	9681,4	2468,7	für const.	Volum
			2472,9	» »	Druck
			169,6	Bildungswärme.	

Benzamid,

$$\begin{matrix} C_6H_5 \\ CO.NH_2 \end{matrix} \qquad C_7H_7NO \;.\;.\;.\; 121.$$

Zu den Bestimmungen dienten zwei verschiedene Präparate, welche von zwei verschiedenen Experimentatoren (1 und 2 von R. Schmidt, 3 bis 5 von E. König) durch Einwirkung von Benzoylchlorid auf kohlensaures Ammonium dargestellt wurden. Das zu den Bestimmungen 1 und 2 verwandte Präparat wurde zunächst aus Benzol, dann mehrfach aus heissem Wasser umkrystallisirt. Zu 3 und 4 diente ein mehrfach aus Wasser krystallisirtes Präpräparat; 5 war dasselbe Präparat wie 3 und 4, nur war dasselbe, um etwa vorhandene Benzoësäure zu entfernen, noch mit Aether ausgekocht und dann wieder aus Wasser krystallisirt.

Schmelzpunkt der Krystalle 128°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Benzamid Grm.	Collodium Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a . \vartheta_n - \vartheta_1$ cal.
1.	0,8989	0,0008	18,6447	16,1235	2,5212	2507,6	6322,2
2.	0,9479	0,0007	19,0255	16,3656	2,6599	2507,6	6670,0
3.	1,0445	—	18,0743	15,4489	2,6254	2800,0	7351,1
4.	1,0368	—	18,3153	15,7093	2,6060	2800,0	7296,8
5.	1,0123	—	18,0805	15,5367	2,5438	2800,0	7122,6

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Collodium cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	17,0	2,2	28,3
2.	9,1	17,1	2,0	28,2
3.	14,6	20,5	—	35,1
4.	14,6	21,0	—	35,6.
5.	14,6	19,4	—	34,0

Wärmewerth

	des Benzamids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6293,9	7001,8	847,2	99,97
2.	6641,8	7006,8	847,8	100,04
3.	7316,0	7004,2	847,5	100,01
4.	7261,2	7003,4	847,4	100,00
5.	7088,6	7002,5	847,3	99,98
	Mittel	7003,7	847,4 für const. Volum	
			847,8 » » Druck	
			51,7 Bildungswärme.	

Die Bestimmungen des Wärmewerthes wurden von den beiden genannten Beobachtern unter ganz verschiedenen Bedingungen ausgeführt. Die dabei gewonnenen Resultate liefern einen neuen Beweis für den hohen Grad von Genauigkeit der Methode.

Ammoniumformiat,

$$\begin{matrix} H \\ \dot{C}O.ONH_4 \end{matrix} \quad CH_5NO_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 63.$$

Zur Darstellung wurde in eine ätherische Lösung von völlig wasserfreier Ameisensäure wasserfreies Ammoniak unter guter Kühlung und Umschütteln geleitet, so lange dieses noch aufgenommen wurde. Die sich ausscheidenden Krystalle des Salzes wurden mit wasserfreiem Aether gewaschen und im luftleeren Raume getrocknet.

Die Verbrennung wurde unter Zusatz von etwas reinem Campher (Wärmewerth 9291,6 cal. pro Gramm) ausgeführt.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Ammonium-formiat Grm.	Campher Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasser-werth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0668	0,0542	16,3056	15,2244	1,0812	2507,6	2711,2
2.	1,0840	0,0307	15,9883	14,9809	1,0074	2507,6	2526,2

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Campher cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	4,0	503,6	516,7
2.	9,1	3,5	285,2	297,8

Wärmewerth

	des Ammonium-formiats cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	2194,5	2057,1	129,6	100,03
2.	2228,4	2055,7	129,5	99,97
		Mittel 2056,4	129,6 für const. Volum	
			129,5 » » Druck	
			137,0 Bildungswärme.	

Formanilid,

$$\overset{H}{\dot{C}O}.N\!<^{H}_{C_6H_5} \quad C_7H_7NO \ . \ . \ 121.$$

Aequivalente Mengen Anilin und krystallisirbare Ameisensäure wurden nach dem Verfahren von Wallach und Wüsten [1]) zunächst unter stark vermindertem Drucke im Wasserbade erwärmt, bis kein Wasser mehr überging, worauf die Temperatur bis auf 250° gesteigert und kurze Zeit auf dieser Höhe erhalten wurde.

1) Ber. chem. Ges. 16, 145.

Der verbleibende Rückstand wurde in Aether gelöst und die kalte Flüssigkeit mit Petroleumäther versetzt, wobei das Formanilid gefällt wurde. Das Product wurde unter gewöhnlichem Drucke destillirt, wobei es bei 285° überging, und dann noch mehrere Male in Aether gelöst und durch Petroleumäther abgeschieden.

Schmelzpunkt der Krystalle 46°.

Die Verbrennungen wurden, wie immer, mit Präparaten verschiedener Krystallisationen ausgeführt.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Formanilid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0573	18,9639	15,9425	3,0214	2500	7553,5
2.	0,9907	18,9174	16,0848	2,8326	2500	7081,5
3.	0,9627	18,7063	15,9555	2,7508	2500	6877,0
4.	1,1037	17,8031	14,6472	3,1559	2500	7889,7

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	21,0	30,1
2.	9,1	22,4	31,5
3.	9,1	21,8	30,9
4.	9,1	23,0	32,1

Wärmewerth

	des Formanilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7523,4	7115,7	861,0	100,00
2.	7050,0	7116,2	861,1	100,01
3.	6846,1	7111,4	860,5	99,94
4.	7857,6	7119,3	861,4	100,05
Mittel		7115,6	861,0 für const. Volum	
			861,4 » » Druck	
			38,1 Bildungswärme.	

Acetanilid,

$\overset{CH_3}{\dot{C}O} . N \langle {}^{H}_{C_6 H_5} \quad C_8 H_9 NO$ . . 135.

Käufliches Acetanilid wurde fractionirt und der constant bei 295° übergehende Antheil mehrfach aus Aether umkrystallisirt. Zu den Bestimmungen 1 und 2, 3, 4 und 5 dienten drei verschiedene Krystallisationen.

Schmelzpunkt der Krystalle 112°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Acetanilid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,8815	18.8661	16,2198	2,6463	2500	6615,7
2.	0,9484	18,6997	15,8510	2,8487	2500	7121,7
3.	0,8181	18,2732	15,8151	2,4581	2500	6145,2
4.	0,8670	18,4704	15,8640	2,6064	2500	6516,0
5.	0,8400	18,1328	15,6075	2,5253	2500	6313,2

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	16,5	25,6
2.	9,1	17,9	27,0
3.	9,1	15,2	24,3
4.	9,1	16,0	25,1
5.	9,1	16,3	25,4

Wärmewerth

	des Acetanilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6590,1	7476,0	1009,3	99,92
2.	7094,7	7480,7	1009,9	99,98
3.	6120,9	7481,8	1010,0	100,00
4.	6490,9	7486,6	1010,7	100,06
5.	6287,8	7485,5	1010,5	100,05
	Mittel	7482,1	1010,1 für const. Volum	
			1010,8 » » Druck	
			51,7 Bildungswärme.	

Propionanilid,

$$\underset{CO\,.\,N<^{H}_{C_6H_5}}{\overset{C_2H_5}{\dot{}}}\qquad C_9H_{11}NO\ .\ .\ 149.$$

Zur Darstellung wurde Propionamid mit der berechneten Menge Anilin acht Stunden lang erhitzt, bis kein Ammoniak mehr entwickelt wurde. Die ausgegossene erstarrte Masse wurde abgepresst und mehrfach aus Aether umkrystallisirt.

Schmelzpunkt der Krystalle 105,5°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Propionanilid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
1.	1,0052	17,9480	14,7891	3,1589	2500	7897,2
2.	1,0365	18,6446	15,3850	3,2596	2500	8149,0
3.	0,8883	17,6379	14,8431	2,7948	2500	6987,0
4.	0,9166	18,3479	15,4668	2,8811	2500	7202,7

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	18,0	27,1
2.	9,1	18,2	27,3
3.	9,1	18,1	27,2
4.	9,1	18,7	27,8

Wärmewerth

	des Propionanilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7870,1	7829,4	1166,6	99,97
2.	8121,7	7835,7	1167,5	100,05
3.	6959,8	7835,0	1167,4	100,04
4.	7174,9	7827,7	1166,3	99,95
	Mittel	7831,9	1167,0 für const. Volum	
			1168,0 » » Druck	
			57,5 Bildungswärme.	

Normales Butyranilid,

$$\overset{C_3H_7}{CO} . N<^{H}_{C_6H_5} \quad C_{10}H_{13}NO \ . \ . \ 163.$$

Dargestellt durch Erhitzen von Butyramid mit der berechneten Menge von Anilin bis zum Aufhören der Ammoniakentwicklung, wozu eine Erhitzungsdauer von zwei Tagen erforderlich war. Krystallisation aus verdünntem Alkohol.

Schmelzpunkt der Krystalle 95°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Butyranilid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,8718	18,5500	15,7093	2,8407	2500	7101,7
2.	0,8775	18,8018	15,9415	2,8603	2500	7150,7
3.	0,6966	18,8620	16,5920	2,2700	2500	5675,0
4.	0,6990	18,9275	16,6485	2,2790	2500	5697,5

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	16,8	25,9
2.	9,1	16,7	25,8
3.	9,1	14,4	23,5
4.	9,1	14,6	23,7

Wärmewerth

	des Butyranilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7075,8	8116,3	1323,0	100,00
2.	7124,9	8119,5	1323,5	100,04
3.	5651,5	8113,0	1322,4	99,96
4.	5673,8	8117,0	1323,1	100,01
	Mittel	8116,4	1323,0 für const. Volum	
			1324,3 » » Druck	
			64,2 Bildungswärme.	

Laurinanilid,

$\begin{matrix} C_{11}H_{23} \\ \dot{C}O\,.\,N\!<\!{}^{H}_{C_6H_5} \end{matrix}$ $C_{18}H_{29}NO$ . . 275.

Darstellung: Durch zehnstündiges Kochen der reinen Säure mit überschüssigem Anilin. Beim Erkalten erstarrt die Masse zu einem Conglomerat feiner Nadeln. Nach Beseitigung des überschüssigen Anilins mit verdünnter Salzsäure wurde das Anilid mehrfach aus Weingeist umkrystallisirt.

Feine, seidenglänzende Nadeln von 77° Schmelzpunkt.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Laurinanilid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,7294	18,5675	15,8341	2,7334	2507,6	6854,3
2.	0,6856	18,6039	16,0340	2,5699	2507,6	6444,3
3.	0,7590	18,4296	15,5836	2,8460	2507,6	7136,6
4.	0,6522	17,3948	14,9480	2,4468	2507,6	6135,6
5.	0,6611	17,5594	15,0817	2,4777	2507,6	6213,1

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	18,1	27,2
2.	9,1	17,0	26,1
3.	9,1	20,0	29,1
4.	9,1	16,3	25,4
5.	9,1	16,3	25,4

Wärmewerth

	des Laurinanilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6827,1	9359,9	2574,0	99,97
2.	6418,2	9361,4	2574,4	99,99
3.	7107,5	9364,3	2575,2	100,02
4.	6110,2	9368,5	2576,3	100,06
5.	6187,7	9359,7	2573,9	99,97
	Mittel	9362,8	2574,8 für const. Volum	
			2578,4 » » Druck	
			114,1 Bildungswärme.	

Myristinanilid,

$$\overset{C_{13}H_{27}}{CO} . N\!<^{H}_{C_6H_5} \quad C_{20}H_{33}NO_2 \; . \; . \; 303.$$

Darstellung wie beim Laurinanilid. Aus verdünntem Alkohol krystallisirt.

Schmelzpunkt der Krystalle 84,5°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Myristinanilid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,7844	18,4639	15,4698	2,9941	2507,6	7508,0
2.	0,7991	19,1023	16,0560	3,0463	2507,6	7638,9
3.	0,6888	18,5599	15,9316	2,6283	2507,6	6590,7
4.	0,5194	18,1999	16,2178	1,9821	2507,6	4970,3
5.	0,6197	18,4526	16,0887	2,3639	2507,6	5927,7

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	22,4	31,5
2.	9,1	19,3	28,4
3.	9,1	17,4	26,5
4.	9,1	13,3	22,4
5.	9,1	15,1	24,2

Wärmewerth

	des Myristinanilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7476,5	9531,5	2888,0	100,03
2.	7610,5	9523,8	2885,7	99,95
3.	6564,2	9529,9	2887,6	100,01
4.	4947,9	9531,7	2888,1	100,03
5.	5903,5	9526,4	2886,5	99,98
	Mittel	9528,7	2887,2	für const. Volum
			2891,4	» » Druck
			127,1	Bildungswärme.

Palmitinanilid,

$$\begin{matrix} C_{15}H_{31} \\ CO\,.\,N{<}^{H}_{C_6H_5} \end{matrix} \quad C_{22}H_{37}NO\ .\ .\ 331.$$

Darstellung wie beim Laurinanilid. Das vom überschüssigen Anilin durch Behandlung mit verdünnter Salzsäure befreite Rohproduct wurde bei 17 mm Druck destillirt, wobei dasselbe zwischen 282° und 284° überging. Die destillirte Masse wurde mehrfach aus verdünntem Alkohol krystallisirt.

Feine Nadeln von 90° bis 90,5° Schmelzpunkt.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Palmitinanilid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,7392	18,5703	15,7093	2,8610	2507,6	7174,2
2.	0,7057	18,6571	15,9257	2,7314	2507,6	6849,3
3.	0,6814	18,0767	15,4399	2,6368	2507,6	6612,0
4.	0,7048	18,4069	15,6784	2,7285	2507,6	6842,0

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	18,5	27,6
2.	9,1	17,4	26,5
3.	9,1	16,8	25,9
4.	9,1	17,5	26,6

Wärmewerth

	des Palmitinanilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7146,6	9668,0	3200,1	100,00
2.	6822,8	9668,1	3200,1	100,00
3.	6586,1	9665,5	3199,3	99,98
4.	6815,4	9669,9	3200,7	100,02
	Mittel	9667,9	3200,1 für const. Volum	
			3204,9 » » Druck	
			139,6 Bildungswärme.	

Benzanilid,

C_6H_5
$CO.N{<}^{H}_{C_6H_5}$ $C_{13}H_{11}NO$ . . 197.

Zur Darstellung (E. König) wurde eine ätherische Lösung von Anilin vorsichtig mit Benzoylchlorid versetzt und die sich abscheidende Verbindung mehrfach aus Alkohol umkrystallisirt.

Schmelzpunkt der Krystalle 161° bis 162°.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Benzanilid Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0478	18,6393	15,6345	3,0048	2800	8413,4
2.	0,9869	18,5755	15,7453	2,8302	2800	7924,7
3.	0,9923	18,7159	15,5287	3,1872	2500	7968,0
4.	1,1022	19,0422	15,8849	3,1573	2800	8840,4

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	14,6	18,0	32,6
2.	14,6	18,5	33,1
3.	14,6	17,5	32,1
4.	14,6	16,5	31,1

Wärmewerth

	des Benzanilids cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	8380,8	7998,5	1575,7	100,03
2.	7891,6	7996,4	1575,3	100,00
3.	7935,9	7997,5	1575,5	100,02
4.	8809,3	7992,6	1574,6	99,95
	Mittel	7996,2	1575,3 für const. Volum	
			1576,3 » » Druck	
			25,2 Bildungswärme.	

Uebersicht
der Wärmewerthe und der Bildungswärmen
bei constantem Druck.

		Mol.-Gew. Grm.	Wärme-werth Cal.	Bildungs-wärme Cal.
Amide:				
Formamid (flüssig) ...	$C\,H_3\,NO$	45	134,9	62,6
Acetamid	$C_2\,H_5\,NO$	59	282,7	77,8
Propionamid	$C_3\,H_7\,NO$	73	439,8	83,7
Norm. Butyramid	$C_4\,H_9\,NO$	87	596,1	90,4
Iso-Butyramid	$C_4\,H_9\,NO$	87	596,0	90,5
Iso-Valeramid	$C_5\,H_{11}NO$	101	751,6	97,9
Laurinamid	$C_{12}H_{25}NO$	199	1849,7	140,8
Myristinamid	$C_{14}H_{29}NO$	227	2160,6	155,9
Palmitinamid	$C_{16}H_{33}NO$	255	2472,9	169,6
Benzamid	$C_7\,H_7\,NO$	121	847,8	51,7
Ammoniumformiat ...	$C\,H_5\,NO_2$	63	129,5	137,0
Anilide:				
Formanilid	$C_7\,H_7\,NO$	121	861,4	38,1
Acetanilid	$C_8\,H_9\,NO$	135	1010,8	51,7
Propionanilid	$C_9\,H_{11}NO$	149	1168,0	57,5
Norm. Butyranilid ...	$C_{10}H_{13}NO$	163	1324,3	64,2
Laurinanilid	$C_{18}H_{29}NO$	275	2578,4	114,1
Myristinanilid	$C_{20}H_{33}NO$	303	2891,4	127,1
Palmitinanilid	$C_{22}H_{37}NO$	331	3204,9	139,6
Benzanilid	$C_{13}H_{11}NO$	197	1576,3	25,2

Abgeleitete Resultate.

1. Isomerie.

Bei den einbasischen gesättigten aliphatischen Säuren hat sich gezeigt (Abhdlg. XXX[1]), dass die isomeren Säuren dieser Reihe in ihren Wärmewerthen wesentlich gleich sind, oder dass wenigstens die Verschiedenheiten, wenn solche vorhanden sind, die Grösse der Beobachtungsfehler nicht übersteigen. Das Gleiche gilt auch für die Amide dieser Säurereihe. Wir haben:

Normales Butyramid . . . . 596,1 Cal.
Iso-Butyramid . . . . 596,0 „

1) Ber. kön. sächs. Ges. d. W. 1893, S. 626.

Auf die Isomerie des Benzamids und Formanilids wird später S. 30 zurückzukommen sein.

2. Homologie.

Die homologen Verbindungen zeigen, sowohl in der Reihe der Amide, wie in der der Anilide, ganz gleiches thermisches Verhalten wie die einbasischen gesättigten aliphatischen Säuren, wie aus folgender Zusammenstellung hervorgeht:

Amide:		Cal.	
Formamid (flüssig) .	$C\,H_3\,NO$	134,9	
			147,8
Acetamid	$C_2\,H_5\,NO$	282,7	
			157,1
Propionamid	$C_3\,H_7\,NO$	439,8	
			156,3
Butyramid	$C_4\,H_9\,NO$	596,1	
			155,5
Valeramid	$C_5\,H_{11}NO$	651,6	
			156,9 · 7
Laurinamid	$C_{12}H_{25}NO$	1849,7	
			155,5 · 2
Myristinamid. . . .	$C_{14}H_{29}NO$	2160,6	
			156,2 · 2
Palmitinamid	$C_{16}H_{33}NO$	2472,9	

Anilide:		Cal.	
Formanilid.	$C_7\,H_7\,NO$	861,4	
			149,4
Acetanilid	$C_8\,H_9\,NO$	1010,8	
			157,2
Propionanilid . . .	$C_9\,H_{11}NO$	1168,0	
			156,3
Butyranilid.	$C_{10}H_{13}NO$	1324,3	
			156,8 · 8
Laurinanilid	$C_{18}H_{29}NO$	2578,4	
			156,5 · 2
Myristinanilid . . .	$C_{20}H_{33}NO$	2891,4	
			155,3 · 2
Palmitinanilid . . .	$C_{22}H_{37}NO$	3204,9	

Ebenso wie bei den Säuren, so verhält sich auch hier in beiden Reihen das erste Glied weit abweichend von den übrigen. Beim Formamid ist zu berücksichtigen, dass dasselbe nur im flüssigen Zustande bekannt ist, während alle übrigen Verbindungen fest sind. Würde man die Schmelzwärme desselben in Abzug bringen, so würde unzweifelhaft die kleine Verschiedenheit von 147,8 und 149,4, welche einerseits zwischen Formamid und Acetamid und andererseits zwischen Formanilid und Acetanilid besteht, völlig zum Verschwinden kommen, da die Schmelzwärme des Formamids 2 Cal. nicht übersteigen kann. In der Säurereihe hatte sich, von der festen Essigsäure bis zur Behensäure, für jedes einzelne Glied derselben ein Zuwachs von 156,6 Cal. ergeben (Abhdlg. XXX). Nimmt man

diese Zahl auch für die Reihe der Amide und Anilide als maßgebend an, so berechnen sich für die hier in Betracht kommenden Verbindungen folgende Werthe:

	Berechnet Cal.	Gefunden Cal.	Berechnet = 100
Amide:			
Acetamid	282,7	282,7	
Propionamid . . .	439,3	439,8	100,11
Butyramid	595,9	596,1	100,03
Valeramid	752,5	751,6	99,88
Laurinamid	1848,7	1849,7	100,05
Myristinamid . . .	2160,9	2160,6	99,94
Palmitinamid . . .	2475,1	2472,9	99,91
Anilide:			
Acetanilid	1010,8	1010,8	
Propionanilid . . .	1167,4	1168,0	100,05
Butyranilid	1324,0	1324,3	100,02
Valeranilid	1480,6		
Laurinanilid. . . .	2576,8	2578,4	100,06
Myristinanilid . . .	2890,0	2891,4	100,05
Palmitinanilid. . .	3203,2	3204,9	100,05

Im Mittel verhalten sich die berechneten zu den gefundenen Werthen wie 100:100,014. Die grössten Abweichungen betragen nach der einen Seite 99,88 und nach der anderen Seite 100,06, sie fallen in die Grösse der vorkommenden Beobachtungsfehler.

Der Durchschnittswerth von 156,6 Cal. hat daher hier die gleiche Berechtigung wie in der Säurereihe. Vergleicht man in der Säurereihe die Werthe für feste Essigsäure und feste Propionsäure, so ergiebt sich hier die Differenz von 157,3 Cal. Ganz analoge Differenzen zeigen die entsprechenden Amide (157,1 Cal.) und Anilide (157,2 Cal.).

So lange diese Differenz nur in der Säurereihe bekannt war, musste dieselbe unbeachtet bleiben, da sie nicht weit aus dem Bereiche der unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegt. Da sie sich aber in ganz gleicher Weise in zwei anderen Reihen wiederfindet, so kann die Richtigkeit derselben kaum noch angezweifelt werden und man muss zu dem Schlusse kommen, dass nicht allein das erste, sondern auch das zweite Glied der homologen Reihe gewisse Unregelmässigkeiten zeige und ein ganz gleichmässiges Ansteigen erst bei den höheren Gliedern erfolge.

Zu ganz gleichem Resultate ist Eijkman[1]) in Bezug auf das Refractionsvermögen in den homologen Reihen der Amide, Ketone, Paraffine, Alkohole und Säuren gekommen. Ganz gleiche Verhältnisse wies auch Perkin[2]) für die magnetische Circular-Polarisation nach. Es ist damit eine neue Uebereinstimmung zwischen dem durch die Verbrennungswärme gemessenen Energiegehalte und den physikalischen Eigenschaften der organischen Substanzen gewonnen.

In der Reihe der Grenzkohlenwasserstoffe, sowie in der Reihe der Alkohole sind ähnliche Differenzen der ersten Glieder bislang nicht erkannt.

Methanreihe	nach Jul. Thomsen[3]): Cal.		nach Berthelot[4]): Cal.	
Methan	211,9		213,5	
		158,5		158,8
Aethan	370,4		372,3	
		158,8		156,1
Propan	529,2		528,4	
		158,0		
Trimethylmethan	687,2		—	

Alkoholreihe:

	Cal.	
Methylalkohol (Stohmann[5])	170,6	
		155,1
Aethylalkohol (Berthelot[6])	325,7	
		154,6
Propylalkohol (Longuinine[7])	480,3	
		156,4
Isobutylalkohol (Longuinine[8])	636,7	

Die Methane und Alkohole unterscheiden sich daher in dieser Beziehung wesentlich von den Säuren, den Amiden und Aniliden. Während die Ameisensäure, deren Amid und Anilid angenähert um 147 Cal. tiefer liegen als die Essigsäure und deren Derivate, so sind die Methane und Alkohole schon in den ersten Gliedern als thermisch homolog zu bezeichnen.

3. Beziehungen der Amide und Anilide.

Die Anilide unterscheiden sich von den Amiden dadurch, dass in ihnen die Phenylgruppe C_6H_5 an Stelle eines Wasser-

1) Recueil des traveaux chimiques des Pays-Bas 12, 157.
2) Journ. f. prakt. Chem. [2] 32, 587.
3) Thermochem. Unters. 4, 221.
4) Annal. Chim. Phys. [6] 30, 547.
5) Journ. f. prakt. Chem. [2] 40, 343.
6) Ann. Chim. Phys. [6] 27, 312.
7) Ann. Chim. Phys. [5] 21, 140.
8) Daselbst S. 141.

stoffatoms der NH_2-Gruppe getreten ist. Die hierdurch hervorgebrachte Wärmetönung findet durch folgende Vergleiche ihren Zahlenausdruck:

	Cal.	
Formamid (flüssig)	134,9	726,5
Formanilid (fest)	861,4	
Acetamid	282,7	728,1
Acetanilid	1010,8	
Propionamid	439,8	728,2
Propionanilid	1168,0	
Butyramid	596,1	728,2
Butyranilid	1324,3	
Valeramid	751,6	729,0
Valeranilid	1480,6	
Laurinamid	1849,7	728,7
Laurinanilid	2578,4	
Myristinamid	2160,6	730,8
Myristinanilid	2891,4	
Palmitinamid	2472,9	732,0
Palmitinanilid	3204,9	
Benzamid	847,8	728,5
Benzanilid	1576,3	

Sehen wir von dem ersten Beispiele ab, da das flüssige Formamid sich nicht streng mit dem festen Formanilid vergleichen lässt, so ist der Uebergang der Amide in Anilide durchschnittlich mit einem Wärmezuwachse von 729,3 Cal. verbunden, wobei das Maximum von 8 Beobachtungen 732,0, das Minimum 728,1 Cal. beträgt.

4. Bildung der Anilide aus den Amiden und Benzol.

Die Bildung der Anilide kann durch Vereinigung von je 1 Mol. der Amide mit 1 Mol. Benzol unter Austritt von 1 Mol. Wasserstoff gedacht werden, wobei je 1 At. des Wasserstoffmoleküles aus der NH_2-Gruppe, das andere Atom aus dem Benzolkerne austritt und beide sich zu einem Wasserstoffmoleküle vereinen.

Gehen wir vom festen Acetamid und festen Benzol aus, so haben wir:

Acetamid	282,7 Cal.
Benzol	777,3 »
	1060,0 Cal.
Acetanilid	1010,8 »
	— 49,2 Cal.

Der Wärmewerth des Endproductes liegt daher um 49,2 Cal. tiefer als der der reagirenden Stoffe. Die bei sämmtlichen untersuchten Gliedern sich ergebenden Werthe sind folgende:

Acetanilid	— 49,2 Cal.
Propionanilid	— 49,1 »
Butyranilid	— 49,1 »
Valeranilid.	— 48,3 »
Laurinanilid	— 48,6 »
Myristinanilid	— 46,5 »
Palmitinanilid	— 45,3 »
Benzanilid	— 48,8 »

In Abhandlung XXXI [1]) hatten wir Gelegenheit, bei der Bildung der Di- und Triglycolaminsäure aus Glycolaminsäure und Essigsäure einen ganz analogen Process zu studiren. Derselbe verläuft ebenso wie hier: unter Austritt von 1 Mol. Wasserstoff, von dem 1 At. an Stickstoff, das andere an Kohlenstoff gebunden war. Die Differenz der Wärmewerthe der Endproducte im Vergleiche zu den Ausgangsmaterialien betrug dort im Mittel — 44,0 Cal., während die mittlere Differenz hier — 48,1 Cal. beträgt. Unter Berücksichtigung des Energiegehaltes des austretenden gasigen Wasserstoffs, während alle übrigen Körper fest sind, ergeben sich folgende Bildungsgleichungen:

$$C_2H_5NO + C_6H_6 = C_8H_9NO + H_2 - 19,8$$
$$C_3H_7NO + C_6H_6 = C_9H_{11}NO + H_2 - 19,1$$
$$C_4H_9NO + C_6H_6 = C_{10}H_{13}NO + H_2 - 19,1$$
$$C_5H_{11}NO + C_6H_6 = C_{11}H_{15}NO + H_2 - 20,7$$
$$C_{12}H_{25}NO + C_6H_6 = C_{18}H_{29}NO + H_2 - 20,4$$
$$C_{14}H_{29}NO + C_6H_6 = C_{20}H_{33}NO + H_2 - 22,5$$
$$C_{16}H_{33}NO + C_6H_6 = C_{22}H_{37}NO + H_2 - 23,7$$
$$C_7H_7NO + C_6H_6 = C_{13}H_{11}NO + H_2 - 20,2$$

---

1) Ber. kön. sächs. Ges. d. W. 1894, S. 49.

Das Anfangssystem enthält daher um durchschnittlich 20,7 Cal. weniger Energie als das Endsystem. Bei den Glycolaminsäuren betrug diese Differenz im Mittel 25,0 Cal.

5. Isomerie des Formanilids und Benzamids.

Formanilid und Benzamid, beide von gleicher Zusammensetzung, zeigen sehr verschiedene Wärmewerthe:

	Cal.	
Formanilid	861,4	13,6 Cal.
Benzamid	847,8	

Es finden hier die gleichen Verschiedenheiten statt, wie schon früher bei anderen gleichzusammengesetzten Verbindungen beobachtet:

Sarkosin	401,2	13,5 Cal.
Alanin	387,7	
Diglycolaminsäure	396,3	11,1 Cal.
Asparaginsäure	385,2	

Die Ursachen dieser Verschiedenheiten sind überall dieselben. Im Formanilid ist die Phenylgruppe, im Sarkosin die Methylgruppe, in der Diglycolaminsäure ist die $CH_2 . COOH$-Gruppe an ein *Stickstoffatom* gebunden, während im Benzamid, im Alanin, in der Asparaginsäure die gleichen Gruppen an ein *Kohlenstoffatom* gelagert sind.

6. Thermischer Werth des Phenyls bei der Bindung an Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff.

a. Bindung an Kohlenstoff.

Formanilid geht in Benzanilid über, indem der Wasserstoff des Formyls durch Phenyl ersetzt wird. Auf gleiche Weise wird Ameisensäure in Benzoësäure verwandelt. Benzol geht in Diphenyl über, indem ein Benzolwasserstoff durch Phenyl ersetzt wird.

Diesem entsprechen folgende thermische Reactionen:

	Cal.	
Formanilid	861,4	714,9 Cal.
Benzanilid	1576,3	

	Cal.	
Ameisensäure (fest)	59,0	712,7 Cal.
Benzoësäure	771,7	
Benzol (fest)	777,3	717,0 »
Diphenyl	1494,3	

Hiernach wird der Wärmewerth einer Verbindung, wenn C_6H_5 unter Ersatz eines Wasserstoffatomes sich an ein Kohlenstoffatom lagert, um durchschnittlich 714,9 Cal. erhöht.

Jedoch muss bemerkt werden, dass von dieser Regel zahlreiche Ausnahmen existiren, worauf bei späterer Gelegenheit zurückzukommen sein wird. Doch mag bereits hier erwähnt werden, dass diese Ausnahmen nie einen so hohen Werth erreichen, um dem für die Stickstoffbindung gefundenen Werthe gleich zu kommen.

b. Bindung an Stickstoff.

Die hier massgebenden Verhältnisse ergeben sich aus dem oben S. 27 gezogenen Vergleiche der Amide und Anilide, welche, für den Eintritt der in Stickstoffbindung tretenden Phenylgruppe, einen Zuwachs von durchschnittlich 729,3 Cal. ergaben.

c. Bindung an Sauerstoff.

	Cal.	
Methylalkohol	170,6	734,9
Anisol	905,5	
Aethylalkohol	325,7	731,5
Phenetol	1057,2	
Propylalkohol	480,3	733,1
Phenylpropyläther	1213,4	
Benzoësäure	771,7	733,5
Benzoësäure-Phenyläther	1505,2	
Glycolsäure	166,7	736,3
Phenoxylessigsäure	903,0	

Im Durchschnitt beträgt daher hier die Wärmetönung 733,9 Cal.

Stellen wir die Werthe für die Phenylgruppe zusammen

und vergleichen wir dieselben mit den in Abhdlg. XXXII [1]) für die Methyl- und die $CH_2.COOH$-Gruppe gefundenen Werthen:

	C_6H_5	CH_3	$CH_2.COOH$
An C	711,9	156,6	150,9
An N	729,3	166,6	162,7
An O	733,9	171,7	170,8

so ergeben sich überall gleiche Beziehungen: das gleiche Radical erhöhet den Energiegehalt der Verbindung, in welche es eintritt, in sehr ungleichem Maasse, je nachdem es sich an ein Kohlenstoff-, Stickstoff- oder Sauerstoffatom anlagert.

7. Bildung des Ammoniumformiates und der Amide.

Ammoniak vereint sich unmittelbar mit Ameisensäure zu ameisensaurem Ammonium, wobei es unter erheblichem Wärmeverlust seine chemische Energie abgiebt und in den festen Zustand übergeht. Durch Vergleichung des Wärmewerthes der Ameisensäure und des Ammoniumformiates, beide im festen Zustande, erhalten wir daher den Werth des hypothetisch festen, neutralen Ammoniaks, so wie es in den Ammoniumsalzen enthalten ist:

	Cal.
Ammoniumformiat	129,5
Ameisensäure (fest)	59,0
Hypothetisch festes, neutrales Ammoniak .	70,5

Auf ganz anderem Wege haben wir früher (Abhdlg. XXXI [2]) den Wärmewerth derselben Verbindung zu 71,9 Cal. ermittelt. Leider ist das Ammoniumformiat das einzige Ammoniumsalz der aliphatischen Säuren, welches in fester, wasserfreier Form darzustellen ist, da alle übrigen, selbst bei dem S. 11 angegebenen Verfahren, nur als schmierige, nicht für die Untersuchung geeignete Massen erhalten werden.

Die Amide bilden sich aus den Ammoniumsalzen unter Abspaltung der Elemente von 1 Mol. Wasser. Nach Analogie gleicher Vorgänge ist dabei eine Aufspeicherung von Energie zu erwarten. Wie weit dieses zutrifft, ergiebt sich aus folgenden Zahlen:

1) Ber. kön. sächs. Ges. d. W. 1894, S. 218.
2) Ber. kön. sächs. Ges. d. W. 1894, S. 52.

	Cal.
Ammoniumformiat (fest)	129,5
Formamid (flüssig)	134,9
	+ 5,4

Hierbei ist allerdings zu berücksichtigen, dass das Formamid nur flüssig existirt und daher einen strengen Vergleich mit dem Ammoniumformiat nicht zulässt. Man möge aber die Schmelzwärme, innerhalb vernünftiger Grenzen, so hoch annehmen wie man wolle, so kann sie den Werth von 2 Cal. nicht übersteigen. Es bleibt daher die Bildung des Formamids immer ein endothermer Process.

Unter Annahme des oben für das hypothetisch feste Ammoniak mit einem Wärmewerthe von 70,5 resp. 71,9 Cal. und der Energieaufspeicherung von 5,4 Cal. lässt sich daher vorhersagen, dass die Amide um 75,9 bis 77,3 Cal. höher liegen werden als die zugehörigen Säuren, wie durch folgende Zahlenreihe bewiesen wird:

	Cal.	
Ameisensäure (flüssig)	61,7	73,2
Formamid (flüssig)	134,9	
Essigsäure (fest)	206,7	76,0
Acetamid (fest)	282,7	
Propionsäure	364,0	75,8
Propionamid	439,8	
Buttersäure	520,4	75,7
Butyramid	596,1	
Valeriansäure	677,2	74,4
Valeramid	751,6	
Laurinsäure	1771,8	77,9
Laurinamid	1849,7	
Myristinsäure	2085,9	74,7
Myristinamid	2160,6	
Palmitinsäure	2398,4	74,5
Palmitinamid	2472,9	
Benzoësäure	771,7	76,1
Benzamid	847,8	

Im Mittel der neun Bestimmungen liegt daher der Wärmewerth der Amide um 75,9 Cal. höher als der der zugehörigen Säuren. In einer früheren Arbeit (Abhdlg. XXV)[1] hatten wir auf Grund unserer Untersuchung des Asparagins und der von Berthelot und Fogh ermittelten Werthe des Acet-, Propion- und Benzamids den mittleren Werth dieser Reaction zu 78,6 Cal. berechnet.

Geht man bei der Bildung der Amide von gasförmigem Ammoniak mit dem Wärmewerthe von 90,6 Cal. und den Werthen der Säuren wie oben aus, so wird der Process ein stark exothermer, wie folgende Gleichungen zeigen:

$$C\,H_2\,O_2 + NH_3 = C\,H_3\,NO + H_2O + 17,4$$
$$C_2\,H_4\,O_2 + NH_3 = C_2\,H_5\,NO + H_2O + 14,6$$
$$C_3\,H_6\,O_2 + NH_3 = C_3\,H_7\,NO + H_2O + 14,8$$
$$C_4\,H_8\,O_2 + NH_3 = C_4\,H_9\,NO + H_2O + 14,9$$
$$C_5\,H_{10}O_2 + NH_3 = C_5\,H_{11}NO + H_2O + 16,2$$
$$C_{12}H_{24}O_2 + NH_3 = C_{12}H_{25}NO + H_2O + 12,7$$
$$C_{14}H_{28}O_2 + NH_3 = C_{14}H_{29}NO + H_2O + 15,9$$
$$C_{16}H_{32}O_2 + NH_3 = C_{16}H_{33}NO + H_2O + 16,1$$
$$C_7\,H_6\,O_2 + NH_3 = C_7\,H_7\,NO + H_2O + 14,5$$

Die hier sich geltend machende Wärmeentwicklung setzt sich aber aus drei verschiedenen Wirkungen zusammen. Sie beruht darauf, dass bei diesem Processe das Ammoniak seine Dampfform und seine chemische Energie verliert, dagegen das zuerst entstehende Ammoniumsalz unter Aufspeicherung von Energie in Amid übergeht. Unter Berücksichtigung dieser drei Factoren würde der Process wie oben endotherm verlaufen.

8. Bildung der Anilide.

Vergleichen wir die Wärmewerthe der Anilide mit denen der Säuren, ebenso wie es S. 33 bei den Amiden geschehen ist, so ergeben sich folgende Beziehungen:

Ameisensäure (fest)	59,0	802,4
Formanilid (fest)	861,4	
Essigsäure	206,7	804,1
Acetanilid	1010,8	

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] 44, 395.

Propionsäure	364,0	804,0
Propionanilid	1168,0	
Buttersäure	520,4	803,9
Butyranilid	1324,3	
Valeriansäure	677,2	803,4
Valeranilid	1480,6	
Laurinsäure	1771,8	806,6
Laurinanilid	2578,4	
Myristinsäure	2085,9	805,5
Myristinanilid	2891,4	
Palmitinsäure	2398,4	806,5
Palmitinanilid	3204,9	
Benzoësäure	771,7	804,6
Benzanilid	1576,3	

Im Durchschnitt wird daher der Wärmewerth der Säuren durch den Uebergang in Anilide um 804,6 Cal. erhöhet, wobei die äussersten Abweichungen + 2,2 und — 2,2 Cal. betragen.

Zur Berechnung der Bildungswärme der Anilide aus den Säuren und Anilin ist der Wärmewerth des flüssigen Anilins zu verwenden. Derselbe beträgt nach unseren Bestimmungen, über deren Einzelheiten bei der Besprechung der Anilide der zweibasischen Säuren berichtet werden wird, 809,3 Cal.

Führt man die Rechnungen durch, so ergeben sich folgende Bildungswärmen:

$$C\,H_2\,O_2 + C_6H_7N = C_7\,H_7\,NO + H_2O + 6{,}9 \text{ Cal.}$$
$$C_2\,H_4\,O_2 + C_6H_7N = C_8\,H_9\,NO + H_2O + 5{,}2 \text{ »}$$
$$C_3\,H_6\,O_2 + C_6H_7N = C_9\,H_{11}NO + H_2O + 5{,}3 \text{ »}$$
$$C_4\,H_8\,O_2 + C_6H_7N = C_{10}H_{13}NO + H_2O + 5{,}4 \text{ »}$$
$$C_5\,H_{10}O_2 + C_6H_7N = C_{11}H_{15}NO + H_2O + 5{,}9 \text{ »}$$
$$C_{12}H_{24}O_2 + C_6H_7N = C_{18}H_{29}NO + H_2O + 2{,}7 \text{ »}$$
$$C_{14}H_{28}O_2 + C_6H_7N = C_{20}H_{33}NO + H_2O + 3{,}8 \text{ »}$$
$$C_{16}H_{32}O_2 + C_6H_7N = C_{22}H_{37}NO + H_2O + 2{,}8 \text{ »}$$
$$C_7\,H_6\,O_2 + C_6H_7N = C_{13}H_{11}NO + H_2O + 4{,}7 \text{ »}$$

Die mittlere Bildungswärme beträgt daher + 4,7 Cal. Sie ist daher wie die der Amide aus gasigem Ammoniak und Säuren

exotherm. Während die der Amide aber im Durchschnitt 15,2 Cal. beträgt, liegt sie bei den Aniliden um 10,5 Cal. niedriger. Es erklärt sich dieses vollkommen aus der geringeren chemischen Energie des Anilins gegenüber dem Ammoniak (vergl. Berthelot)[1]. Nach Jul. Thomsen[2] liegt die Neutralisationswärme des Anilins um 9,7 Cal. tiefer als die des Ammoniaks. Dazu kommt noch, dass bei der Bildung der Amide das Ammoniak im gasigen Zustande genommen ist, wofür, um es mit flüssigem Anilin vergleichen zu können, noch die Dampfwärme in Abzug zu bringen sein würde. Diese beträgt nach Strombeck[3] 5,4 Cal. Ob unter Berücksichtigung dieses Umstandes die Bildungswärme der Anilide aus Anilinsalzen endotherm wird, darüber werden weitere Untersuchungen entscheiden. Dagegen spricht das Verhalten des Anilinformiates, welches, nach Tobias[4], schon in der Kälte freiwillig in das Anilid übergeht.

1) Ann. Chim. Phys. [6] **21**, 355.
2) Therm. chem. Unters. **1**, 408.
3) Beiblätter Phys. **15**, 504.
4) Ber. chem. Ges. **15**, 2867.

W. Ostwald, *Ueber das Prinzip des ausgezeichneten Falles.*

Wenn ich wiederum auf diesen Gegenstand zurückkomme, so geschieht es, um einer Pflicht der geschichtlichen Gerechtigkeit zu genügen. Durch die Güte des Herrn Verfassers ist mir die von J. Petzoldt im Jahre 1891 verfasste, und in der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie im gleichen Jahre veröffentlichte Abhandlung: *Maxima, Minima und Oekonomie* zu Händen gekommen, welche mir bisher nicht bekannt war, und in welcher das fragliche Prinzip in wesentlich demselben Sinne ausgesprochen ist, in welchem ich es viel später veröffentlicht habe. Nur in der Stellung, welche es im Rahmen der Gesammtwissenschaft einnimmt, liegt ein gewisser Unterschied der beiden Darstellungen vor. Während mein Vorgänger auf dem Boden der klassischen Mechanik steht, und ihm daher das Prinzip im Rahmen derselben als eine Zusammenfassung von Vorhandenem, durch die Grundsätze der Mechanik bereits Gegebenem erscheint (S. 10), ist es mir ein *nothwendiger* Bestandtheil des auf die Mechanik bezüglichen Gebietes der Energetik, ohne welchen eine Darstellung der Erscheinungen überhaupt nicht ermöglicht werden kann. Und eine gleiche Rolle spielt das Prinzip auch in anderen Gebieten der Energetik. Es ist dies nicht sowohl ein Gegensatz, als vielmehr eine Entwicklung des von meinem Vorgänger eingenommenen Standpunktes, und ich glaube überzeugt sein zu dürfen, dass in der späteren Auffassung die allgemeine Bedeutung des Prinzipes vollständiger zur Geltung kommt, als in der früheren.

SITZUNG VOM 4. FEBRUAR 1895.

Vorträge hielten:

1. Herr **H. Ambronn**, a.o. M.: Ueber Entwicklung und Bedeutung des Nervenmarks.
2. Herr **Wilh. Pfeffer**, o. M.: Ueber ein Zimmer mit constanter Temperatur.
3. Herr **Sophus Lie**, o. M.: Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.

H. Ambronn und H. Held, *Ueber Entwicklung und Bedeutung des Nervenmarks*. **Mit 1 Tafel.**

Den Anlass zu nachstehend mitgetheilten Untersuchungen gab die Frage, ob und in wie weit die Nervi optici bei neugebornen resp. wenige Tage alten Säugethieren markhaltig sind, die wegen Verschlusses der Lidspalte für die ersten Tage ihres extrauterinen Daseins noch blind sind. Das Nervenmark scheint für die functionelle Leistung von Nervenbahnen nothwendig zu sein, wenigstens bei den Thieren, welche ein mit Markscheiden ausgestattetes Nervensystem besitzen, wobei noch die Frage offen ist, wieweit nach unten zu in der Thierreihe überhaupt marklose Nervensysteme vorkommen. Wie wichtig nun das Nervenmark ist, geht einerseits aus pathologischen Fällen hervor, bei denen Veränderungen der Markscheiden und Schwund derselben tiefe Functionsstörungen im Nervensystem hervorrufen, andererseits aus der Entwicklungsweise und inneren Reifung des centralen Nervensystems, das, wie zuerst Flechsig ausführlich gezeigt, in verschiedenen Absätzen markreif wird, sodass auf gewissen Entwicklungsstadien bestimmte grosse Gruppen von Leitungsbahnen markhaltig sind, während andere noch keine Spur von Nervenmark erkennen lassen. Diese Parallele zwischen Gehirnentwicklung und Markreifung deutet in evidenter Weise darauf hin, dass irgend welcher tieferer Zusammenhang zwischen Functionsfähigkeit und Markhaltigkeit einer Nervenbahn bestehen muss.

Und da nun bei jenen zunächst noch blinden neugeborenen Thieren (Kaninchen, Katzen etc.) von einer normalen specifischen Erregung des Nervus opticus durch Lichtstrahlen noch nicht die Rede sein kann, so waren von der Untersuchung solcher Sehnerven auf ihre Markhaltigkeit hin Aufschlüsse zu erwarten, ob das Markhaltigwerden einer Nervenbahn durch in derselben cursirende specifische Reize bedingt resp. hervorgerufen wird.

Das Nervenmark ist auf verschiedene Weise mikroskopisch nachweisbar; frisch in physiologischer Kochsalzlösung untersuchte markhaltige Nervenfasern zeigen die sogenannte »doppelte Conturirung«; in Osmiumlösungen gebracht bräunen und schwärzen sich ihre Markscheiden. Auch durch Färbung gelingt es, markhaltige Nervenfasern kenntlich zu machen. In hervorragender Weise ist es durch Anwendung der WEIGERT-schen Markscheidenfärbungsmethode ermöglicht, markhaltige Nerven, die mit Chromsalzen vorbehandelt sind, durch Färbung mit Hämatoxylin und nachfolgender vorsichtiger Entfärbung als blauschwarze Fasern aus dem übrigen umgebenden entfärbten Gewebe herauszusetzen.

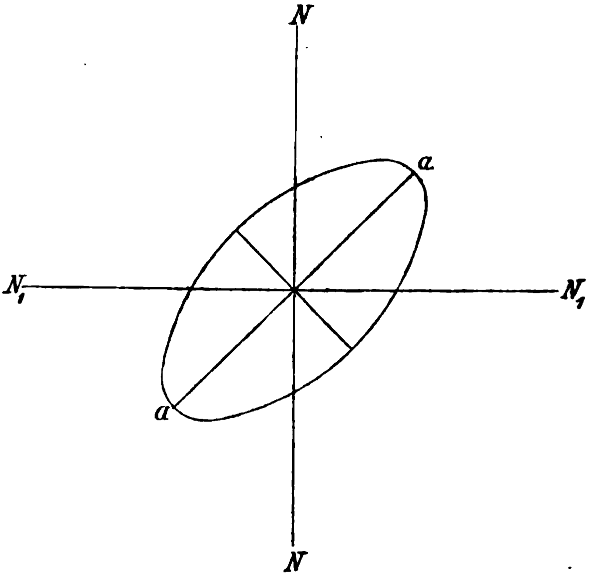
Man hat nun noch ferner in der Untersuchung mit polarisirtem Licht, wie der Eine von uns früher des Näheren gezeigt und begründet hat (AMBRONN, das optische Verhalten markhaltiger und markloser Nervenfasern, Bericht der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1890) ein bequemes und ausreichendes Mittel, um zu entscheiden, ob eine Nervenfaser markhaltig ist oder nicht, denn es zeigt eine markhaltige Nervenfaser über einem Gypsplättchen, wenn ihre Längsaxe mit der grösseren Elasticitätsaxe des Gypsplättchens parallel steht, die Subtractionsfarbe, bei Drehung um 90° dagegen die Additionsfarbe.

Es fragte sich nun zunächst, ob die Resultate, die man beim Untersuchen in polarisirtem Licht erhält, mit denen der Osmiumschwärzung, der zuverlässigsten Reaction auf Nervenmark nach GAD und HEYMANS [1]) und der WEIGERT'schen Färbung übereinstimmen. Lässt sich eine solche Uebereinstimmung nachweisen, so hat man im optischen Verhalten der Nervenfasern ein bei

1) GAD und HEYMANS, Ueber das Myelin, die myelinhaltigen und myelinlosen Nervenfasern, Arch. f. Anat. u. Phys. Physiolog. Abth. 1890. S. 531 ff.

weitem einfacheres und jedenfalls auch zuverlässigeres Mittel, das Vorhandensein von Nervenmark festzustellen und seine Entwicklung zu verfolgen.

Es hat sich nun in der That bei unseren Untersuchungen herausgestellt, dass eine solche Uebereinstimmung besteht, wobei noch hervorgehoben werden muss, dass im Verlauf weniger Stunden nach Tödtung des betreffenden Thieres die ganze Untersuchung mit Leichtigkeit auszuführen ist, ohne dass die Fasern mit irgend etwas anderem als der physiologischen Kochsalzlösung behandelt werden. Eine kurze Beobachtung im Polarisationsmikroskop lässt sofort erkennen, ob der zu prüfende Nerv schon markhaltig ist oder nicht. Wird z. B. das Gypsplättchen Purpur I in der Weise zwischen zwei gekreuzte Nicols NN und $N_1 N_1$ eingeschaltet, wie dies in beistehender Skizze dargestellt ist, in der die Richtung aa die Lage der längeren



Axe der Elasticitätsellipse (im Sinne von Nägeli und Schwendener) angiebt, so zeigen die Myelinscheiden der Nerven, wenn sie parallel zu aa liegen, die Subtractionsfarben (roth, orange, gelb etc.), während die Bindegewebsscheiden sowie die mark-

losen Nervenfasern die Additionsfarben (violett, indigo, blau) geben.

Es erscheint nun ferner noch als ein grosser Vorzug der optischen Methode gegenüber der Osmiumschwärzung und der Weigert'schen Färbung, dass die zu untersuchenden Gewebsstücke mit nichts anderem in Berührung kommen als der indifferenten physiologischen Kochsalzlösung, während es sich bei der Behandlung mit Osmiumsäure resp. mit chromsauren Salzen höchst wahrscheinlich um irgend welche entstehende Umwandlungsproducte des Myelins handelt, die dann der Lösung durch jene bei der Einbettung verwendeten Flüssigkeiten wie Alkohol, Aether etc. widerstehen und so im letzteren Falle eine nachfolgende Färbung mit Hämatoxylinlösungen ermöglichen. Dass hierbei eine Veränderung des Myelins eintritt, geht auch daraus hervor, dass eine so behandelte Nervenfaser nicht mehr die oben erwähnten optischen Eigenschaften zeigt.

Wir haben nun mittelst dieser optischen Methode gewisse Markreifestadien des Nervus opticus in Rücksicht auf jene obige Fragestellung untersucht und zugleich ferner solche Untersuchungen auf die verschiedensten Abschnitte des centralen wie peripheren Nervensystems ausgedehnt, um in weiterer Weise einmal die gewonnenen Resultate mit den nach Weigert'scher Färbung erhaltenen Bildern vergleichen und dann zweitens vielleicht mehr Anhaltspunkte dafür gewinnen zu können, in welcher Weise man die Bedeutung des Nervenmarks aufzufassen hat.

Unsere Untersuchungen umfassen zunächst das Nervensystem von ½ Tag alten Kaninchen. Die verschiedenen peripheren Nerven wurden in Kochsalzlösung in einzelne Bündel isolirt und so untersucht, während die verschiedenen Abschnitte des Centralnervensystems in 160 μ starke Schnitte unter Anwendung eines Gefriermikrotoms zerlegt wurden, die dann ebenfalls in Kochsalzlösung kamen.

Die einzelnen Körpernerven sowie die verschiedenen intracerebralen Leitungssysteme zeigten nun, wenn ihre Faserrichtung parallel zu der grösseren Elasticitätsaxe eines Gypsplättchens Purpur I gebracht wurde, bedeutend von einander abweichende Farbennüancen. Die einen erschienen dunkelroth, roth, hellroth, andere orange, orangegelb, gelb etc., also alle in der Subtractionsfarbe, während wieder andere Partien des

Nervensystems noch additionelle Färbung (violett und indigo) erkennen liessen. Folgende Tabelle giebt eine Uebersicht über die bei den verschiedenen Nerven und Leitungsbahnen beobachteten Farbennüancen.

Nervensystem eines ½ Tag alten Kaninchens.

Schnittdicke 160 μ. Gypsplättchen Purpur I. Lichtquelle: Auerlicht. Die Nervenzüge wurden zunächst mit Zeiss CC untersucht, die einzelnen Fasern dann mit Zeiss DD zur genaueren Prüfung einzelner Markröhren.

Rückenmark:

Lumbalmark und angrenzendes Dorsalmark.

Querschnitte:
- *Vordere Wurzeln* — hellgelb (manche Einzelfasern gelb).
- *Hintere Wurzeln* — roth bis orangeroth (manche Einzelfasern orangeroth).
- *Vorderstrang* — hellgelb (manche Einzelfasern gelb).
- *Hinterstrang* — roth zum Theil orangeroth.

Cervicalmark und angrenzendes Dorsalmark.

Querschnitte:
- *Vordere Wurzeln* — gelblich weiss (manche Einzelfasern hellgelb).
- *Hintere Wurzeln* — orangeroth (manche Einzelfasern hellroth).
- *Vorderstrang* — gelb.
- *Hinterstrang* — hellroth.

Vordere Commissur — orangegelb (manche Einzelfasern orange).

Längsschnitte:
- *Vorderstrang* — gelb (Einzelfaser gelb).
- *Hinterstrang* — leuchtend hellroth (Einzelfaser orangeroth).

Hirnstamm: *Hinteres Längsbündel* (Höhe der Hinterstrangkerne) — gelb (Einzelfaser gelb).

Nerv. hypoglossus — gelb (Einzelfaser gelb).

Burdach'scher Strang — orangeroth (Einzelfaser orangeroth).

Absteigende Trigeminuswurzel — orangeroth (Einzelfaser orangeroth).
Tractus solitarius — roth bis hellroth.
Corpus restiforme — orangeroth bis orange.
Olivenzwischenschicht — orangeroth bis orange.
Nerv. abducens — orangegelb (Einzelfaser — orangegelb).
Nerv. vestibularis — orangegelb (Einzelfaser orangegelb).
Nerv. cochlearis — roth (manche Einzelfasern hellroth).
Nerv. facialis — orangegelb (Einzelfaser orangegelb).
Corpus trapezoideum und *dorsale* / *Bahn aus dem vord. Acusticuskern* } — orange.
Striae acusticae a. d. Tuberculum — dunkelroth.
Mot. trigeminus — orangegelb (Einfelfaser orangegelb).
Sensibler Trigeminus — hell (Einzelfaser orangeroth).
Hinteres Längsbündel — orangegelb.
Nerv. trochlearis — orangegelb.
Laterale Schleife — orangeroth.
Nerv. oculomotorius — orangegelb.
Fontaineartige Haubenkreuzung — orange.
Ventrale Haubenkreuzung — orange.
Chiasma nervi optici und *Tractus opticus* — violett; vereinzelte rothe Züge.
Nerv. opticus — violett; vereinzelte rothe Züge.

Diese Tabelle zeigt nun erstens, dass noch nirgends in diesen Abschnitten des Nervensystems, die zu den am ersten markreif werdenden Theilen desselben überhaupt gehören, das Stadium der völligen Markreife erreicht ist, auf dem sich die markhaltigen Nerven als glänzend gelblichweisse Fasern im polarisirten Lichte zeigen. Hier bei dem ½ Tag alten Kaninchen erscheinen die verschiedenen motorischen Nervenbahnen noch fast alle orangegelb bis gelb, stehen somit auf einer tieferen Stufe der Markreife. Dieser Unterschied beruht nun zum Theil darauf,

dass bei dem ½ Tage alten Kaninchen noch nicht alle Fasern, z. B. im Facialis, markhaltig sind; je mehr markhaltige Fasern in sonst gleich dicken Nervenbündeln entstanden sind, je mehr Nervenmark also quantitativ im Querschnitt vorhanden ist, um so mehr wird sich die Subtractionsfarbe dem hellgelb oder weiss nähern. Andererseits rührt dieser Unterschied daher, dass die einzelnen Markröhren hier beim ½ Tag alten Kaninchen noch nicht die Stärke und das Volumen wie beim erwachsenen Individuum erreicht haben.

Die Farbenscala, welcher die verschiedenen Bezeichungen für die einzelnen Markentwicklungsstadien entnommen sind, wie sie sich im polarisirten Licht zeigen, ist folgende[1]:

Weiss
Gelblichweiss
Strohgelb
Gelb
Orangegelb
Orange
Orangeroth
Hellroth
Roth
Dunkelroth
Purpur
Violett
Indigo
Blau
Blaugrün.

Zweitens zeigt nun jene obige Tabelle über die Markreifestadien in den einzelnen Nervenbahnen eines ½ Tag alten Kaninchens, dass ein bedeutender Unterschied zwischen der Markhaltigkeit motorischer Nerven und gewisser centraler reflectorischer Systeme einerseits und sensiblen Nerven (mit Ausnahme des Nervus vestibularis) und sensorischen Systemen andererseits besteht. Es ist dies ein Unterschied, der bei Untersuchung von menschlichen fötalen Gehirnen und solchen an-

1) Vgl. die Tabelle bei Nägeli und Schwenderer, das Mikroskop. 2. Aufl. S. 326.

derer Wirbelthiere mit der Weigert'schen Markscheidenfärbungsmethode ausserordentlich auffällt, worauf der Andere von uns früher hingewiesen hat[1]), und der darin besteht, dass in den Nervenbahnen der ersten Kategorie sich die Markscheiden tief dunkel schon mit Hämatoxylin färben und so eine grosse Annäherung bereits an die blauschwarz gefärbten entsprechenden Nervenzüge erwachsener Individuen zeigen, während in den Nervenfasern der zweiten Gruppe zu derselben Zeit das Nervenmark sich viel blasser färbt, sodass die einzelnen bereits markhaltigen Nervenzüge als blassgraue Fasern bei stärkerer Vergrösserung erscheinen. Im polarisirten Lichte zeigen sich übereinstimmende Verhältnisse mit jenen Beobachtungen an Präparaten, die nach der Weigert'schen Methode gefärbt sind. Während die motorischen vorderen Rückenmarkswurzeln gelb aussehen, erscheinen die hinteren sensiblen Wurzeln durchweg noch roth, nur zum Theil schon orangeroth beim $\frac{1}{2}$ Tag alten Kaninchen, stehen also noch auf einer tieferen Stufe der Markreife. Dieser durchgreifende Unterschied zeigte sich auf allen untersuchten Querschnittshöhen. Gleiche Differenzen bestehen zwischen den gelben Vordersträngen und den rothen bis orangerothen Hintersträngen. In Uebereinstimmung mit den gelb erscheinenden Wurzelfasern im Vorderhorn des Rückenmarks zeigen auch die Nervenfasern der vorderen Rückenmarkscommissur, aus denen sich zum Theil die Vorderstränge aufbauen, bereits orangegelb bis gelb aussehende Markscheiden.

Gleiche Unterschiede wie die vorderen und hinteren Rückenmarkswurzeln zeigen auch die motorischen und sensiblen Gehirnnerven mit Ausnahme des Nervus vestibularis, der allen sensiblen Nerven vorauseilt. (Hypoglossus, Abducens, Facialis, motorischer Trigeminus, Trochlearis, Oculomotorius bereits orangegelb bezüglich gelb — und andererseits Tractus solitarius roth, Cochlearis roth, sensibler Trigeminus orangeroth und im Nervus opticus zwischen violetten Zügen erst vereinzelte rothe.) Nur der Nervus vestibularis erscheint von allen diesen sensiblen Nerven bereits orangegelb und zeigt somit gleiche Markreife mit den motorischen Nerven, ein Ver-

1) Held, Ueber eine directe acustische Rindenbahn und den Ursprung des Vorderseitenstranges beim Menschen. Arch. f. Anat. u. Phys. Anat. Abthl. 1892.

halten also, wie es in derselben Weise sich bei den nach Weigert'scher Methode gefärbten Präparaten zeigt. Ebenso sind die grossen reflectorischen Bahnen (Vorderseitenstränge des Rückenmarks und der Formatio reticularis, hinteres Längsbündel, Seitenstrangbündel aus dem rothen Kern der Haube, optisch-acustische Reflexbahn) bereits in dem Markreifestadium, in dem sie im polarisirten Licht orange bis orangegelb aussehen.

Es zeigt sich nun ferner ein auffallender Unterschied im Aussehen der verschiedenen sensiblen Gehirnnerven bei Untersuchung im polarisirten Licht, wie aus obiger Tabelle hervorgeht. Während der Nervus opticus fast noch völlig violett aussieht beim ½ Tag alten Kaninchen, mit Ausnahme vereinzelter rother Fasern, also zum grössten Theil noch völlig marklose Axencylinder enthält, ist der Nervus vestibularis bereits orangegelb; dieser ist also am markreifsten, jener am wenigsten markhaltig entwickelt in den sensiblen Nerven. Eine etwas höhere Entwicklungsstufe als der Sehnerv zeigt der Hörnerv, der nach obiger Tabelle schon hellrothe Fasern führt; auf gleicher Entwicklungsstufe steht ungefähr auch der sensible Vagus-Glossopharyngeus (Tractus solitarius nach obiger Tabelle roth-hellroth). Die der Vestibularisstufe am meisten gleichkommende Markreife hat der sensible Nervus trigeminus, der nach obiger Tabelle orangerothe Fasern zum grössten Theil zeigt.

Ferner fällt der Unterschied auf in der Markreife zwischen den sensiblen Nerven und ihren secundären intracerebralen Bahnen; so zeigten sich der Trapezkörper und die laterale Schleife zum grossen Theil schon als orangerothe bis orangefarbene Bahnen, während der Nervus cochlearis noch roth resp. hellroth aussieht. Ebenso erscheinen Olivenzwischenschicht und Corpus restiforme orangeroth bis orange gegenüber den rothen bis orangerothen Hintersträngen des Rückenmarks, für welche sie secundäre Bahnen sind.

Wir haben dann ferner etwas ältere Kaninchen zur Untersuchung herangezogen, einmal um bei diesen älteren Stadien das gegenseitige Verhältniss der einzelnen Systeme bezüglich ihrer Markreife zu prüfen und andererseits, um entscheiden zu können, ob diejenigen Nervenbahnen, welche auf der jüngeren Stufe eine geringere Markreife zeigten, jetzt stärkere Entwicklung der Markmasse erkennen lassen. Es hat sich in der That heraus-

gestellt, dass dies zu erwartende Reiferwerden der Myelinscheide sich im polarisirten Licht nachweisen liess.

So zeigt der Nervus opticus eines 1½ Tag alten Kaninchens schon viele orangerothe Züge von Nervenfasern zwischen anderen, die noch die Grundfarbe der Gypsplättchens Purpur I zeigen, gegenüber dem Sehnerven jenes ½ Tag alten Kaninchens, wo nur vereinzelte rothe Züge in sonstigen violetten nachzuweisen waren. Ferner zeigte der Opticus auf der Stufe eines 3 Tage alten Kaninchens mehr oder weniger auf der ganzen Fläche rothe Färbung. Um diese Entwicklungsreihe für den Opticus zu vervollständigen, mag noch die Markstufe eines 10 Tage alten Kaninchens, also eines sehend gewordenen, hier angeführt werden, welche den Sehnerv in seiner ganzen Ausdehnung deutlich orangefarben zeigte.

Vor der ausführlichen Beschreibung der fortschreitenden Markentwicklung in den anderen in der Tabelle aufgeführten Systemen mag hier abgesehen werden; es zeigten sich durchweg etwas niedrigere Subtractionsfarben. Doch muss bemerkt werden, dass die Farbenunterschiede zwischen orangegelb, gelb und hellgelb nicht so präcise sind wie z. B. zwischen roth und orange. Man kann sich jedoch in diesen Fällen immer von der kräftigeren Entwicklung der Markscheide überzeugen, wenn man den Objecttisch um 90° dreht und die in dieser Lage auftretenden entsprechenden Additionsfarben zur Vergleichung heranzieht. Man kann so leicht beobachten, dass die auf niedriger Markstufe indigo oder blau aussehenden Nervenzüge in blauer bezw. bläulichgrüner Färbung bei älteren Individuen erscheinen. Wir haben dann noch jüngere Entwicklungsstadien von Nervensystemen als die oben beschriebenen untersucht, um die Markreife der verschiedenen *motorischen Nerven* unter einander vergleichen zu können und so die Frage zu entscheiden, ob gleichmässig alle motorischen Nerven den sensiblen in der Markentwicklung voraneilen.

Es mögen einige Befunde an einem menschlichen ungefähr 5 Monate alten Foetus erwähnt werden, der folgende diesbezügliche Verhältnisse zwischen den einzelnen Markstufen motorischer Nerven zeigte:

Vordere Rückenmarkswurzeln — gelb (hintere Wurzeln zum Theil roth).

N. hypoglossus — viele Fasern orange.
N. facialis — gelb.
N. abducens — viele Fasern orange.
N. trigeminus (mot.) — viele orangerothe Fasern (sensibl. Trigeminus — blau).
N. oculomotorius — viele Fasern orange (N. opticus — blau).

Aus dieser Tabelle ergiebt sich also — ausser dem oben erörterten Unterschied zwischen motorischen und sensiblen Nerven, der hier natürlich noch grösser erscheint — dass gewisse motorische Nerven (z. B. vordere Rückenmarkswurzeln, N. facialis) bereits eine höhere Stufe erreicht haben wie andere. Es erhalten also nicht nur motorische Nerven eher eine gewisse Markreife wie sensible, sondern innerhalb der motorischen Gruppe selber besteht noch ein Voraneilen gewisser Untergruppen. Es muss vorläufig die Frage unentschieden bleiben, ob die Differenz, wie wahrscheinlich ist, auf einem zeitlich früheren Einsetzen der Markbildung beruht oder auf einem gesteigerteren Markbildungsprocess.

Wie aus dem Vorstehenden hervorgeht, ist die optische Methode durchaus im Stande, feine Nüancen in dem Grade der Entwicklung von Markscheiden nachzuweisen. Wir haben es deshalb nicht unterlassen, nochmals auf die Frage nach der Markhaltigkeit des Nervus olfactorius beim Hecht einzugehen. Es ist von Gad und Heymans (l. c.) nachgewiesen worden, dass die Geruchsnerven des Hechtes lecithinhaltig sind, und daraufhin hat der eine von uns (Ambronn l. c.) nachgewiesen, dass auch die optische Reaction mit diesem chemischen Befunde übereineinstimmt, insofern als der grob zerfaserte Nervus olfactorius auf seiner ganzen Ausdehnung Subtractionsfarbe zeigte. Und da nun bei diesen letzteren Untersuchungen nur schwächere Vergrösserungen benutzt wurden, so haben wir jetzt noch einmal mit Hülfe sehr starker Vergrösserungen die Structur des Olfactorius zu lösen versucht. Es stellte sich dabei heraus, dass der Nervus olfactorius nicht gleichmässig über die ganze Fläche Subtractionsfarbe zeigte, sondern aus einer grossen Anzahl ausserordentlich feiner markhaltiger Nervenröhren besteht, die sich in Form feiner orangefarbener nahe an einander liegender Linien zeigten.

Da es höchst wahrscheinlich ist, dass die charakteristische optische Reaction des Nervenmarks auf der Anwesenheit von Lecithin beruht, kann man wohl mit Recht vermuthen, dass jene oben erwähnten Methoden zum Nachweis von Nervenmark (Osmium- und Weigertmethode) ebenfalls von der Anwesenheit des Lecithins abhängig sind. Es muss genaueren chemischen Untersuchungen vorbehalten werden, nachzuweisen, welche Umwandlungsproducte des Lecithins bei diesen Färbungen in Betracht kommen.

Wenn wir nun die Markentwicklung innerhalb eines Nervensystems überblicken, so glauben wir als Regel aussprechen zu dürfen, dass die specifische Functionsthätigkeit einer Nervenfaser wenigstens bei höheren Thieren erst dann beginnt, wenn ihr Axencylinder von einer normal entwickelten Myelinscheide umgeben ist. Dies zeigt sich an dem Opticus eines 10 Tage alten Kaninchens, der schon die normale optische Reaction eines ziemlich fertigen Nerven zeigte, zum Unterschied von den Optici wenig Tage alter Thiere. Sollte sich die oben geäusserte Anschauung als allgemein gültig herausstellen, so wäre man umgekehrt berechtigt, aus dem Vorhandensein oder Fehlen der Markscheide einen Rückschluss auf die bestehende oder noch nicht vorhandene resp. verloren gegangene Functionsthätigkeit zu machen.

Es sprechen nun diese Resultate für die schon früher und hauptsächlich von R. Wagner[1]) vermuthete Bedeutung der Markscheide als einer Art Isolator; die isolirende Eigenschaft der Markscheide suchte Wagner in dem Fettreichthum des Nervenmarks[2]).

Wenn wir diese Ansicht über die Bedeutung des Nervenmarks als Isolator irgend welcher Art wieder aufnehmen, so glauben wir auf Grund unserer histologischen Befunde dazu berechtigt zu sein. Es frägt sich nun, wie diese Isolation zu denken ist; es kämen hier in Betracht erstens die isolirte Fortleitung elektrischer Ströme im Axencylinder und zweitens der Schutz gegenüber osmotischen Störungen, die in der Querrichtung auf den Axencylinder einwirken können.

---

1) R. Wagner, Neurologische Untersuchungen in Göttinger Anzeigen, Nachrichten von der Univ. Februar 1850.

2) Vgl. auch Kölliker, Mikroskopische Anatomie, 1850 I. S. 544.

Dass die elektrische Leitfähigkeit in der Längsrichtung markhaltiger Nervenfasern bedeutend besser ist als in der Querrichtung, geht aus den Versuchen von Hermann [1]) hervor, der an frischen peripheren Nerven das Verhältniss von Längs- zu Querwiderstand gegenüber elektrischen Strömen wie 1 : 5 fand, und der diese auffallende Erscheinung auf innere Polarisation zurückführte.

Ohne auf die Frage einzugehen, ob diese auffallenden Unterschiede in der Längs- und Querleitung nur auf innere Polarisation zurückzuführen sind, wollen wir hier nur die Möglichkeit betonen, dass hierbei auch ein durch die Markscheide verursachter Widerstand eine Rolle spielen dürfte.

Diese Versuchsergebnisse lassen sich also auch unter der Annahme der isolirenden Eigenschaft der Markscheide sehr wohl interpretiren. Und da nun ferner die allgemeinen Anordnungen von Leitungsbahnen zwischen peripheren Sinnesapparaten und centralen Gehirntheilen die sind, dass die Endverzweigungen von Axencylindern sensibler Nerven in peripheren Sinnesapparaten marklos sind, so erscheinen diese an solchen Stellen gegen äussere Einwirkungen ungeschützt und somit befähigt, Reize aufzunehmen.

Damit aber die Fortleitung dieser Reize ohne weitere Störung erfolgen kann, müssen die Fasern in ihrem weiteren Verlaufe gegenüber äusseren Einflüssen (vielleicht auch gegen osmotische Störungen) möglichst isolirt sein; und dieser Schutz ist eben nach unserer Anschauung erst dann genügend vorhanden, wenn die Markscheide ihre normale Ausbildung erlangt hat und als Isolator in diesem Sinne für die Fortleitung der Reize dienen kann. Genau dieselben Verhältnisse, wie bei den Reiz vermittelnden Sinnesapparaten, bestehen an den Einmündungsstellen sensibler Bahnen im Centralnervensystem, insofern als auch hier die letzten Verzweigungen der Axencylinder marklos sind und so durch hier vorhandene enge Beziehungen zu den ebenfalls marklosen Protoplasmaästen von Systemzellen die bis hierher isolirt fortgeleitete Erregung auf eine zweite aus diesen Zellen entspringende intracerebrale Leitungsbahn übertragen können. Andererseits sind die Endverzweigungen motorischer

1) Hermann, Handbuch der Physiologie II 1879 und Pflüger's Archiv Bd. 42 1888 Ueber die Polarisation der Muskeln und Nerven.

Nerven an den Muskelmassen ebenfalls markfrei, sodass auch hier die Uebertragung des Reizes auf die Muskelfasern nicht durch eine isolirende Schicht gestört ist. Und da nun die Markreife einmal in sensorischen Systemen sensibler Nerven etwas früher eintritt als in den sensiblen Nerven selbst (mit Ausnahme des N. vestibularis), und zweitens noch früher in den grossen reflectorischen Systemen und in den durch diese beeinflussten motorischen Nerven, so folgt, dass hierdurch die intracerebrale Ausbreitung und Uebertragung sensibler Reize in bestimmter Weise geregelt ist. Weil die motorischen Nerven und die reflectorischen Systeme, die zu deren Ursprungskernen hin Reize übertragen, diejenigen Leitungsbahnen sind, welche zuerst im ganzen Nervensystem fertig werden, so können sie nur allein als functionsreife Nervenstränge eine isolirte Fortpflanzung von Reizen übernehmen, sobald sensible Leitungen ihnen solche zuführen. Nur auf einem bereits fertigen Schienenstrang können, um diesen Vergleich zu gebrauchen, Eisenbahnwagen in bestimmter Richtung auf grössere Entfernungen hin fortbewegt werden; und so erscheint auch hier die Uebertragung sensibler Reize zu einem Muskelapparat hin an den in jedem Zeitabschnitt fertigen, d. h. markreifen Nervenstrang gebunden. Die Grundeinrichtungen im Nervensystem erscheinen vom Standpunkt der Entwicklung aus als reflectorische und die ersten Aeusserungen seiner beginnenden Function als Reflexacte.

Diese letzteren Verhältnisse sind auf der beigefügten Tafel an zwei schematischen Zeichnungen erläutert. Die Farbenunterschiede in markhaltigen Bahnen entsprechen ungefähr den beobachteten Subtractionsfarben und geben dadurch ein annäherndes Bild von dem Stadium der Markreife zu einer besimmten Entwicklungszeit.

Fig. 1 giebt die reflectorischen Beziehungen zwischen Hör- und Sehnerv einerseits und dem motorischen Apparat für Kopf- und Augenbewegungen.

Fig. 2 zeigt entsprechende Beziehungen zwischen den hinteren und vorderen Rückenmarkswurzeln.

Herr **Pfeffer** *sprach über ein Zimmer mit constanten Temperaturen.*

Physiologische Arbeiten erfordern in mannigfacher und oft in so ausgedehnter Weise bestimmte Wärmegrade, dass es oft unmöglich ist mit dem beschränkten Raum in Thermostaten auszukommen. Es wurde deshalb im botanischen Institut ein Zimmer construirt, welches gleichzeitig z. B. Temperaturen von 22,5° bis 37° C. darbietet. Erreicht ist dieses durch eine regulatorisch wirkende Ofenheizung, deren Einrichtung näher auseinandergesetzt wurde.

Sophus Lie, *Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung.*

(Die neuen Theorien dieser Abhandlung theilte ich der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am 11. October 1893 mit. Sodann entwickelte ich sie eingehend in meinen Vorlesungen an der Universität Leipzig im Wintersemester 1893—1894.

Sophus Lie.)

In der ganzen modernen Mathematik ist die Theorie der Differentialgleichungen die wichtigste Disciplin.

Es dürfte richtig sein, zu sagen, dass die Begriffe Differentialquotient und Integral, deren Ursprung jedenfalls bis auf Archimedes zurückgeht, dem Wesen der Sache nach durch die Untersuchungen von Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat und Wallis in die Wissenschaft eingeführt worden sind. Dass aber nichtsdestoweniger diese Forscher keineswegs als Begründer der Infinitesimalrechnung betrachtet werden können, dürfte schon daraus hervorgehen, dass sie noch nicht bemerkt hatten, dass Differentiation und Integration *inverse* Operationen sind. Diese capitale Entdeckung [1]), die uns jetzt als selbstverständlich erscheint, gehört Newton und Leibniz, die überdies die unermessliche Tragweite der besprochenen Begriffe erkannten und gleichzeitig zweckmässige Algorithmen einführten. Ganz besonders wichtig waren einerseits Newton's Entdeckung der

---

1) Die Frage, ob Newton oder Leibniz zuerst bemerkt haben, dass Differentiation und Integration *inverse* Operationen sind, hat offenbar die grösste Bedeutung für die Entscheidung des alten Prioritätsstreites hinsichtlich der Begründung der Infinitesimalrechnung. Wenn ich eine mündliche Mittheilung des Herrn Zeuthen richtig verstanden habe, wird dieser Forscher, der schon so viel für die Geschichte der Mathematik geleistet hat, die soeben besprochene Frage in einer bald erscheinenden Arbeit behandeln.

Binomialformel, die ja zeigte, wie man viele Differentiale und Integrale findet, andererseits LEIBNIZ's Einführung der Symbole dx, dy, sowie endlich die Betrachtung und Verwerthung der höheren Differentialquotienten.

Die Anwendungen der Begriffe Differential und Integral, die von NEWTON's und LEIBNIZ's Vorgängern herrühren, bezogen sich fast nur auf das Ziehen von Tangenten, und die Bestimmung von Bogenlängen, Flächenräumen und Volumina. Bei der freieren Auffassung der beiden Begriffe, die von NEWTON und LEIBNIZ herrührt, war es diesen grossen Mathematikern möglich, solche Probleme ernstlich in Angriff zu nehmen, die wir jetzt als *Differentialgleichungen* bezeichnen. Vielleicht dürfte es richtig sein, zu behaupten, dass *gerade die Formulirung und Integration von Differentialgleichungen die epochemachenden Fortschritte sind, die in erster Linie die Newton-Leibniz'sche Aera und gleichzeitig die jetzige höhere Mathematik charakterisiren.*

Ganz besonders berühmt, und zwar mit vollem Grunde, ist NEWTON's Ableitung der KEPLER'schen Gesetze der Planetenbewegung aus dem von NEWTON selbst formulirten Gravitationsgesetz. Diese nicht allein für die Mechanik epochemachende Entdeckung beruht factisch auf der Integration eines Systems von Differentialgleichungen; denn das Gravitationsgesetz giebt die Differentialgleichungen der Planetenbewegung, und die KEPLER'schen Gesetze sind weiter nichts als die zugehörigen Integralgleichungen.

Die Brüder JACOB und JOHANN BERNOULLI (1654—1705, 1667—1748) gaben mehrere Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen; besonders berühmt sind ihre Untersuchungen über geodätische Curven und isoperimetrische Probleme, die als Anfänge der Variationsrechnung zu betrachten sind.

Der italienische Mathematiker RICCATI (1676—1754) lenkte die Aufmerksamkeit auf einige Fälle der später so berühmten Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = X(x) + X_1(x)\,y + X_2(x)\,y^2,$$

die unter den nichtintegrablen Differentialgleichungen unzweifelhaft als die einfachste und wichtigste zu betrachten ist. Neuere gruppentheoretische Untersuchungen zeigen nämlich,

dass diese Gleichung als ein Analogon der algebraischen Gleichung *fünften* Grades aufgefasst werden kann.

Clairaut (1713—1765), der besonders durch seine Untersuchungen über gewundene Curven bekannt geworden ist, beschäftigte sich mit Gleichungen von der Form

$$y - xy' - \varphi(y') = 0,$$

deren Integrationstheorie bekanntlich mit dem Begriffe *Liniencoordinaten* in Verbindung steht. Man darf daher behaupten, dass der Ursprung des Begriffes Liniencoordinaten (ja sogar *Dualität*) bis auf Clairaut zurückgeführt werden kann.

Noch mächtiger war der Einfluss d'Alembert's (1717—1783) auf die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen. Durch Aufstellung des allgemeinen mechanischen Princips [1]), das seinen Namen trägt, führte er *alle Probleme der Dynamik auf Differentialgleichungen zurück* und gab hiermit Newton's bahnbrechenden mechanischen Ideen eine allgemeingültige und definitive Form. Sehr wichtig waren ebenfalls d'Alembert's schöne Untersuchungen über gewöhnliche und partielle *lineare* Differentialgleichungen.

Die Namen Euler, Lagrange und Laplace, Monge, Ampère und Pfaff bezeichnen eine neue Epoche in der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen, die sich u. a. dadurch charakterisiren lässt, dass man anfing, auch die *partiellen* Differentialgleichungen unter allgemeinen Gesichtspunkten zu betrachten. Bei dieser Gelegenheit kann ich selbstverständlich nicht auf alle Beiträge zur Theorie der Differentialgleichungen eingehen, die von diesen grossen Mathematikern und ihren noch grösseren Nachfolgern Gauss, Cauchy, Fourier, Abel, Jacobi und Riemann herrühren. Ich will aber versuchen, im Kapitel I, wenn auch nur in grossen Zügen, einige unter den wichtigsten Richtungen in den neueren Untersuchungen über Differentialgleichungen kurz zu charakterisiren. Ausführlicher gehe ich dabei

1) Neuerdings hat Herr Ostwald versucht, ein allgemeines Princip aufzustellen, das alle Naturgesetze umfassen soll. Es ist aber, wie schon früher von mir hervorgehoben, zu beklagen, dass die bisherige mathematische Formulirung dieses Princips so vag und unklar ist, dass Mathematiker den Sinn desselben nicht verstehen können. Erst wenn eine wirkliche Formulirung des Princips vorliegt, lässt sich die Frage, ob z. B. Hertz ähnliche Ideen gehabt hat, entscheiden.

nur auf diejenigen Richtungen ein, die mit meinen eigenen Untersuchungen in Verbindung stehen. Sodann versuche ich in Kapitel II einige von mir herrührende Theorien, die bis jetzt nur in der norwegischen Sprache und in knapper Form skizzirt waren, in die richtige Beleuchtung zu setzen. In den folgenden Kapiteln entwickele ich sodann ziemlich ausführlich wichtige und allgemeine Integrationstheorien, die ebenfalls von mir herrühren.

Kapitel I.

Vergleichende Betrachtungen über neuere Untersuchungen, die sich auf Differentialgleichungen beziehen.

In diesem Kapitel versuchen wir zuerst eine Uebersicht über die seit Euler und Lagrange ausgeführten Untersuchungen über Differentialgleichungen zu gewinnen. So unvollständig und unvollkommen auch diese unsere Betrachtungen sein mögen, so werden sie doch dazu dienen, die Tendenz unserer eigenen Bestrebungen klar zu stellen. Ganz besonders eingehend beschäftigen wir uns sodann mit der von Monge, Laplace, Ampère und Darboux entwickelten Theorie der Charakteristiken und gewinnen hierdurch die Grundlage für die Darstellung eigener Untersuchungen, die in den folgenden Kapiteln entwickelt werden.

§ 1.

Verschiedene Richtungen innerhalb der Theorie der Differentialgleichungen.

Soweit ich es übersehe, dürfte es richtig sein zu sagen, dass die in den letzten hundertundzwanzig Jahren veröffentlichten Untersuchungen über Differentialgleichungen sich grösstentheils in *vier* oder *fünf* verschiedenen Kategorien einordnen lassen, zwischen denen sich allerdings viele Berührungspunkte finden lassen.

Zu der ersten Kategorie rechne ich zunächst die von Euler, Lagrange und Monge angefangenen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen *erster* Ordnung, die von Pfaff, Cauchy, Hamilton, Jacobi, A. Mayer und Anderen weiter geführt

worden sind. Hierher rechne ich ferner die von Monge und Laplace angefangenen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen *zweiter* und höherer Ordnung. Unter Laplace's und Monge's Nachfolgern auf diesem Gebiete sind Ampère, Darboux und einige andere französische Mathematiker diejenigen, die die wichtigsten Fortschritte begründet haben. In allen diesen Arbeiten spielt der Monge'sche Begriff *Charakteristik* implicite oder explicite eine wichtige Rolle.

Zu der zweiten Richtung rechne ich die von d'Alembert, Fourier und Cauchy angefangenen, von Riemann, Weierstrass, Meray, Schwarz, C. Neumann, Poincaré, Picard und vielen anderen hervorragenden Mathematikern weitergeführten Untersuchungen, die sich einerseits mit Integrabilitätsbedingungen beschäftigen, andererseits mit der Bestimmung derjenigen Integrale, die zu gegebenen Anfangsbedingungen gehören.

Zu der dritten Richtung rechne ich die meisten neueren Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen, deren Grundlage eigentlich die von Cauchy und Abel geschaffene allgemeine Functionentheorie ist. Muss man auch sagen, dass Gauss und Riemann für diese Richtung die Bahn gebrochen haben, so muss man doch Fuchs (1866) als den eigentlichen Begründer dieser Richtung auffassen. Diese Untersuchungsrichtung erhielt eine neue Tragweite durch die Einführung des Galois'schen Begriffs der discontinuirlichen Gruppe. In den mir bekannten Arbeiten Riemann's kommt dieser Begriff nicht explicite vor; ebenso wenig in Fuchs' älteren Untersuchungen. Die ersten Arbeiten, die, soweit mir bekannt, den Galois'schen Gruppenbegriff für die allgemeine Theorie der (linearen) Differentialgleichungen verwerthen, sind C. Jordan's Publicationen in der ersten Hälfte des Jahres 1874. Einen Fortschritt begründete andererseits Fuchs' Verwerthung (1875) der Cayley'schen Invariantentheorie für die linearen Differentialgleichungen. Dabei ist immerhin zu beachten, dass diese Resultate sich einfacher und sogar vollständiger durch Vereinigung von C. Jordan's soeben

---

1) Es ist ja sicher genug, dass in Riemann's wie in so vielen älteren Arbeiten der Gruppenbegriff *implicite* vorkommt. Ob aber Riemann den Gruppenbegriff wirklich besass, darüber weiss man doch wohl nichts. Der Umstand, dass Riemann in seinen Untersuchungen über Abel'sche Integrale gar nicht Galois citirt, deutet nicht gerade darauf, dass er mit Galois' Arbeiten und Ideen genauer bekannt war.

citirten Untersuchungen mit F. Klein's im Jahre 1874 durchgeführter Bestimmung[1]) aller *discontinuirlichen* projectiven Gruppen der Geraden ableiten liessen, wie Klein nachträglich zeigte.

Zu dieser Richtung gehören eine grosse Anzahl functionentheoretischer Untersuchungen, die von Schwarz, Hermite, Thomé, Frobenius, Fuchs, Klein, Poincaré, Picard, Appel, Painlevé und Anderen herrühren. Auf diese Untersuchungen brauchen wir hier nicht einzugehen; dagegen besprechen wir später, wenn auch nur flüchtig, Cockles, Laguerre's und Halphen's sowie Picard's und Vessiot's Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen.

Zu der vierten Richtung rechne ich diejenigen Untersuchungen, die explicite oder implicite meinen allgemeinen Begriff der *continuirlichen* Gruppen für die Integrationstheorie verwerthen. In den hierher gehörigen Arbeiten spielt gleichzeitig der aus dem Gruppenbegriffe fliessende Begriff Differentialinvariante eine fundamentale Rolle. Auf die geschichtliche Entwickelung dieser beiden Begriffe brauche ich bei dieser Gelegenheit nicht einzugehen. Diese ganze Richtung nimmt ihren Ursprung in meiner in den Jahren 1869—1870 gemachten Entdeckung, dass die Integrationstheorien der älteren Mathematiker, die früher als isolirte Theorien betrachtet wurden, durch Einführung des Begriffs der continuirlichen Gruppen auf eine gemeinsame Quelle zurückgeführt werden können. Diese Bemerkung führte mich sogleich zu einer Reihe neuer, allerdings einfacher Integrationstheorien, die sämmtlich einen gruppentheoretischen Charakter besassen (Ges. d. W. Christiania 1871, Math. Ann. Bd. V).

Im Jahre 1872 skizzirte ich, wenn auch in knappster Form, mehrere umfassende Integrationstheorien, die auf einer Invariantentheorie der unendlichen Gruppe aller Berührungstransformationen, sowie auf einer Invariantentheorie der unend-

1) Im November 1873 theilte ich Klein mit, dass ich alle *continuirlichen* Gruppen in einer Veränderlichen auf die projective Form gebracht hatte. Diese meine Mittheilung war, wenn ich nicht irre, die äussere Veranlassung zu Klein's im Frühling 1874 durchgeführter Bestimmung aller discontinuirlichen projectiven Gruppen in einer Veränderlichen. Von Interesse dürfte es noch sein, zu notiren, dass Klein sich schon in dieser Zeit (Brief vom 30. April 1874) mit der Frage nach allen eindeutigen Functionen mit einer discontinuirlichen projectiven Gruppe beschäftigte.

lichen Gruppe aller Punkttransformationen beruhen (vgl. kurzes Resumé mehrerer neuer Theorien, April 1872; Zur Theorie der Differentialprobleme October 1872; *Zur Invariantentheorie der Berührungstransformationen, December 1872*; Ges. d. W. Christiania). Eine ausführlichere Darstellung dieser Theorien gab ich in denselben Verhandlungen für 1873 — Febr. 1875; vgl. Math. Ann. Bd. VIII und XI. Es ist hier nicht nothwendig, meine zahlreichen weiteren Publicationen über diese Gegenstände zu citiren; nur möchte ich darauf hinweisen, dass meine wichtigsten Resultate in den Math. Annalen Bd. XXIV und XXV in knapper Form zusammengestellt sind. Für alle diese meine Untersuchungen ist es *charakteristisch*, dass *ich mich nicht darauf beschränke, gewisse Integrationen zu leisten, sondern in jedem einzelnen Fall genau angebe, welche Reductionen möglich sind.* Allerdings ist zu bemerken, dass meine *Beweise* dafür, dass weitere Reductionen unmöglich sind, noch *nicht alle* in extenso vorliegen.

Zu dieser Richtung rechne ich ferner die schönen Arbeiten von Laguerre und Halphen über Transformation von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Diese Untersuchungen beziehen sich factisch auf die unendliche *Gruppe*

$$x_1 = \varphi(x), \quad y_1 = y\varphi(x),$$

was allerdings von den beiden Verfassern nicht gesagt wird. Ich muss annehmen, dass Laguerre (1879) und Halphen (1882) meine Invariantentheorie der Berührungstransformationen und meine darauf begründeten Integrationstheorien ursprünglich nicht näher gekannt haben, sonst würden sie doch wohl auf die vielen Analogien zwischen diesen beiden Theorien hingewiesen haben [1]). Zu bemerken ist übrigens, dass der englische Mathematiker Cockle schon im Jahre 1870 für lineare Differential-

1) Dass meine älteren geometrischen Arbeiten über Curven und Flächen mit *unendlich vielen projectiven Transformationen* Halphen nicht unbekannt waren, geht aus den Citaten seiner Dissertation (1879) hervor. Dass er aber die Tragweite meiner Integrationstheorien ursprünglich nicht kannte, geht schon daraus hervor, dass seine in den Jahren 1879—1881 veröffentlichten Integrationstheorien nicht allein einen ganz speciellen Charakter haben, sondern überdies unvollkommen sind, indem sie die Ordnung und die Anzahl der erforderlichen Integrationsoperationen keineswegs auf ihr Minimum herabdrücken.

gleichungen Ideen entwickelt hatte, die, obgleich particulär, immerhin mit LAGUERRE's Ideen verwandt sind.

Zu dieser Richtung rechne ich endlich eine Reihe neuer Untersuchungen von PICARD und VESSIOT, auf deren Wichtigkeit ich schon bei vielen Gelegenheiten hingewiesen habe.

Wenn die hier gegebene geschichtliche Darstellung correct ist, so kann ich darauf Anspruch machen, zuerst den Gruppenbegriff für die Integrationstheorie der Differentialgleichungen verwerthet zu haben. Innerhalb der FUCHS'schen Richtung wurde ja der Gruppenbegriff und zwar der Begriff der *discontinuirlichen* Gruppe zuerst im Jahre 1874 von C. JORDAN verwerthet. Dagegen stammt meine Theorie der Functionengruppen aus dem Jahre 1872, während der *Ursprung* meiner Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannter endlicher oder unendlicher Gruppe sich noch weiter zurück verfolgen lässt. —

Ich bin mir selbstverständlich sehr wohl bewusst, dass es viele wichtige Untersuchungen über Differentialgleichungen giebt, die sich nicht unter eine der vier besprochenen Richtungen unterordnen lassen. Als solche Untersuchungen nenne ich BRIOT und BOUQUET's functionentheoretische Untersuchungen, ferner DARBOUX's Arbeiten über algebraische Differentialgleichungen, sowie die von BRUNS und POINCARÉ herrührenden, so werthvollen Untersuchungen über das Problem der drei Körper und endlich einige andere *functionentheoretische* Untersuchungen. Die vorhergehenden kritischen Bemerkungen machen eben auf Vollständigkeit keinen Anspruch. Da aber die Zahl der Untersuchungen über Differentialgleichungen, besonders in den letzten Decennien so colossal wächst, schien es mir berechtigt, einmal zu versuchen, auf die gegenseitigen Beziehungen aller dieser Untersuchungen einzugehen. Wenn ich erst die erforderlichen bibliographischen Studien gemacht habe, werde ich an anderer Stelle ausführlich auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Zwischen diesen verschiedenen Richtungen finden sich viele Berührungspunkte, die hohes Interesse darbieten. Meine eigenen Bestrebungen gehen in erster Linie darauf hinaus, den Begriff der continuirlichen Gruppen auch für die drei erstgenannten Richtungen zu verwerthen.

Dass es naturgemäss ist, die ganze Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. von gruppentheoretischem Standpunkte zu behandeln, habe ich schon in meinen ältesten Arbeiten gezeigt. In dieser Arbeit versuche ich in so grosser Ausdehnung wie möglich die Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung auf diejenige der Gleichungen *erster* Ordnung zurückzuführen und dadurch die allgemeine Theorie einer gruppentheoretischen Behandlung zugänglich zu machen. Meine nächste Arbeit, deren Inhalt schon im Anfange des vorigen Jahres dieser Gesellschaft mitgetheilt wurde, geht in dieser Richtung noch wesentlich weiter.

§ 2.

Theorie der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen.

Aus Lagrange's Theorie der vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 1. O.:

$$F(x\,y\,z\,p\,q) = 0$$

folgt, wie Monge betonte, dass alle Integralflächen einer solchen Gleichung, die sich in einem Punkte berühren, eine Curve gemein haben und sich überdies längs dieser Curve berühren. Monge bezeichnete diese Curven[1]) als *Charakteristiken*; er fand, dass zu jeder Gleichung $F = 0$ (höchstens) ∞^3 Charakteristiken gehören, sowie dass jede Integralfläche ∞^1 Charakteristiken enthält. Hieraus zog er nun insbesondere den Schluss, dass durch jede Curve, die keine Charakteristik ist, sich nur eine Integralfläche hindurchlegen lässt.

Monge dehnte den Begriff Charakteristik, wenn auch in wenig präciser Form, auf partielle Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung in $x\,y\,z$ aus.

---

1) Monge's grosse Bedeutung für die Theorie der Differentialgleichungen beruht wesentlich darauf, dass er diese Disciplin durch Einführung einfacher Elementarbegriffe einer begrifflichen Auffassung zugänglich machte. Ihm und seinen Zeitgenossen fehlte die freie Auffassung der *Imaginären*, die Kenntniss des Begriffs der *n-fachen Räume*, sowie theilweise die functionentheoretische *Stringenz*.

Für Gleichungen zweiter Ordnung

$$F(x\,y\,z\,p\,q\,r\,s\,t) = 0$$

gestaltet sich diese Ausdehnung etwa folgendermassen:

MONGE bezeichnet auf jeder Integralfläche diejenigen Curven als Charakteristiken, die die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial r}dy^2 - \frac{\partial F}{\partial s}dy\,dx + \frac{\partial F}{\partial t}dx^2 = 0$$

erfüllen. Jede Integralfläche enthält somit ∞^1 MONGE'sche Charakteristiken, die, sobald der Ausdruck

$$4\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t} - \left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2$$

nicht verschwindet, in zwei verschiedene Schaaren zerfallen und somit die Fläche zweifach überdecken. Man definirt diese Curven am einfachsten *indirect*. Zieht man nämlich auf einer beliebigen Integralfläche eine Curve, die keine Charakteristik ist, so giebt es keine andere Integralfläche, die die gegebene Fläche nach dieser Curve *osculirt*.

In entsprechender Weise dehnt sich der Charakteristikenbegriff auf beliebige partielle Differentialgleichungen (in den Veränderlichen $x\,y\,z$) aus.

Diese Betrachtung führte MONGE und AMPÈRE zu Integrationstheorien, die jedenfalls einige partielle Differentialgleichungen von der Form

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0$$

auf *gewöhnliche* Differentialgleichungen zurückführen.

MONGE und AMPÈRE erkannten nämlich, dass es möglich ist, drei lineare Differentialgleichungen

$$(1)\quad a_k\,dx + b_k\,dy + c_k\,dz + d_k\,dp + e_k\,dq = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

aufzustellen, die von jeder Charakteristik der einen Schaar erfüllt werden. (Dem entsprechend befriedigen die Charakteristiken der zweiten Schaar ein analoges totales System, das hier zunächst nicht in Betracht kommt.) Es können nun mehrere wesentlich verschiedene Fälle eintreten. Wir wollen mit MONGE und AMPÈRE insbesondere den Fall berücksichtigen, dass das

totale System (1) integrabel ist, und zwar wollen wir annehmen, dass zwei und nur zwei unabhängige Integrale

$$u(xyzpq), \quad v(xyzpq)$$

vorhanden sind.

Längs einer Charakteristik haben auf jeder Integralfläche sowohl u wie v constante Werthe, die aber (im Allgemeinen) bei dem Uebergang zu einer anderen Charakteristik der betreffenden Fläche variiren. Auf jeder einzelnen Integralfläche sind daher u und v durch eine Relation

$$v - \varphi(u) = 0$$

gebunden, deren Form natürlicherweise für die verschiedenen Integralflächen nicht immer dieselbe ist.

Nun aber sind u und v bestimmte Functionen von $xyzpq$; dementsprechend ist die Gleichung

$$v - \varphi(u) = 0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, richtiger gesagt: die Gleichung

$$v - \varphi(u) = 0)$$

repräsentirt, wenn φ eine willkürliche Function bezeichnet, unendlich viele partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

Hieraus ergiebt sich, dass man die *allgemeinen* Integralflächen der vorgelegten Monge-Ampère'schen Gleichung zweiter Ordnung dadurch findet, dass man alle Integralflächen *aller* Gleichungen *erster* Ordnung

$$v - \varphi(u) = 0$$

aufsucht, und sodann unter ihnen alle herausgreift, die die vorgelegte Gleichung zweiter Ordnung erfüllen. Nun aber ist es leicht zu sehen, dass es eine und nur eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung giebt, die von den Integralflächen aller Gleichungen

$$v - \varphi(u) = 0$$

erfüllt wird. In der That: die beiden durch Differentiation gefundenen Gleichungen:

$$\frac{dv}{dx} - \varphi'(u) \cdot \frac{du}{dx} = 0$$

$$\frac{dv}{dy} - \varphi'(u) \cdot \frac{du}{dy} = 0$$

geben durch Elimination von $\varphi^1(u)$ die einzige Gleichung

$$\frac{dv}{dx}\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{du}{dx} = 0,$$

die offenbar eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt, die mit der vorgelegten Monge-Ampère'schen Gleichung identisch ist.

In dieser Weise ergiebt sich der schöne von Monge und Ampère erhaltene Satz:

Erfüllen auf den Integralflächen einer vorgelegten Monge-Ampère'schen Gleichung

$$Ar + Bs + Ct + D + E(rt - s^2) = 0$$

die charakteristischen Streifen erster Ordnung (der einen Schaar) zwei Gleichungen von der Form

$$u(xyzpq) = a = Const.$$

$$v(xyzpq) = b = Const.,$$

so lassen sich die allgemeinen Integralflächen dadurch finden, dass man das allgemeine intermediäre Integral

$$v - \varphi(u) = 0$$

aufstellt und die zugehörigen Integralflächen dieser partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung aufsucht.

Suchen wir insbesondere diejenige Integralfläche der vorgelegten Monge-Ampère'schen Gleichung (1), die eine gegebene Curve $x = X(t)$, $y = Y(t)$, $z = Z(t)$ enthält und längs ihr eine gegebene Developpable berührt, so berechnen wir zuerst vermöge der Gleichungen der Curve und der hinzutretenden Relationen $p = P(t)$, $q = Q(t)$ die beiden Grössen $u(xyzpq)$ und $v(xyzpq)$ als Functionen von t und finden sodann durch Elimination von t eine Relation $v - \varphi(u) = 0$, die als eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung aufzufassen ist; sodann sucht man diejenige Integralfläche dieser Gleichung *erster* Ordnung, die die

gegebene Curve enthält. — Auf die in speciellen Fällen möglichen Integrationsvereinfachungen gehen wir hier nicht ein.

Nehmen wir jetzt eine ganz beliebige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(xyzpqrst) = 0 .$$

Für alle Integralflächen erfüllen die charakteristischen Streifen zweiter Ordnung [1]) sechs lineare Differentialgleichungen von der Form

$$(2) \qquad a_k\,dx + b_k\,dy + c_k\,dz + d_k\,dp + e_k\,dq + f_k\,dr + g_k\,ds + h_k\,dt = 0 \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots 6)\,,$$

die ein totales System bilden.

Setzen wir nun mit Darboux voraus, dass dieses totale System integrabel ist und zwar zwei und nur zwei unabhängige Integrale

$$u\,(xyz \ldots rst)\,, \quad v\,(\ldots .)$$

besitzt. Dann haben auf jeder Integralfläche die Grössen u und v Werthe, die längs einer Charakteristik (der einen Schaar) nicht variiren, während sie bei dem Uebergang von einer Charakteristik zu einer anderen Charakteristik der betreffenden Integralfläche im Allgemeinen alle beide sich ändern. Hieraus zieht nun Darboux den Schluss, dass jede Integralfläche von $F = 0$ eine gewisse Gleichung von der Form

$$v - \varphi(u) = 0$$

erfüllt. Diese neue Gleichung ist aber, sobald die Form der Function φ gegeben ist, eine *partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die mit* $F = 0$ *gewisse Integralflächen gemein hat.*

Wir wollen, obgleich Darboux darauf nicht eingeht, diejenige Integralfläche von $F = 0$ suchen, die eine gegebene Curve

$$y = Y(x)\,, \quad z = Z(x)$$

1) Ich bezeichne eine Charakteristik als einen charakteristischen Streifen erster oder zweiter etc. Ordnung, wenn ich nicht allein die Werthe der Grössen x, y, z, sondern auch die Werthe der Differentialquotienten p, q, r, s, t, etc. längs der Charakteristik berücksichtige.

enthält und längs ihr eine gegebene Developpable berührt. Anders ausgesprochen: wir denken uns in meiner Terminologie einen Elementstreifen

$$y = Y(x)\,, \quad z = Z(x)\,, \quad p = P(x)\,, \quad q = Q(x)$$

gegeben und suchen die zugehörige Integralfläche von $F = 0$.

Jetzt genügen die Gleichungen:

$$P' = r + sY'\,, \quad Q' = s + tY'$$

zusammen mit $dF = 0$, jedenfalls im Allgemeinen, zur Bestimmung der Grössen r, s, t als Functionen von x für alle Punkte der gegebenen Curve. Diese Bestimmung wird nach MONGE und CAUCHY nur dann illusorisch, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & Y' & 0 \\ 0 & 1 & Y' \\ F_r & F_s & F_t \end{vmatrix} = F_r Y'^2 - F_s Y' + F_t$$

für alle Punkte der gegebenen Curve verschwindet, anders ausgesprochen, wenn die Curve als Charakteristik auftritt. Sehen wir von diesem Ausnahmefall ab, so erkennen wir durch ganz ähnliche Betrachtungen, dass nicht allein r, s, t, sondern auch die Ableitungen dritter und höherer Ordnung als Functionen von x längs der Curve bestimmt sind. Durch Einsetzung der Werthe:

$$y = Y(x)\,, \quad z = Z(x)\,, \quad p = P(x)\,, \quad q = Q(x)\,,$$
$$r = R(x)\,, \quad s = S(x)\,, \quad t = T(x)$$

finden wir daher, dass auch die Grössen $u\,(x \ldots t)$ und $v\,(x \ldots t)$ sich längs der Curve als Functionen von x:

$$u = U(x)\,, \quad v = V(x)$$

berechnen lassen. Sodann ergiebt sich durch Elimination von x eine ganz bestimmte Relation

$$v - \varphi(u) = 0\,,$$

die nur die Grössen u und v enthält. Da nun CAUCHY's allgemeine Theorie zeigt, dass zu den gegebenen Anfangsbedingungen wirklich eine Integralfläche von $F = 0$ gehört, da es andererseits sicher ist, dass es *eine* und nur eine Gleichung $v - \psi(u)$

$= 0$ giebt, die für *alle* Punkte unserer Integralfläche besteht, und da wir endlich wissen, dass die eben gefundene Gleichung $v - \varphi(u) = 0$ für ∞^1 Punkte unserer Integralfläche besteht, so können wir mit Sicherheit schliessen, dass gerade diese Gleichung $v - \varphi(u) = 0$ für *alle* Punkte unserer Fläche besteht. Wir zeigen später, wie sich hieraus die Bestimmung der Fläche ergiebt.

Darboux bemerkt nun, dass die linearen Differentialgleichungen (2) eine *Quadratwurzel* enthalten und somit factisch zwei totale Systeme darstellen. Er *beschränkt sich* auf den Fall, dass jedes unter diesen beiden totalen Systemen *zwei* unabhängige Integrale

$$u_1,\ v_1 \text{ und } u_2,\ v_2$$

besitzt. Alsdann erfüllt jede Integralfläche von $F = 0$ eine gewisse Gleichung $v_1 - \varphi_1(u_1) = 0$ und zugleich eine gewisse Gleichung $v_2 - \varphi_2(u_2) = 0$. Sind umgekehrt φ_1 und φ_2 beliebig gewählte Functionen ihrer Argumente, so findet Darboux, dass die drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$F = 0\,, \quad v_1 = \varphi_1(u_1) = 0\,, \quad v_2 - \varphi_2(u_2) = 0$$

immer ein unbeschränkt integrables System bilden; ihre ∞^4 gemeinsamen Integralflächen werden durch gewöhnliche Differentialgleichungen bestimmt.

Dies ist der Kern der Darboux'schen Theorie, die sich, wie er selbst angiebt, nach mehreren Richtungen ausdehnen lässt. Ganz besonders betrachtet er den Fall, dass für eine Gleichung zweiter Ordnung die beiden totalen Systeme der charakteristischen Streifen *irgend einer* Ordnung je zwei Integrale $u_1\, v_1$ und $u_2\, v_2$ haben. Er bemerkt, dass alsdann das Gleichungssystem

$$F = 0\,, \quad v_1 - \varphi_1(u_1) = 0\,, \quad v_2 - \varphi_2(u_2) = 0$$

immer unbeschränkt integrabel ist. In dieser Weise *integrirt Darboux durch gewöhnliche Differentialgleichungen alle partielle Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral Ampère's erster Classe angehört.*

Es ist sehr zu bedauern, dass Darboux seine so werthvollen und weitreichenden Untersuchungen nur ganz knapp skizzirt hat.

Daher enthalten seine Publicationen keineswegs die vollständige Verwerthung seiner neuen Ideen.

M. Levy[1]) vervollständigte gelegentlich Darboux's Theorie durch eine wichtige, wenn auch naheliegende Bemerkung. Levy betrachtete eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $F = 0$, die mit einer Gleichung zweiter oder höherer Ordnung Integralflächen gemein hat, deren analytischer Ausdruck nicht nur von arbiträren Constanten abhängt. Er erkannte, dass diese gemeinsamen Integralflächen charakteristische Streifen besitzen, die durch ein *simultanes* System gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmt werden.

Präciser gesagt: Levy erkannte, dass, sobald zwei solche Gleichungen zweiter Ordnung vorliegen, dass dann alle gemeinsame Integralflächen, die sich *in einem Punkte osculiren*, sich immer *längs einer Curve osculiren*, die für beide Differentialgleichungen eine Charakteristik darstellt.

Hieraus zog er nun den Schluss, dass eine Gleichung $F = 0$ zweiter Ordnung durch Integration simultaner Systeme *gewöhnlicher* Differentialgleichungen erledigt werden kann, sobald unter den beiden totalen Systemen der charakteristischen Streifen etwa m-ter Ordnung *auch nur das eine System* zwei unabhängige Integrale u, v besitzt. In dieser Weise *erledigte Levy partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren allgemeines Integral nicht Ampère's erster Klasse angehört.*

Levy gab an, dass man *drei Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen integriren müsste.*

Im Jahre 1874 *bemerkte ich, dass es* unter den von Levy vorausgetzten Umständen immer *genügt, zwei* simultane *Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zu integriren.* Nachdem nämlich durch Integration des so oft besprochenen totalen Systems zwei Grössen u, v gefunden waren, konnte man sich die Aufgabe stellen, diejenige Integralfläche von $F = 0$ zu finden, die eine gegebene Curve enthält und längs ihr eine vorgelegte Developpable berührt. Diese Anfangsbedingungen liefern (vgl. S. 64 u. ff.) vier Relationen

$$y = Y(x), \quad z = Z(x), \quad p = P(x), \quad q = Q(x),$$

die längs jener Curve die Grössen y, z, p, q als Functionen

1) Comptes rendus 1872.

von x bestimmen. Dabei erfüllen die Functionen Y, Z, P, Q eo ipso die Relation

$$Z' - P - QY' = 0.$$

Bezeichnen wir nun die Werthe von r, s, t längs dieser Curve mit $R(x)$, $S(x)$, $T(x)$, so erhalten wir zur Bestimmung dieser drei Grössen die Relationen

$$P' - R - SY' = 0, \quad Q' - S - TY' = 0,$$
$$F(xYZPQRST) = 0,$$

die im Allgemeinen nach R, S und T auflösbar sind. Setzen wir dabei der Einfachheit wegen voraus, dass u und v nur Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung enthalten, so erhalten wir sogleich eine Bestimmung von u und v als Functionen von x:

$$u = U(x), \quad v = V(x)$$

und sodann durch Elimination von x eine Relation:

$$v - \varphi(u) = 0.$$

Diese Gleichung hat nun nach Darboux Integralflächen mit $F = 0$ gemein, die nicht nur von arbiträren Constanten abhängen. Die zugehörigen charakteristischen Streifen werden nach Levy's Bemerkung durch Integration eines simultanen Systems gefunden. Unter diesen Streifen greift man diejenigen ∞^1 heraus, die mit dem Flächenstreifen

$$y = Y, \quad z = Z, \quad p = P, \quad q = Q, \quad r = R(x), \quad s = S(x), \quad t = T(x)$$

ein Werthsystem $x\ y\ z\ p\ q\ r\ s\ t$ gemein haben.

Hiermit ist die gesuchte Integralfläche von $F = 0$ gefunden [1].

Ich will andeuten, durch welche Betrachtungen ich ursprünglich die Richtigkeit von Levy's Angaben erkannte.

Nehmen wir zuerst eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung $F(xyzpq) = 0$. Betrachten wir nun alle Integralflächen einer solchen Gleichung, die ein Element $x\,y\,z\,p\,q$ gemein haben, so erfüllen die zugehörigen Werthe von r, s, t zwei *lineare* Gleichungen. Bildet man sodann die Gleichung

$$0 = \tfrac{1}{2} r (X - x)^2 + s (X - x)(Y - y) + \tfrac{1}{2} t (Y - y)^2 + \cdots,$$

---

1) Lie, Verhandl. der Ges. der Wissensch. zu Christiania 1874, S. 274.

die die DUPIN'sche Indicatrix aller dieser Flächen darstellt, so sieht man, dass diese Curven zweiter Ordnung ein *Büschel* bilden, und dass überdies dieses Büschel aus ∞^1 concentrischen *Kegelschnitten* besteht, die *einander in zwei Punkten berühren.* Diese Bemerkung führt unmittelbar zu *dem* Satze, der für LAGRANGE's und MONGE's Integrationstheorie der Gleichung $F(xyzpq) = 0$ die Grundlage bildet, nämlich zu dem Satze: Haben zwei Integralflächen einer Gleichung $F(xyzpq) = 0$ ein Element $xyzpq$ gemeinsam, so haben sie auch ein benachbartes Element gemein.

Setzen wir nun andererseits mit DARBOUX und LEVY voraus, dass zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$r - f(sxyzpq) = 0, \quad t - \varphi(xyzpqs) = 0$$

vorliegen, die ∞^∞ gemeinsame Integralflächen haben und somit jedenfalls die Bedingung $f'\varphi' - 1 = 0$ erfüllen, so erkennt man unmittelbar, dass die Indicatrixcurven *dritter* Ordnung dieser Flächen

$$\alpha(X-x)^3 + 3\beta(X-x)^2(Y-y) + 3\gamma(X-x)(Y-y)^2 + \delta(Y-y)^3 = 0$$

∞^1 Curven dritter Ordnung sind, die sich osculiren.

Hieraus folgt unmittelbar, dass *alle gemeinsame Integralflächen, die sich in einem Punkte osculiren, sich längs einer Curve osculiren.*

Kapitel 2.

Vervollständigung der Theorie der Monge'schen Charakteristiken.

Nachdem es mir gelungen war, die im vorigen Kapitel resumirten Theorien von MONGE, AMPÈRE, DARBOUX und LEVY vollständig zu verstehen, was wegen der knappen Redaction besonders von LEVY's Untersuchungen immerhin eine gewisse selbstständige Arbeit verlangte, sah ich sogleich, dass die von DARBOUX herrührenden neuen Ideen nicht vollständig von LEVY verwerthet waren. Ich begnügte mich vorläufig damit, im Februar 1880 in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaft zu Christiania einige Methoden zu skizziren, die factisch die von meinen Vorgängern herrührende Theorie der Charakteristiken wesentlich vervollständigen. Indem ich diese meine alten Theorien in diesem Kapitel ausführlicher darstelle, halte ich es für zweckmässig, zuerst meine gewöhnliche Terminologie zu erklären.

Wir sagen, dass ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$F_1(xyzpqrst) = 0, \quad F_2(\cdots) = 0 \tag{3}$$

unbeschränkt integrabel ist, wenn sie gemeinsame Integralflächen besitzen, die keine weiteren Differentialgleichungen zweiter oder erster Ordnung erfüllen. Dabei sind aber nach Darboux's allgemeiner Theorie zwei und nur zwei Fälle denkbar, je nachdem die Gleichungen ∞^4 oder ∞^∞ gemeinsame Integralflächen besitzen. Im letzten Falle sage ich, dass unser unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung ein *Involutionssystem* oder Darboux'sches System bildet.

Dem entsprechend sage ich, dass ein System von partiellen Differentialgleichungen m-ter Ordnung *unbeschränkt integrabel* ist, wenn sie gemeinsame Integralgebilde besitzen, die keine weitere Gleichung m-ter oder niedrigerer Ordnung erfüllen. Ich bezeichne ferner ein unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen als ein Darboux'sches System, wenn die gemeinsamen Integralgebilde nicht nur von arbiträren Constanten abhängen. Insbesondere bezeichne ich ein Darboux'sches System als ein *Involutionssystem*, wenn die Zahl der gemeinsamen Integralgebilde ihren Maximumwerth hat.

In dem speciellen von uns zuerst betrachteten Falle (3) ist jedes Darboux'sche System ein *Involutionssystem*. Dies gilt aber keineswegs immer. Die Regel ist, dass unter den unbeschränkt integrablen Systemen sich mehrere *verschiedene* Klassen finden, die nach meiner Terminologie als Darboux'sche zu bezeichnen sind. Unter diesen Klassen bilden die *Involutionssysteme* eine Klasse für sich, die als die unbedingt *wichtigste* zu betrachten ist.

Wir wollen nun zuerst das von Levy gefundene Resultat nochmals ableiten.

Wir wenden uns also zu den *unbeschränkt integrablen* Systemen zweiter Ordnung:

$$F_1(xyzpqrst) = 0\,, \quad F_2(\cdot\cdot\cdot\cdot) = 0\,.$$

Greifen wir unter allen Integralflächen eines solchen Systems ∞^3 heraus, so können wir diese ∞^3 Flächen in unendlich vielen Weisen in ∞^1 Schaaren anordnen, die etwa durch die Gleichung

$$\Phi(xyz\,ab) = c$$

definirt werden. Hier sind a, b, c arbiträre Constanten, unter

denen die Constante c für alle Flächen einer Schaar einen bestimmten Werth hat. Bildet man die beiden Gleichungen

$$\Phi_x + \Phi_z p = 0\,, \quad \Phi_y + \Phi_z q = 0$$

und eliminirt sodann die Parameter a und b zwischen diesen beiden Gleichungen und $\Phi = c$, so erhält man eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$V(xyzpq) = c\,,$$

die für jeden Werth des Parameters c (mindestens) ∞^2 Integralflächen mit den beiden Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ gemein hat. Man kann sich daher, sobald ein unbeschränkt integrables System $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ vorliegt, *die Aufgabe stellen, alle Gleichungen* $V(xyzpq) = c$ *zu finden, die für jeden Werth von* c (mindestens) ∞^2 *Integralflächen mit* $F_1 = 0$ *und* $F_2 = 0$ *gemein haben.* Diese Forderung kommt darauf hinaus, dass die vier Gleichungen zweiter Ordnung

$$F_1 = 0\,, \quad F_2 = 0$$
$$V_x + V_z p + V_p r + V_q s = 0$$
$$V_y + V_z q + V_p s + V_q t = 0$$

(mindestens) ∞^3 gemeinsame Integralflächen haben sollen.

Eliminiren wir r, s und t zwischen diesen Gleichungen, so erhalten wir eine oder unter Umständen zwei Gleichungen, die die Form

$$\Omega(xyzpq\ V_x\ V_y\ V_z\ V_p\ V_q) = 0$$

besitzen und dabei in V's Differentialquotienten homogen sind.

Indem wir nun weiter gehen, können wir ohne wesentliche Beschränkung annehmen, dass die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ in der Form

$$r + R(xyzpqs) = 0\,, \quad t + T(\cdots) = 0$$

vorliegen[1]. Differentiiren wie diese beiden Gleichungen nach x und y, so erhalten wir zur Bestimmung der Differentialquotienten dritter Ordnung α, β, γ, δ die Relationen

1) Auf diese Form lässt sich nämlich unser Gleichungssystem immer durch eine passende Berührungstransformation bringen.

$$\begin{aligned}
\alpha + R_s\beta + \quad\quad \cdots &= 0 \\
\beta + R_s\gamma + \cdots &= 0 \\
T_s\beta + \gamma \quad + \cdots &= 0 \\
T_s\gamma + \delta + \cdots &= 0
\end{aligned}$$

Ist nun die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & R_s & 0 \\ 0 & T_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & T_s & 1 \end{vmatrix} = 1 - T_s R_s \equiv 1 - T'R'$$

von Null verschieden, so hat unser *unbeschränkt integrables* System gerade ∞^4 Integralflächen. Verschwindet dagegen diese Determinante identisch, so ist das System $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ ein Darboux'sches, oder, was jetzt auf dasselbe hinauskommt, ein *Involutionssystem*.

Eliminiren wir zwischen den vier Gleichungen

$$\begin{gathered}
r + R = 0\,, \quad t + T = 0 \\
V_x + V_z p + V_p r + V_q s = 0 \\
V_y + V_z q + V_p s + V_q t = 0
\end{gathered}$$

die Grössen r, s und t, so erhalten wir *eine* oder *zwei* partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zur Bestimmung von V als Function der fünf Veränderlichen $xyzpq$, je nachdem in der Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & R' & 0 \\ 0 & T' & 1 \\ V_p & V_q & 0 \\ 0 & V_p & V_q \end{vmatrix}$$

die dreireihigen Determinanten

$$V_q - R'V_p\,, \quad T'V_q - V_p\,, \quad V_q(V_q - R'V_p)\,, \quad V_p(T'V_q - V_p)$$

sämmtlich identisch verschwinden oder nicht. Man übersieht hier unmittelbar, dass die beiden Ausdrücke $V_q - R'V_p$ und $T'V_q - V_p$ jedenfalls nur dann verschwinden können, wenn

$1 - R'T' = 0$ ist, das heisst, wenn die Gleichungen: $r + R = 0$, $t + T = 0$ ein Involutionssystem bilden. In diesem Falle wären aber die Grössen

$$R' = \frac{V_q}{V_p}, \quad T' = \frac{V_p}{V_q}$$

Functionen von $xyzpq$ und dementsprechend hätten R und T die Form

$$R = s\frac{V_q}{V_p} + m(xyzpq) = as + m$$

$$T = s\frac{V_p}{V_q} + n(xyzpq) = \frac{1}{a}s + n.$$

Infolge dessen fiele die Grösse s aus den Gleichungen

$$V_x + V_z p - V_p\left(s\frac{V_q}{V_p} + m\right) + V_q s = 0,$$

$$V_y + V_z q + V_p s - V_q\left(s\frac{V_p}{V_q} + n\right) = 0$$

heraus und es müsste also V die Gleichungen

$$V_x + V_z p - m V_p = 0, \quad V_y + V_z q - n V_q = 0,$$
$$V_q - a V_p = 0$$

erfüllen, die partielle Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen. Alsdann wäre aber $V = c$ ein gemeinsames *intermediäres* Integral der Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, und von diesem Falle können wir hier absehen.

Liegt also ein unbeschränkt integrables System von zwei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vor:

$$F_1(xyzpqrst) = 0, \quad F_2(\cdot\cdot\cdot) = 0,$$

so sind die drei folgenden Fälle denkbar.

Unsere Gleichungen können *ein* gemeinsames intermediäres Integral

$$W(xyzpq) = c$$

besitzen, das durch Integration einer gewöhnlichen Differential-

gleichung erster Ordnung gefunden wird. In diesem Falle ist das Gleichungssystem $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ *äquivalent* mit dem Inbegriff der beiden Gleichungen

$$\frac{dW}{dx} = 0, \quad \frac{dW}{dy} = 0.$$

Es ist ferner denkbar, dass die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ *grade* ∞^4 Integralflächen besitzen, deren Bestimmung durch die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung vierter Ordnung geleistet wird. Es ist endlich denkbar, dass $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ ∞^∞ gemeinsame Integralflächen besitzen, unter denen aber nie mehr als ∞^3 vorhanden sind, die eine bestimmte partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung erfüllen.

Zur Unterscheidung dieser drei Fälle führen die nachstehenden Kriterien.

Man bringt die beiden Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ auf die Form

$$r + R(xyzpqs) = 0, \quad t + T(\cdots) = 0$$

und bildet sodann die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} V_x + V_z p - V_p R + V_q s = 0 \\ V_y + V_z q + V_p s - V_q T = 0\,; \end{cases}$$

fällt nun die Grösse s von selbst aus diesen beiden linearen partiellen Differentialgleichungen heraus, so liegt der erste Fall vor. Es besitzen dann R und S die Formen:

$$R = a(xyzpq)s + m(xyzpq)$$

$$S = \frac{s}{a} + n(xyzpq),$$

und es bestimmen die drei linearen partiellen Differentialgleichungen

$$V_q - a\,V_p = 0$$

$$V_x + p\,V_z - m\,V_p = 0$$

$$V_y + q\,V_z - n\,V_q = 0$$

zusammen mit einer vierten durch Klammeroperation gefundenen Gleichung ein vollständiges System, das eine und nur eine

Lösung $V = W(xyzpq)$ besitzt; alsdann ist $W = c$ das gesuchte intermediäre Integral.

Sind die hiermit angegebenen Kriterien nicht erfüllt, so findet man durch Elimination von s eine einzige partielle Differentialgleichung

$$\Omega(xyzpq\, V_x\, V_y\, V_z\, V_p\, V_q) = 0\,,$$

die V als Function von $xyzpq$ bestimmt und dabei in den Differentialquotienten $V_x \ldots$ homogen ist.

Ist nun $V(xyzpq)$ eine beliebige Lösung von $\Omega = 0$, so bilden die Gleichungen

$$F_1 = 0\,, \quad F_2 = 0\,, \quad V = c$$

für jeden Werth der Constante c ein unbeschränkt integrables System mit ∞^2 gemeinsamen Integralflächen. Es giebt jetzt selbstverständlich immer ∞^∞ verschiedene Gleichungen $V = c$, deren jede wie gesagt ∞^2 Integralflächen des Systems $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ liefert.

Es ist aber wohl zu beachten, dass hieraus keineswegs ohne weiteres folgt, dass die vorgelegten Gleichungen $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ ∞^∞ gemeinsame Integralflächen haben. Dies tritt ein dann und nur dann, wenn die Grösse $R_s T_s - 1$ identisch verschwindet. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so haben die Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ nur ∞^4 gemeinsame Integralflächen.

Liegt daher ein *unbeschränkt* integrables System zweiter Ordnung

(5) $$F_1(xyzpqrst) = 0\,, \quad F_2(\ldots) = 0$$

vor, so ist es unter allen Umständen naturgemäss, partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

$$V(xyzpq) = c$$

zu suchen, die von mindestens ∞^2 gemeinsamen Integralflächen der vorgelegten Gleichungen erfüllt werden. Man eliminirt zu diesem Zwecke die Grössen r, s, t zwischen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ und den beiden Gleichungen

$$V_x + V_z p + V_p r + V_q s = 0$$
$$V_y + V_z q + V_p s + V_q t = 0$$

und erhält dadurch, wenn wir von dem Falle absehen, dass $F_1 = 0$ und $F_2 = 0$ ein gemeinsames *intermediäres* Integral haben, eine einzige partielle Differentialgleichung 1. O:

$$\Omega(xyzpq\ V_x V_y V_z V_p V_q) = 0\,,$$

die V als Function der Grössen $xyzpq$ bestimmt. Wir wollen zeigen, dass diese partielle Differentialgleichung $\Omega = 0$ immer *semilinear* [1]) ist. Wir zeigen ferner, dass wenn

$$z = f(xy)$$

eine gemeinsame Integralfläche der beiden Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ darstellt, dass dann die drei Gleichungen

$$z = f(xy)\,, \quad p = f_x\,, \quad q = f_y$$

im *fünf*dimensionalen Raume $xyzpq$ immer eine *zwei*dimensionale Punktmannigfaltigkeit darstellen, die in meinem Sinne ein *wirkliches Integralgebilde* der partiellen Differentialgleichung *erster* Ordnuug $\Omega = 0$ liefert.

Es sei in der That

$$z = f(xyabc)$$

die Gleichung von ∞^3 gemeinsamen Integralflächen der beiden Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$. Es existiren dann (vgl. S. 71, 72) unendlich viele solche Functionen $V(xyzpq)$, dass die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$V_x + V_z p + V_p r + V_q s = 0$$
$$V_y + V_z q + V_p s + V_q t = 0$$

bei der Substitution $z = f$ erfüllt werden, welche Werthe auch die drei Parameter abc haben.

Lösen wir daher die Gleichungen $z = f$, $p = f_x$, $q = f_y$ nach abc auf:

$$a = A(xyzpq)\,, \quad b = B\,, \quad c = C$$

und führen sodann die Bezeichnuug

$$\Phi(xyABC) \equiv \overline{\Phi}(xyabc)$$

---

1) Vgl. meine Note in den Gött. Nachrichten October 1872, S. 480 u. f.

ein, so sehen wir, dass die oben betrachteten Functionen V und f immer die Relationen

$$(6)\quad \begin{cases} V_x + V_z\overline{f_x} + V_p\overline{f_{xx}} + V_q\overline{f_{xy}} \equiv 0 \\ V_y + V_z\overline{f_y} + V_p\overline{f_{xy}} + V_q\overline{f_{yy}} \equiv 0 \end{cases}$$

identisch erfüllen.

Nun aber bestehen die Relationen

$$(7)\qquad F_1(xyzpq\,\overline{f_{xx}}\,\overline{f_{xy}}\,\overline{f_{yy}}) = 0\,,\quad F_2(\cdots) = 0$$

ebenfalls identisch. Also muss, wie schon früher bemerkt, auch die durch Elimination der Grössen $\overline{f_{xx}}\ \overline{f_{xy}}\ \overline{f_{yy}}$ zwischen (6) und (7) hervorgehende Gleichung

$$\Omega(xyzpq\ V_x\,V_y\,V_z\,V_p\,V_q) = 0$$

identisch bestehen. Dabei ist es unsere einzige Voraussetzung, dass die Function V so gewählt ist, dass eine jede unter den ∞^4 Gleichungen $V = c$ (mindestens) ∞^2 Integralflächen mit den beiden Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ gemein hat.

Setzen wir jezt fortwährend voraus, dass die Gleichung $z = f(xyabc)$ uns ∞^3 gemeinsame Integralflächen der beiden Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ liefert, und schreiben wiederum:

$$\Psi(xyABC) \equiv \overline{\Psi}\,,$$

so findet unsere Voraussetzung wiederum darin ihren analytischen Ausdruck, dass die Gleichungen

$$(8)\qquad F_1(xyzpq\,\bar{f}_{xx}\,\bar{f}_{xy}\,\bar{f}_{yy}) = 0\,,\quad F_2(\cdots) = 0$$

identisch bestehen. Es bestimmen nun die Gleichungen

$$z = f(xyabc)\,,\quad p = f_x\,,\quad q = f_y$$

im *fünf*fachen Raume $xyzpq$ ∞^3 zweidimensionale Punktmannigfaltigkeiten, deren jede ∞^4 *Elemente* besitzt, deren Coordinaten (Math. Ann. Bd. IX, S. 250—251)

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ V_x : V_y : V_z : V_p : V_q$$

durch die fünf Gleichungen

$$z = f, \quad p = f_x, \quad q = f_y$$
$$V_x + V_z f_x + V_p f_{xx} + V_q f_{xy} = 0$$
$$V_y + V_z f_y + V_p f_{xy} + V_q f_{yy} = 0$$

bestimmt sind. Diese ∞^3 Punktmannigfaltigkeiten besitzen somit zusammen $\infty^3\, \infty^4 = \infty^7$ Elemente, die aus der Schaar aller ∞^9 Elemente des *fünf*fachen Raumes durch die beiden Gleichungen

$$(9) \qquad \begin{cases} V_x + V_z p + V_p \overline{f_{xx}} + V_q \overline{f_{xy}} = 0 \\ V_y + V_z p + V_p \overline{f_{xy}} + V_q \overline{f_{yy}} = 0 \end{cases}$$

ausgeschieden werden.

Besitzen die beiden partiellen Differentialgleichungen $F_1(x \cdots t) = 0$, $F_2 = 0$, wie wir angenommen haben, mehr als ∞^3 gemeinsame Integralflächen, so können die beiden Gleichungen (9) ∞^∞ verschiedene Formen haben. Es ist aber leicht zu sehen, dass unsere ∞^7 Elemente im fünffachen Raume immer *eine* Gleichung erfüllen, die eine ganz bestimmte Form besitzt. Es ist dies die Gleichung

$$\Omega(xyzpq\, V_x\, V_y\, V_z\, V_p\, V_q) = 0\,,$$

die, wie wir wissen, hervorgeht, wenn die Grössen $\overline{f_{xx}}, \overline{f_{xy}}, \overline{f_{yy}}$ zwischen den Gleichungen (8) und (9) eliminirt werden.

Hiermit ist nachgewiesen, dass, wie früher angekündigt, die partielle Differentialgleichung erster Ordnung $\Omega(\cdots) = 0$ im Raume $xyzpq$ von jeder zweidimensionalen Punktmannigfaltigkeit $y = f$, $p = f_x$, $q = f_y$ erfüllt wird, sobald die Gleichung $z = f$ im dreidimensionalen Raume xyz eine Fläche darstellt, die die beiden Gleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ befriedigt.

Wenn das unbeschränkt integrable System $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ im Raume xyz nur ∞^4 Integralflächen $z = \varphi(xyabcd)$ besitzt, ist dieses Resultat trivial. Denn dann bestimmen die Gleichungen

$$z = \varphi(xyabcd)\,, \quad p = \varphi_x\,, \quad q = \varphi_q$$

im Raume $xyzpq$ gerade ∞^4 zweidimensionale Punktmannigfaltigkeiten, deren $\infty^4\, \infty^4 = \infty^8$ Elemente

$$x, y, z, p, q, V_x : V_y : V_z : V_p : V_q$$

selbstverständlich eine und nur eine Gleichung

$$\Theta(xyzpq\,V_x\,V_y\,V_z\,V_p\,V_q) = 0$$

erfüllen. Dabei liefern jene ∞^4 Punktmannigfaltigkeiten eo ipso in meiner Terminologie eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $\Theta = 0$.

Dagegen besitzt das erhaltene Resultat sogar ein hervorragendes Interesse, sobald die beiden partiellen Differentialgleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ ein Involutionssystem bilden, wenn sie also ∞^∞ gemeinsame Integralflächen $z = f$ besitzen.

Denn aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. O. ist bekannt, dass *jedes* wirkliche Integralgebilde (d. h. jedes Integralgebilde, das die grösstmögliche Anzahl Elemente enthält) von charakteristischen Streifen erzeugt ist. Insbesondere ist es bekannt, dass die Integralgebilde der Gleichung $\Omega = 0$ von den vorhandenen ∞^7 charakteristischen Streifen erzeugt sind, und dass dabei jedes Integralgebilde ∞^3 charakteristische Streifen enthält. Wir behaupten, dass der *Punktort* eines Streifens im fünffachen Raume eine Curve und kein Punkt ist; anders ausgesprochen: wir behaupten, dass die Grössen $xyzpq$ nicht für jeden charakteristischen Streifen constante Werthe haben können; dies folgt unmittelbar daraus, dass jedenfalls einige unter den fünf Grössen $V_x\,V_y\,V_z\,V_p\,V_q$ in $\Omega = 0$ vorkommen müssen. Wir fügen hinzu, dass auch nicht die drei Grössen x, y, z für jeden charakteristischen Streifen constante Werthe haben können; dies folgt daraus, dass die Zahl der vorhandenen zweidimensionalen Integralgebilde mindestens ∞^4 ist, und dass die Zahl aller zweidimensionalen Integralgebilde keine andere partielle Differentialgleichung 1. O. als $\Omega = 0$ erfüllen, sodass jeder charakteristische Streifen mindestens zu einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $z = f$, $p = f_x$, $q = f_y$ gehört. Hierin liegt nämlich, dass, sobald xyz oder auch nur xy für einen charakteristischen Streifen constante Werthe haben, dass dann zpq ebenfalls für diesen Streifen constante Werthe haben müssen. Die ∞^7 charakteristischen Streifen im fünffachen Raume sind daher dargestellt durch $\Omega = 0$ und sieben hinzutretende Gleichungen zwischen den Grössen

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ V_x : V_y : V_z : V_p : V_q$$

und *sieben* arbiträren Constanten, aus denen *zwei* und nur zwei

Gleichungen zwischen xyz und den arbiträren Constanten sich ableiten lassen:

$$\varphi_1(xyzc_1 \ldots c_7) = 0\,, \quad \varphi_2(\ldots) = 0\,.$$

Hieraus folgt aber, dass im dreifachen Raume die Flächen $z = f$ sämmtlich von unendlich vielen Curven erzeugt werden, die der Schaar $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ gehören.

Es lässt sich nun nachweisen, dass die Curvenschaar $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ nicht ∞^7, sondern nur ∞^5 Curven umfasst, und dementsprechend, dass im fünffachen Raume zwar die Zahl der charakteristischen Streifen gleich ∞^7, dass dagegen die Zahl der charakteristischen Curven auch in diesem Raume gerade ∞^5 ist[1]).

Da nämlich die Zahl der vorhandenen zweidimensionalen Integralgebilde der Gleichung $\Omega = 0$ durch das Symbol ∞^∞ ausgedrückt wird, so kann jedes Integralgebilde nur ∞^1 charakteristische Curven enthalten. Hieraus folgt, dass im fünffachen Raume jede charakteristische Curve den Punktort von ∞^2 charakteristischen Streifen darstellt.

Hieraus folgt ferner, dass durch jeden Punkt des fünffachen Raumes nur ∞^1 charakteristische Curven gehen. Diese Curven erfüllen daher *drei* nichtlineare Gleichungen von der Form

$$\varphi(xyzpq\,dx\,dy\,dz\,dp\,dq) = 0\,.$$

Nimmt man im fünffachen Raume eine beliebige Curve, die diese drei Gleichungen erfüllt, und construirt die ∞^1 berührenden Charakteristiken, so erhält man immer ein zweidimensionales *wirkliches* Integralgebilde der Gleichung $\Omega = 0$ und gleichzeitig eine Integralfläche des Involutionssystems $F_1 = 0$, $F_2 = 0$.

Hiermit hat nach meiner Ansicht Levy's Theorie ihre wahre Form erhalten. Jetzt ist die Verallgemeinerung naheliegend.

---

1) Schon in meiner ersten Arbeit über die allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen lenkte ich die Aufmerksamkeit auf solche partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche die Zahl der charakteristischen Streifen grösser als die Zahl der charakteristischen Curven ist. (Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1872, kurzes Resumé ...) Bei einer anderen Gelegenheit werde ich u. A. auf die wichtigen Beziehungen zwischen den beiden Begriffen: Darboux'sches System und *Involutions*system eingehen.

Wir betrachten jetzt ein unbeschränkt integrables System erster Ordnung, bestehend aus drei Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{F}_1(xyz_1z_2p_1q_1p_2q_2) = 0\,, \quad \mathfrak{F}_2 = 0\,, \quad \mathfrak{F}_3 = 0\,,$$

die z_1 und z_2 als Functionen von xy bestimmen. Erfüllen

$$z_1 = f(xy)\,, \quad z_2 = \varphi(xy)$$

dieses System, so definiren diese beiden Gleichungen im vierfachen Raume xyz_1z_2 eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Da unser System $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, $\mathfrak{F}_3 = 0$ unbeschränkt integrabel sein soll, so existiren mindestens ∞^3 solche zweifach ausgedehnte Integral-Mannigfaltigkeiten. Ist nun die Zahl dieser Mannigfaltigkeiten gerade ∞^3, so folgt es unmittelbar aus meinen allgemeinen Theorien, dass eine ganz bestimmte *semilineare* partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\Phi\left(xyz_1z_2\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z_1}\frac{\partial V}{\partial z_2}\right) = 0$$

vorhanden ist, für welche diese ∞^3 Mannigfaltigkeiten in meinem Sinne des Wortes Lösungen sind, und überdies eine vollständige Lösung bilden. Es ist aber, jedenfalls von vornherein, überraschend, dass unsre Integral-Mannigfaltigkeiten $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ auch dann Lösungen einer partiellen Differentialgleichung $\Phi = 0$ darstellen, wenn ihre Anzahl grösser als ∞^3 ist.

Unter den Integral-Mannigfaltigkeiten des *Involutionssystems* $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, $\mathfrak{F}_3 = 0$ denken wir uns ∞^2 herausgegriffen, die keine von Parametern freie endliche Relation $\psi(xyz_1z_2) = 0$ erfüllen. Diese Mannigfaltigkeiten befriedigen zwei endliche Relationen zwischen xyz_1z_2 und zwei Parametern a und b. Die eine unter diesen Relationen denken wir uns auf die Form

$$V(xyz_1z_2a) - b = 0$$

gebracht, und sodann nach x und y differentiirt:

$$V_x + V_{z_1}p_1 + V_{z_2}p_2 = 0$$
$$V_y + V_{z_1}q_1 + V_{z_2}q_2 = 0\,.$$

Eliminiren wir sodann zwischen diesen beiden Gleichungen und $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, $\mathfrak{F}_3 = 0$ die Grössen $p_1p_2q_1q_2$, so erhalten wir

eine (und wie wir hier ohne weitere Discussion annehmen können, nur eine) Relation von der Form

$$\Omega(x y z_1 z_2 V_x V_y V_{z_1} V_{z_2}) = 0 ,$$

also eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir wollen beweisen, dass diese partielle Differentialgleichung *semilinear* ist, und dass *jede* Integral-Mannigfaltigkeit $z_1 = f(x y)$, $z_2 = \varphi(x y)$ unseres Involutionssystems (A) eine Lösung von $\Omega = 0$ darstellt.

Zum Beweis nehmen wir ∞^2 beliebige Integral-Mannigfaltigkeiten

$$z_1 = f(x y a b) , \quad z_2 = \varphi(x y a b)$$

des Involutionssystems (A) und bemerken, dass jede derartige Mannigfaltigkeit ∞^3 *Elemente* besitzt, deren Coordinaten

$$x y z_1 z_2 , \quad V_x : V_y : V_{z_1} : V_{z_2}$$

nach meinen allgemeinen Theorien durch $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ zusammen mit den beiden Gleichungen

$$V_x + V_{z_1} f_x + V_{z_2} \varphi_x = 0$$

$$V_y + V_{z_2} f_y + V_{z_1} \varphi_y = 0$$

bestimmt sind. Geben nun $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ durch Auflösung

$$a = A(x y z_1 z_2) , \quad b = B(x y z_1 z_2)$$

und wird zur Abkürzung

$$\psi(x y A B) \equiv \overline{\psi}$$

gesetzt, so liefern die Formeln

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} V_x + V_{z_1} \overline{f_x} + V_{z_2} \overline{\varphi_x} = 0 \\ V_y + V_{z_1} \overline{f_y} + V_{z_2} \overline{\varphi_y} = 0 \end{cases}$$

zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Lösungen die ∞^2 gewählten Integral-Mannigfaltigkeiten $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ des Involutionssystems $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, $\mathfrak{F}_3 = 0$ darstellen. Die Form der beiden Gleichungen (B) beruht nun mehr oder weniger darauf, welche Integral-Mannigfaltigkeiten des Involutionssystems grade gewählt wurden. Es ist aber

möglich, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung von ganz bestimmter Form zu finden, die von *allen* Integral-Mannigfaltigkeiten des Involutionssystems befriedigt wird. In der That, es bestehen die drei Gleichungen

$$\mathfrak{F}_k(x\,y\,f\,\varphi\,f_x\,\varphi_x\,f_y\,\varphi_y) = 0$$

identisch in $x y a b$, welche ∞^2 Integral-Mannigfaltigkeiten des Involutionssystems wir auch gewählt haben. Dementsprechend bestehen die drei Gleichungen

$$\mathfrak{F}_k(x\,y\,z_1\,z_2\,\overline{f_x}\,\overline{\varphi_x}\,\overline{f_y}\,\overline{\varphi_y}) = 0$$

ebenfalls immer identisch und zwar in $x y z_1 z_2$.

Eliminirt man daher die vier Grössen $\overline{f_x}\,\overline{\varphi_x}\,\overline{f_y}\,\overline{\varphi_y}$ zwischen den drei letzten Relationen und den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (B), so wird die hervorgehende partielle Differentialgleichung 1. O.:

$$\Omega(x\,y\,z_1\,z_2\,V_x\,V_y\,V_{z_1}\,V_{z_2}) = 0,$$

deren Form offenbar eine ganz bestimmte ist, von *jeder* Integral-Mannigfaltigkeit des Involutionssystems $\mathfrak{F}_1 = 0, \ldots \mathfrak{F}_3 = 0$ erfüllt.

Hiermit ist die Richtigkeit meiner früher aufgestellten Behauptung erwiesen.

Wir ziehen nun hieraus den fundamentalen Schluss, dass jede Integral-Mannigfaltigkeit des Involutionssystems von Charakteristiken erzeugt ist. Unsere partielle Differentialgleichung $\Omega = 0$ im vierfachen Raume $x y z_1 z_2$ hat ∞^5 charakteristische Streifen. Jede Integral-Mannigfaltigkeit des Involutionssystems (A) aufgefasst als Integralgebilde von $\Omega = 0$ enthält ∞^2 charakteristische *Streifen*. Hieraus folgt aber keineswegs, dass jede Integral-Mannigfaltigkeit ∞^2 verschiedene charakteristische *Curven* enthält. Das kann auch nicht der Fall sein, weil sonst nicht ∞^∞ verschiedene zweidimensionale Integral-Mannigfaltigkeiten des Involutionssystems (A) vorhanden sein könnten.

Jede zweidimensionale Integral-Mannigfaltigkeit $z_1 = f$, $z_2 = \varphi$ unseres Involutionssystems $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, $\mathfrak{F}_3 = 0$ enthält somit zwar ∞^2 verschiedene charakteristische Streifen, dagegen aber nur ∞^1 verschiedene charakteristische Curven. Jede solche Curve ist der Ort von ∞^1 charakteristischen Streifen.

Die semilineare partielle Differentialgleichung $\Omega = 0$ hat somit zwar im vierfachen Raume ∞^5 charakteristische *Streifen*; dagegen aber nur ∞^4 charakteristische *Curven*, unter denen jedesmal ∞^1 durch einen Punkt $x\, y\, z_1\, z_2$ allgemeiner Lage gehen.

Hieraus ziehen wir nun zunächst den Schluss, dass jedem Punkte $x\, y\, z_1\, z_2$ ein Elementarkegel zugeordnet ist, der nur ∞^1 Fortschreitungsrichtungen enthält, und somit nicht durch *eine* Monge'sche Gleichung, sondern durch zwei solche Gleichungen

$$\Phi_1(x y z_1 z_2\, dx_1\, dy_1\, dz_1\, dz_2) = 0\,, \quad \Phi_2 = 0$$

definirt wird.

Wir schliessen ferner, dass der *Punktort* aller ∞^2 charakteristischen Streifen, die durch einen Punkt gehen, eine zweidimensionale Punkt-Mannigfaltigkeit ist, die eo ipso eine Integral-Mannigfaltigkeit des Involutionssystems ist.

Es ist wohl zu beachten, dass die hiermit gefundenen Eigenschaften unserer Gleichung $\Omega = 0$ keineswegs unmittelbar daraus hervorgehen, dass diese partielle Differentialgleichung erster Ordnung *semilinear* ist.

Liegt überhaupt eine semilineare Gleichung in vier Veränderlichen $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ vor

$$\Pi(x_1 x_2 x_3 x_4 p_1 p_2 p_3 p_4) = 0\,,$$

so kann man[1]), wenn den x feste Werthe ertheilt werden und die p als homogene Ebenencoordinaten in einem dreifachen Raume gedeutet werden, schliessen, dass $\Pi = 0$ in diesem dreifachen Raume eine *Regelfläche* darstellt. In dem vorliegenden Falle kommt etwas hinzu, nämlich dass die Regelfläche sich auf eine Curve des dreifachen Raumes reducirt.

Es lassen sich hier noch weitere Schlüsse ziehen. Es giebt offenbar im Raume $x y z_1 z_2$ unendlich viele und zwar ∞^∞ viele Curven, die unsere beiden Monge'schen Gleichungen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ erfüllen. Nehmen wir nun eine ganz beliebige derartige Integralcurve des Gleichungssystems $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, so berührt sie in jedem Punkte eine ganz bestimmte charakteris-

1) Göttinger Nachrichten. October 1872.

tische Curve der Gleichung $\Omega = 0$. Die ∞^1 hierdurch definirten charakteristischen Curven erzeugen eine zweidimensionale Punkt-Mannigfaltigkeit, die eine Integral-Mannigfaltigkeit von $\Omega = 0$, sowie des Involutionssystems liefert.

Hiermit ist die Integration des Involutionssystems

$$\mathfrak{F}_1 (x y z_1 z_2 p_1 q_1 p_2 q_2) = 0\,, \quad \mathfrak{F}_2 = 0\,, \quad \mathfrak{F}_3 = 0$$

auf die einfachst möglichen Operationen zurückgeführt.

Betrachten wir jetzt ein ganz beliebiges unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen und setzen wir dabei voraus — wie wir ohne Beschränkung können — dass dieses System von erster Ordnung ist. Die unabhängigen Veränderlichen nennen wir $x_1 \dots x_n$ und die gesuchten Functionen $z_1 \dots z_m$. Wir setzen ferner

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = p_{ik}\,.$$

Die Gleichungen unseres unbeschränkt integrablen Systems haben somit die Form

$$\text{(a)} \qquad F_j (x_1 \dots x_n\,,\; z_1 \dots z_m\,,\; p_{11} \dots p_{mn}) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots q)\,.$$

Wir bilden die n Gleichungen

$$\text{(b)} \qquad V_{x_k} + V_{z_1} \cdot p_{1k} + V_{z_2} \cdot p_{2k} + \cdots + V_{z_m} \cdot p_{mk} = 0 \qquad (k = 1, 2 \dots n)$$

und setzen dabei voraus (dass die Zahl q so gross ist), dass sich die mn Grössen p_{ik} zwischen den $q + n$ Gleichungen (a) und (b) eliminiren lassen. In dieser Weise erhalten wir ein System von partiellen Differentialgleichungen *erster* Ordnung mit einer einzigen unbekannten Function V:

$$\Omega_k (x_1 \dots x_n\,,\; z_1 \dots z_m\,,\; V_{x_1} \dots V_{x_n}\,,\; V_{z_1} \dots V_{z_m}) = 0\,.$$

Wir behaupten, dass dieses System von partiellen Differentialgleichungen 1. O. semilinear ist; wir behaupten ferner, dass, wenn die Gleichungen

$$z_1 = \varphi_1(x_1 \dots x_n)\,, \quad z_2 = \varphi_2 \dots z_m = \varphi_m$$

eine Lösung des ursprünglichen unbeschränkt integrablen Systems $F_1 = 0, \dots F_q = 0$ darstellen, dass dann dieselben Gleichungen $z_1 = \varphi_1, \dots z_m = \varphi_m$ in meinem Sinne des Wortes eine Lösung des Gleichungssystems $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0 \dots$ liefern.

Zum Beweis bemerken wir, dass die Gleichungen $z_1 = \varphi_1, \dots z_m = \varphi_m$ im Raume $x_1 \dots x_n$, $z_1 \dots z_m$ eine n-dimensionale Punkt-Mannigfaltigkeit darstellen. Die Elemente

$$x_1 \dots x_n\,, \; z_1 \dots z_m\,, \; V_{x_1} \dots V_{z_1} \dots V_{z_m}$$

dieser Mannigfaltigkeit werden nach meiner allgemeinen Theorie bestimmt durch die n hinzutretenden Gleichungen

$$V_{x_i} + V_{z_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \dots + V_{z_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0\,.$$

Wir können dabei annehmen, dass die Gleichungen $z_1 = \varphi_1, \dots z_m = \varphi_m$ etwa m arbiträre Parameter $a_1, \dots a_m$ enthalten, und dass sie nach diesen Parametern auflösbar sind:

$$a_i = A_i(x_1 \dots x_n\, z_1 \dots z_m) = A_i(xz)\,.$$

Benutzen wir überdies die Bezeichnungen

$$\psi(x_1 \dots x_n\,, A_1 \dots A_m) \equiv [\psi(x_1 \dots x_n\,, a_1 \dots a_m)]\,,$$

so liefern die n Gleichungen

$$\text{(c)} \qquad V_{x_i} + V_{z_1}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}\right] + \dots + V_{z_m}\left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i}\right]$$

ein semilineares System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche in meinem Sinne des Wortes die Gleichungen

$$z_1 = \varphi_1(x_1 \dots x_n\,, a_1 \dots a_m)\,, \dots z_m = \varphi_m$$

eine vollständige Lösung bilden.

Es ist nun aber zu bemerken, dass die Form der Gleichungen (c) nicht nur durch die Form der ursprünglich vorgelegten Gleichungen $F_j = 0$ bestimmt wird. Indem man nach und nach verschiedene Gleichungssysteme $z_1 = \varphi_1(xa), \ldots z_m = \varphi_m(xa)$ zu Grunde legt, erhält man mehrere verschiedene Gleichungssysteme (c). Es ist aber möglich, ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in den unabhängigen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$, $z_1 \ldots z_m$ mit *einer einzigen* Function V aufzustellen, das von *allen* Mannigfaltigkeiten $z_1 = \varphi_1 \ldots z_m = \varphi_m$ befriedigt wird. In der That, die Gleichungen

$$F_j\left(x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\right] \cdots \left[\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}\right]\right) \equiv 0$$

bestehen identisch für alle Mannigfaltigkeiten $z_1 = \varphi_1, \ldots z_m = \varphi_m$. Eliminirt man daher die Grössen $\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right]$ zwischen den letzten Gleichungen und den Gleichungen (c), so erhält man ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\Omega_k(x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m, V_{x_1} \ldots V_{z_1} \ldots V_{z_m}) = 0,$$

das von *allen* Mannigfaltigkeiten $z_1 = \varphi_1, \ldots z_m = \varphi_m$ befriedigt wird, das gleichzeitig eine ganz bestimmte Form besitzt und überdies durch einfache Elimination gefunden werden kann, *wenn es überhaupt existirt.*

Hiermit ist das angekündigte Resultat erhalten und es gilt somit der folgende Satz, dessen Tragweite sich auf partielle Differentialgleichungen *beliebig hoher* Ordnung ausdehnt, indem derartige Gleichungen sich immer auf Gleichungen *erster* Ordnung zurückführen lassen:

Satz. *Liegt ein unbeschränkt integrables System von q partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit n unabhängigen und m abhängigen Veränderlichen vor:*

$$F_j(x_1 \ldots x_n, z_1 \ldots z_m, p_{11} \cdots p_{mn}) = 0, \quad p_{ik} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k},$$

so bildet man die Gleichungen

$$V_{x_i} + V_{z_1} p_{1i} + \cdots V_{z_m} p_{mi} = 0$$
$$(i = 1, \ldots n).$$

Gelingt es nun, die nm Grössen p_{ik} zwischen diesen $q+n$ Gleichungen zu eliminiren, so bilden die hervorgehenden Relationen

$$\Omega_j(x_1 \dots x_n,\ z_1 \dots z_m,\ V_{x_1} \dots V_{z_1} \dots V_{z_m}) = 0$$

ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer einzigen unbekannten Function V, das von allen Integral-Mannigfaltigkeiten $z_1 = \varphi_1, \dots z_m = \varphi_m$ *des Gleichungssystems* $F_1 = 0, \dots F_q = 0$ befriedigt wird.

Es stellt sich nun sogleich die Frage, welche praktische Bedeutung dieser Satz besitzt. Hierzu ist nun zunächst zu antworten, dass wir, sobald die besprochene Elimination möglich ist, sobald also ein Gleichungssystem $\Omega_j = 0$ vorhanden ist, immer durch Integration eines *gewöhnlichen* simultanen Systems eine Schaar von Punkt-Mannigfaltigkeiten finden, von denen alle Integralgebilde erzeugt sind. Noch präciser[1]) und vollständiger charakterisiren wir die Bedeutung des gefundenen Satzes, wenn wir sagen, dass jedes System $F_j = 0$, für welches ein System $\Omega = 0$ wirklich vorhanden ist, auf ein anderes unbeschränkt integrables System

$$F_j'(x_1' . x_2' \dots x_{n-\nu}',\ z_1' z_2' \dots p_{11}' \dots) = 0$$

reducirt werden kann, *das weniger als n unabhängige Veränderliche* enthält. Ist z. B. die Zahl n der unabhängigen Veränderlichen des ursprünglich vorgelegten Systems $F_j = 0$ gleich *zwei*, so lässt sich die Integration des Systems $F_j = 0$, sobald das System $\Omega_j = 0$ existirt, auf *gewöhnliche* Differentialgleichungen zurückführen.

Eine Erniedrigung in der Zahl der unabhängigen Veränderlichen ist im Allgemeinen eine wesentlich grössere Leistung als eine Verminderung in der Zahl der abhängigen Veränderlichen, die ihrerseits mit der Erniedrigung in der Ordnung eines Systems zu vergleichen ist.

1) Die vorhergehenden Entwickelungen dieses Kapitels finden sich alle, wenn auch in knapper Form, in meiner früher citirten Arbeit aus dem Jahre 1880. Die nachstehende wichtige Bemerkung wurde damals nicht explicite gemacht.

Kapitel III.

Jede infinitesimale Berührungstransformation einer partiellen Differentialgleichung erzeugt specielle Integralgebilde.

Wenn eine vorgelegte partielle Differentialgleichung eine infinitesimale Punkt- oder Berührungstransformation gestattet, so werden *in gewissen Fällen alle* Integralgebilde von der infinitesimalen Transformation in sich verschoben.

Betrachten wir z. B. die lineare partielle Differentialgleichung mit *constanten* Coefficienten

$$ap + bq - c = 0,$$

die bekanntlich auch folgendermassen geschrieben werden kann

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Die zugehörigen Integralflächen

$$\frac{z}{c} - \frac{x}{a} = \Omega\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

sind lauter Cylinderflächen mit parallelen Erzeugenden; jede einzelne derartige Fläche wird in sich von der infinitesimalen Translation

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z}$$

verschoben.

Liegt andererseits eine beliebige lineare partielle Differentialgleichung

$$\xi(xyz)p + \eta(xyz)q - \zeta(xyz) = 0$$

vor, so gestattet jede Integralfläche die infinitesimale Transformation, deren Symbol ist:

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Dieser Satz ist weiter nichts als eine gruppentheoretische Auf-

fassung von Lagrange's berühmter Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen.

Betrachten wir andererseits nicht-lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

$$W(xyzpq) = 0\,.$$

Auch jetzt ist es möglich, infinitesimale Transformationen anzugeben, die *jede* Integralfläche in sich verschieben. Dies ist ja nämlich der Fall mit jeder infinitesimalen Berührungstransformation, deren charakteristische Function die Form

$$\varrho(xyzpq)\,.\,W$$

besitzt, dabei vorausgesetzt, dass ϱ sich für Werthsysteme $xyzpq$ allgemeiner Lage, die $W = 0$ erfüllen, regulär verhält.

Auf diese Bemerkung, die sich auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in *beliebig vielen Veränderlichen* ausdehnt, beruhen im Grunde *alle* Integrationstheorien, die derartige Gleichungen auf *gewöhnliche* Differentialgleichungen zurückführen [1]).

Es giebt nun aber auch infinitesimale Berührungstransformationen, die zwar eine partielle Differentialgleichung (erster Ordnung) in sich transformiren, nicht aber alle Integralgebilde invariant lassen, während sie allerdings selbstverständlich jedes Integralgebilde in ein Integralgebilde überführen.

Mit derartigen Vorkommnissen beschäftigen wir uns in diesem Kapitel und stellen uns insbesondere die Frage, welchen Vortheil man bei der Integration partieller Differentialgleichungen aus dem Vorhandensein derartiger Transformationen ziehen kann. Wir werden nachweisen, dass man jedenfalls das Auftreten derartiger Transformationen dazu benutzen kann, durch relativ einfache Integrationsprocesse gewisse ausgezeichnete Integralgebilde zu finden, die dadurch charakterisirt sind, dass sie bei der betreffenden infinitesimalen Transformation in sich verschoben werden. Im nächsten Kapitel zeigen wir sodann,

1) An anderer Stelle habe ich längst nachgewiesen, dass eine infinitesimale Berührungstransformation nie *alle* Integralgebilde einer partiellen Differentialgleichung zweiter oder höherer Ordnung in sich verschiebt.

dass man die Existenz derartiger Transformationen in noch viel weitergehenderer Weise verwerthen kann.

Um das Verständniss meiner Theorie zu erleichtern, schicke ich zuerst einige einfache aber lehrreiche Beispiele voraus.

Betrachten wir eine lineare partielle Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \alpha(yz)p + \beta(yz)q - \gamma(yz) = 0,$$

deren Coefficienten von x frei sind. Führt man nun neue Veränderliche $x_1\ y_1\ z_1$ vermöge einer Transformation

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z \quad (a = \text{Const.})$$

ein, so wird die Form der Gleichung bewahrt. Für eine geometrische Auffassung heisst dies, dass jede Translation längs der x-Axe jede Integralfläche in eine Integralfläche überführt. Diese Sachlage findet darin ihren *vollen* Ausdruck, dass die *infinitesimale* Translation

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

jede Integralfläche in eine ebensolche überführt. Die allgemeine Theorie, die in diesem Kapitel in ihren Hauptzügen entwickelt wird, sagt nun für diesen speciellen Fall, dass unter den Integralflächen unserer Gleichung (A) solche vorhanden sind, die von der infinitesimalen Translation $\frac{\partial f}{\partial x}$ *in sich* verschoben werden.

In der That, machen wir in unserer linearen partiellen Differentialgleichung (A) die Substitution

$$z = Y(y),$$

so erhalten wir zur Bestimmung von Y die Gleichung

$$\beta(yY)\frac{dY}{dy} - \gamma(yY) = 0,$$

die als eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den beiden Veränderlichen y und Y sicher integrabel

ist und zwar in allgemeinster Weise durch eine Function $Y(y)$ befriedigt wird, die eine arbiträre Constante enthält.

Daher finden sich unter den ∞^∞ *Integralflächen einer jeden linearen partiellen Differentialgleichung in* xyz, *die eine infinitesimale Translation längs der* x*-Axe gestattet und somit die Form*

$$\alpha(yz)p + \beta(yz)q - \gamma(yz) = 0$$

besitzt, gewisse und zwar ∞^1 *Cylinderflächen, die bei jener infinitesimalen Translation in sich verschoben werden.*

Denken wir uns jetzt ganz allgemein eine *beliebige* lineare partielle Differentialgleichung (und zwar der Einfachheit wegen) eine mit drei unabhängigen Veränderlichen

$$Af = 0 = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial f}{\partial z}$$

vorgelegt, und setzen wir dabei voraus, dass zufälligerweise eine infinitesimale Transformation

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

bekannt ist, die unsere Gleichung $Af = 0$ in sich transformirt. Diese Annahme findet nach meinen allgemeinen Theorien ihren analytischen Ausdruck in dem Stattfinden einer Relation von der Form

$$X(A(f)) - A(X(f)) = \varrho \,.\, Af.$$

Diese Relation aber zeigt nach Jacobi's und Bour's allgemeinen Theorien, dass die beiden Gleichungen

$$Af = 0\,, \quad Xf = 0$$

eine gemeinsame Lösung $\varphi(xyz)$ besitzen. Setzen wir sodann φ gleich einer arbiträren Constante, so erhalten wir ∞^1 Flächen

$$\varphi(xyz) = a\,,$$

die von Bahncurven der infinitesimalen Transformation Xf erzeugt sind, und überdies die partielle Differentialgleichung

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0$$

erfüllen.

Diesen Satz sprechen wir folgendermassen aus:

Führt eine infinitesimale Transformation

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

jede Integralfläche der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\alpha p + \beta q - \gamma = 0 = Af$$

in eine Integralfläche über, so giebt es immer ∞^1 *Integralflächen von* $Af = 0$, *die bei jener infinitesimalen Transformation in sich verschoben werden.*

Es ist nun aber leicht, diesen Satz auf *beliebige partielle Differentialgleichungen* auszudehnen, die eine bekannte oder unbekannte infinitesimale *Berührungs*transformation gestatten.

Betrachten wir zuerst der Einfachheit wegen eine partielle Differentialgleichung *erster* Ordnung in *drei* Veränderlichen

$$F(xyzpq) = a = \text{Const.}$$

und setzen wir voraus, dass $F = a$ die infinitesimale Berührungstransformation

$$[Wf] - W \frac{\partial f}{\partial z}$$

gestattet.

Setzen wir

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad -p = \frac{p_1}{p_3}, \quad -q = \frac{p_2}{p_3},$$

so nimmt unsere partielle Differentialgleichung die Form an

$$N(x_1\, x_2\, x_3\, p_1\, p_2\, p_3) = a$$

und das Symbol der infinitesimalen Berührungstransformation wird der Poisson'sche Klammerausdruck

$$(Hf), \text{ wo } H = p_3 W\left(x_1, x_2, x_3, -\frac{p_1}{p_3}, -\frac{p_2}{p_3}\right);$$

dabei sind N und H homogen in den p und zwar ist N homogen von *nullter* Ordnung, H dagegen homogen von *erster* Ordnung in den p.

Unsere Annahme, dass die infinitesimale Berührungstransformation (Hf) eine jede unter den ∞^1 partiellen Differentialgleichungen $N = a$ invariant lässt, findet darin ihren analytischen Ausdruck, dass die bekannte Relation

$$(HN) = 0$$

identisch besteht. Hieraus lässt sich nun, wenn wir die Bezeichnung

$$\frac{1}{p_3} H = M(x_1 x_2 x_3 p_1 p_2 p_3) = W$$

einführen, den Schluss ziehen, dass die beiden Gleichungen

$$N = a, \quad M = 0$$

für jeden Werth von a gewisse und zwar ∞^1 gemeinsame Integralflächen haben. In der That, die Relation $(HN) = 0$ liefert unmittelbar die Gleichung

$$(p_3 M, N) = 0 = p_3 (MN) + \frac{\partial N}{\partial x_3} M,$$

die uns zeigt, dass der Klammerausdruck (MN) vermöge $M = 0$ verschwindet.

Die hiermit gefundenen Integralflächen jeder einzelnen Gleichung $N = a$ werden wirklich von der infinitesimalen Berührungstransformation (Hf) in sich verschoben.

Der Beweis gestaltet sich übrigens unter gewissen Gesichtspunkten einfacher, wenn wir die ursprünglichen Coordinaten $xyzpq$ beibehalten. Denn unsre Annahme, dass eine jede unter den ∞^1 partiellen Differentialgleichungen

$$F(xyzpq) = a$$

die infinitesimale Berührungstransformation

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

gestatten solle, deckt sich damit, dass der Ausdruck

$$[WF] - W\frac{\partial F}{\partial z}$$

identisch verschwinden soll; und daraus folgt, dass der eckige Klammerausdruck

$$[WF]$$

vermöge $W = 0$ verschwindet, was wiederum zeigt, dass die Gleichungen

$$F = a, \quad W = 0$$

∞^1 gemeinsame Integralflächen haben, die von unserer infinitesimalen Berührungstransformation in sich verschoben werden.

Diese Theorie, die sich ohne weiteres auf alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in n Veränderlichen ausdehnt, giebt den wirklichen Schlüssel zu allen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, die von Lagrange und seinen Nachfolgern bis Jacobi inclusive ausgeführt worden sind. Mit der Entdeckung der hier skizzirten Transformationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung fingen meine *allgemeinen* Untersuchungen auf diesem Gebiete an. Bei dieser Gelegenheit brauche ich nicht auszuführen, wie diese Betrachtungen, die aus den Jahren 1871—1872 herrühren[1]), mich zur Entwickelung der allgemeinen Theorie der Berührungstransformationen sowie zur Begründung meiner Theorie der Transformationsgruppen führten. Dagegen scheint es mir zweckmässig, einmal meine längst angedeutete[2]) Ausdehnung der soeben resumirten Entwickelungen auf beliebige partielle Differentialgleichungen von zweiter und höherer Ordnung wirklich durchzuführen. Im nächsten Kapitel zeige ich sodann, dass man aus dem Vorhandensein (bekannter) infinitesimaler Berührungstransformationen einer zur Integration vorgelegten partiellen Differentialgleichung im Allgemeinen einen noch grösseren Vortheil ziehen kann. Die weitergehenden Entwickelungen des nächsten Kapitels, die wesentlich mehr leisten, beruhen für eine oberflächliche Betrachtung auf ganz andern Principien; es ist indess möglich, die Entwickelungen beider Kapitel von einem höheren Gesichtspunkte zu sehen;

---

1) Vgl. die kurze Note: Kurzes Resumé etc. Verh. der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania April 1872.

2) Math. Annalen Bd. XI, S. 490, Fussnote.

alsdann erkennt man, dass beide Theorien aus einer gemeinsamen Quelle fliessen.

Setzen wir voraus, dass eine zur Integration vorgelegte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(xyzpqrst) = 0$$

eine bekannte infinitesimale Berührungstransformation

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

gestattet. Es ist dann immer möglich, eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich die Gleichung

$$W(xyzpq) = 0$$

aufzustellen, die mit $F = 0$ ∞^2 Integralflächen gemein hat.

Um dies zu beweisen, führen wir durch Berührungstransformation

$$x' = X(xyzpq), \quad y' = Y, \quad z' = Z,$$
$$p' = P(\ldots.), \quad q' = Q(\ldots.)$$

neue Veränderliche ein, die so gewählt sind, dass die infinitesimale Transformation die Form

$$\frac{\partial f}{\partial x'}$$

annimmt. Durch Einführung dieser Veränderlichen verwandelt sich $F = 0$ in eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die alle Translationen längs der x'-Axe gestattet; sie ist daher von x' frei und besitzt dementsprechend die Form

$$\Phi(y'z'p'q'r's't') = 0.$$

Machen wir hier die Substitution

$$z' = Y(y'),$$

so erhalten wir zur Bestimmung von $Y(y')$ die Gleichung

$$\Phi\left(y'\,Y\,0\,\frac{\partial Y}{\partial y'}\,0\,0\,\frac{d^2 Y}{dy'^2}\right) = 0,$$

die als eine *gewöhnliche* Differentialgleichung zweiter Ordnung sicher integrabel ist und dabei in allgemeinster Weise von einer Function $Y(y')$ befriedigt wird, die *zwei arbiträre Parameter* enthält. Hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen; bei den Betrachtungen, die uns zu diesem Resultate führten, haben wir implicite vorausgesetzt, dass unter den Werthsystemen $xyzpq$, die $W = 0$ erfüllen, solche vorhanden sind, für welche nicht allein W, sondern auch F sich regulär verhalten.

Wir formuliren das erhaltene specielle, doch aber wichtige Resultat folgendermassen:

Gestattet eine vorgelegte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$F(xyzpqrst) = 0$$

die infinitesimale Berührungstransformation

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z}$$

und giebt es dabei unter den Werthsystemen $xyzpq$, die $W = 0$ erfüllen, solche, für welche nicht allein W, sondern auch F sich regulär verhalten, so haben die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$F = 0, \quad W = 0$$

∞^2 *gemeinsame Integralflächen; anders ausgesprochen: es hat dann $F = 0$ im Allgemeinen ∞^2 Integralflächen, die von der infinitesimalen Transformation in sich verschoben werden*[1]).

So einfach dieser Satz auch ist, so genügt er schon, um eine Reihe längst bekannter, aber isolirt stehender Resultate auf ihre wirkliche Quelle zurückzuführen.

Wenn eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung alle Bewegungen gestattet, so besteht sie einfach in einer Relation zwischen den beiden Krümmungsradien

$$\Omega(R_1 R_2) = 0.$$

Unter den Integralflächen einer derartigen Gleichung finden sich daher immer gewisse Cylinder, Rotationsflächen und Schrauben-

1) Unter Umständen erfüllen *alle* Integralflächen von $W = 0$ zugleich $F = 0$.

flächen, und zwar erhält man im jeden einzelnen Falle (mindestens) ∞^7 Integralflächen, die eine infinitesimale Bewegung gestatten.

So z. B. giebt es Rotationsflächen und zugleich Schraubenflächen, die Minimalflächen sind oder aber constante Krümmung resp. constante mittlere Krümmung haben.

Unter den partiellen Differentialgleichungen

$$\Omega(R_1 R_2) = 0$$

giebt es einige, die nicht allein alle ∞^6 Bewegungen, sondern überhaupt alle ∞^7 Aehnlichkeitstransformationen gestatten. Das ist der Fall mit den Gleichungen

$$\frac{R_1}{R_2} = a = \text{Const.}$$

Daher dürfen wir schliessen, dass sich unter den Flächen, deren Krümmungsradien in einem gegebenen constanten Verhältniss stehen, immer solche finden lassen, die *Spiralflächen* sind, solche also, die eine unendlich kleine Transformation gestatten, die die Form

$$c_1(xp + yq + zr) + c_2(yp - xq) + c_3(zq - yr)$$
$$+ c_4(xr - zp) + c_5 p + c_6 q + c_7 r$$

besitzt. Es waren gerade diese Betrachtungen, die mich seinerseits zur Entdeckung derjenigen *Minimalflächen* führten, die *Spiralflächen* sind.

Der aufgestellte Satz gestattet mehrere Verallgemeinerungen, die grosses Interesse darbieten, wenn sie auch als ein selbstverständlicher Ausfluss meiner allgemeinen Theorien aufgefasst werden können.

Beschränken wir uns zunächst auf partielle Differentialgleichungen in xyz, so erhalten wir zunächst durch fast wortlautende Wiederholung der oben angestellten Betrachtungen den Satz:

Satz. *Gestattet eine partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung in xyz:*

$$F\left(xyzpqr \dots \frac{\partial^m z}{\partial y^m}\right) = 0$$

die infinitesimale Berührungstransformation:

$$[Wf] - W\frac{\partial f}{\partial z},$$

so haben die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$F = 0, \quad W = 0$$

im Allgemeinen ∞^m *gemeinsame Integralflächen, deren Bestimmung nur die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung* m^{ter} *Ordnung verlangt. Diese Hülfsgleichung enthält arbiträre Constanten, die in Wegfall kommen, wenn die Gleichung erster Ordnung* $W = 0$ *schon integrirt vorliegt.*

Zur Illustration dieses Satzes betrachten wir zuerst die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung, die alle *isothermen* Flächen bestimmt. Diese Differentialgleichung gestattet offenbar die zehngliedrige Gruppe aller *conformen* Punkttransformationen. Daher liefern unsere Theorien ∞^{9+4} isotherme Flächen, deren jede eine infinitesimale conforme Punkttransformation gestattet.

Als zweites Beispiel betrachten wir die *partielle Differentialgleichung vierter Ordnung, die alle Translationsflächen definirt;* diese Gleichung gestattet alle ∞^{12} linearen Punkttransformationen des Raumes; daher lässt sich schliessen, dass

$$\infty^{9+4}$$

Translationsflächen vorhanden sind, die jedesmal eine infinitesimale lineare Transformation gestatten.

Es ist nun möglich, diese an sich interessanten Translationsflächen wirklich zu bestimmen. Die betreffenden Flächen zerfallen in zwei Kategorien, je nachdem bei der infinitesimalen linearen Transformation die unendlich fernen Punkte in Ruhe bleiben oder unter sich vertauscht werden.

Von der ersten Kategorie können wir aber absehen, da es von vornherein klar ist, dass sie nur abwickelbare Flächen, ja sogar nur Cylinderflächen umfasst.

Wir können somit annehmen, dass unsere infinitesimale Transformation die unendlich fernen Punkte unter sich vertauscht; alsdann wird die unendlich ferne Ebene projectiv transformirt; und somit treten in dieser Ebene ∞^1 Curven auf,

die sämmtlich invariant bleiben. Unter diesen Curven, deren Gleichungen die Form haben:

$$\omega\left(\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = a = \text{Const.},$$

greifen wir zwei beliebige heraus, indem wir dem Parameter a zwei bestimmte Werthe a_1 und a_2 ertheilen. Meine allgemeine Theorie der Translationsflächen giebt sodann unmittelbar eine partielle Differentialgleichung

$$R(pq)r + S(pq)s + T(pq)t = 0,$$

deren Integralflächen Translationsflächen sind, deren erzeugende Curven jedesmal ∞^1 Tangenten besitzen, die eine der beiden früher besprochenen unendlich fernen Curven schneiden. Ist nun

$$\text{(D)} \qquad \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

das Symbol der betreffenden infinitesimalen Transformation, so sind die gesuchten Translationsflächen bestimmt durch die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\text{(E)} \qquad \xi p + \eta q - \zeta = 0$$

$$\text{(F)} \qquad Rr + Ss + Tt = 0,$$

unter denen die erste *neun* wesentliche arbiträre Constanten enthält; während in der letzten Gleichung überdies die Parameter a_1 a_2 auftreten. Diese beiden partiellen Differentialgleichungen haben nun für allgemeine Werthe der besprochenen *elf* Parameter jedesmal ∞^2 gemeinsame Integralflächen. Dies folgt daraus, dass die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (F), wie eine evidente geometrische Betrachtung zeigt, die infinitesimale Transformation (D) gestattet.

Will man die endliche Gleichung dieser Flächen finden, so kann man zuerst die Bahncurven

$$\mathfrak{x} = a, \quad \mathfrak{y} = b$$

der infinitesimalen Transformation (D) bestimmen; sodann erhält man eine partielle Differentialgleichung in $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$:

$$W(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{y}'\mathfrak{y}'') = 0\,,$$

deren Integralgleichung

$$\Pi(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\alpha\beta) = 0$$

die gesuchten Flächen darstellt. Es ist nun sehr bemerkenswerth, dass die hier angegebenen Operationen wirklich durchgeführt werden können; zu diesem Zwecke stellen wir die folgenden Betrachtungen an.

Da eine *lineare* Transformation jedes Parallelogramm in ein Parallelogram überführt und in Folge dessen *congruente Curven* in ebensolche verwandelt, so haben wir früher behaupten können, dass eine derartige Transformation immer Translationsfläche in Translationsfläche überführt. Wenn nun eine Translationsfläche eine infinitesimale lineare Transformation gestattet, so sind von vornherein zwei Möglichkeiten denkbar: es ist denkbar, dass die ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven unsrer Fläche unter einander vertauscht werden, oder aber dass sie nach und nach in andere Schaaren congruenter Curven übergehen. Mit der letzten Möglichkeit brauchen wir uns aber nicht zu beschäftigen, denn sie könnte jedenfalls nur für die von uns bestimmten Flächen eintreten, die in ∞ vielen Weisen als Translationsflächen aufgefasst werden können. Es erübrigt also nur noch die Möglichkeit zu erledigen, dass die betreffende infinitesimale lineare Transformation jede Schaar congruenter Curven invariant lässt. In diesem Falle muss jede Curve einer derartigen Schaar selbst eine infinitesimale lineare Transformation gestatten, indem jede Curve der Schaar von zwei unabhängigen linearen Transformationen in dieselbe benachbarte Curve übergeführt wird. Hieraus folgt, dass es immer möglich ist, beide Schaaren congruenter Curven, die auf unsrer Fläche liegen, und also die Fläche selbst zu bestimmen.

Unter den hiermit bestimmten Translationsflächen, die eine infinitesimale lineare Transformation gestatten, finden sich insbesondere die geradlinigen Minimalflächen. *Diese Schraubenflächen sind, beiläufig bemerkt, die einzigen geradlinigen Translationsflächen, die nicht gleichzeitig Cylinder sind.*

Wir wollen angeben, wie man alle diese Flächen durch möglichst einfache Rechnungen finden kann.

In älteren Arbeiten zeigte ich, dass man alle linearen *homogenen* infinitesimalen Transformationen auf kanonische Form bringen kann. Ist nun

$$\sum_1^3 {}^i \, c_{ik}\, x_i\, p_k$$

eine solche kanonische Form, so bildet man die Transformation

$$\sum c_{ik}\, x_i p_k + d_1\, p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3$$

und versucht sodann durch die Variabelnänderung

$$x'_k = x_k + a_k$$

die Constanten d_1, d_2, d_3 sämmtlich oder wenigstens einige unter ihnen wegzuschaffen.

Ist insbesondere die Determinante

$$| \, c_{ik} \, |$$

von Null verschieden, so können alle d_k ohne weiteres gleich Null gesetzt werden.

Sucht man nun alle Translationsflächen, die die infinitesimale Transformation

$$\text{(G)} \qquad \sum_{ik} c_{ik}\, x_i\, p_k + \sum_k d_k p_k$$

gestatten, so bemerkt man zunächst, dass jede erzeugende Curve nach dem Früheren eine gewisse infinitesimale Transformation zulässt, die die Form

$$\sum c_{ik}\, x_i\, p_k + \sum e_k p_k$$

besitzt. Man bestimmt die ∞^2 Bahncurven dieser *letzten* Transformation, und greift unter ihnen eine, etwa C heraus; sodann erzeugen alle ∞^1 Bahncurven der ersten infinitesimalen Transformation, die C schneiden, eine Fläche, die die verlangte Eigenschaft besitzt. — In dieser Weise liefern leicht ausführbare Rechnungen die gesuchten Translationsflächen.

Nehmen wir z. B. die infinitesimale Transformation

$$axp + byq + czr \qquad (abc \neq 0)$$

und fügen einen Ausdruck nullter Ordnung hinzu, so erhalten wir die Transformation

$$(ax + l)p + (by + m)q + (cy + n)r.$$

Die Bahncurven dieser letzten Transformation sind gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} ax + l &= (ax_0 + l)\, e^{at} \\ by + m &= (by_0 + m)\, e^{bt} \\ cz + n &= (cz_0 + n)\, e^{ct}. \end{aligned}$$

Dementsprechend werden die Bahncurven der ersten Transformation bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x e^{a\tau} \\ \mathfrak{y} &= y e^{b\tau} \\ \mathfrak{z} &= z e^{c\tau}. \end{aligned}$$

Eliminirt man zwischen diesen sechs Gleichungen die Grössen x, y, z, ertheilt sodann den Grössen x_0, y_0, z_0 bestimmte Werthe und deutet endlich t und τ als Parameter, so bestimmen die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} a\mathfrak{x} &= -\, l e^{a\tau} + (ax_0 + l)\, e^{a(\tau + t)} \\ b\mathfrak{y} &= -\, m e^{b\tau} + (by_0 + m)\, e^{b(\tau + t)} \\ c\mathfrak{z} &= -\, n e^{c\tau} + (cz_0 + n)\, e^{c(\tau + t)} \end{aligned}$$

offenbar eine Translationsfläche, die die gesuchten Eigenschaften besitzt.

Betrachten wir jetzt eine partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung in $n + 1$ Veränderlichen

$$F\left(z x_1 \dots x_n \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial^m z}{\partial x_n{}^m}\right) = 0$$

mit q bekannten infinitesimalen Berührungstransformationen

$$B_k f = [W_k f] - W_k \frac{\partial f}{\partial z},$$

die paarweise vertauschbar sind:

$$B_i B_k f - B_k B_i f \equiv 0,$$

während die charakteristischen Functionen keine homogene Relation

$$\Phi(W_1 \dots W_q) = 0$$

erfüllen. Giebt es dann Werthsysteme $z x_1 \dots x_n p_1 \dots$, die die Gleichungen

$$W_1 = 0 \dots, \quad W_q = 0$$

erfüllen, für welche sich überdies die Gleichung $F = 0$ regulär verhält, so haben die Gleichungen

$$W_1 = 0 \dots\dots W_q = 0, \quad F = 0$$

gemeinsame Lösungen.

Um diesen Satz zu beweisen und gleichzeitig zu präcisiren, denken wir uns, wie immer möglich, neue Veränderliche

$$Z X_1 \dots X_2 P_1 \dots P_n$$

eingeführt, die so gewählt sind, dass die charakteristischen Functionen unserer infinitesimalen Transformationen die Form

$$P_n, P_{n-1} \dots P_{n-q+1}$$

annehmen. Geschrieben in diesen Veränderlichen erhält dann $F = 0$ eine Form

$$\Phi\left(Z X_1 \dots X_{n-q} P_1 \dots P_n \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} \dots\right) = 0,$$

die von $X_{n-q+1} \dots X_n$ frei ist.

Setzen wir daher

$$Z = \Theta(X_1 \dots X_{n-q}),$$

so erhalten wir zur Bestimmung von Θ eine sicher integrable partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung in den Veränderlichen

$$Z X_1 \dots X_{n-q}.$$

Hiermit ist das angekündigte Resultat erwiesen, und gleichzeitig eine Integrationsmethode angegeben, die sich oft als praktisch erweisen wird, obgleich sie mehr Integrationsoperationen verlangt, als streng nothwendig ist.

Die in dem vorigen Beispiel gemachte Annahme, dass die Klammerausdrücke $B_i B_k f - B_k B_i f$ alle Null sind, lässt sich durch allgemeinere Voraussetzungen ersetzen. Nehmen wir z. B. an, dass die Gleichung

$$F\left(z x_1 \cdots x_n \cdots \frac{\partial^m z}{\partial x_n{}^m}\right) = 0$$

zwei infinitesimale Berührungstransformationen gestattet, die eine *Gruppe* mit zwei Parametern erzeugen. Sind nun diese Transformationen nicht vertauschbar, so können wir annehmen, dass die Veränderlichen schon so gewählt sind, dass unsere infinitesimale Transformationen in der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + z \frac{\partial f}{\partial z}$$

vorliegen. Unter dieser Voraussetzung ist F frei von x_1 und homogen in den Grössen

$$x_2 \ldots x_n, \; z, \; dx_2 \ldots dx_n, \; dz,$$

so dass sie die Form

$$\Phi\left(x_2 \ldots x_n \, z, \; \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}, \; z \frac{\partial^2 z}{\partial x_1{}^2} \cdots\right) = 0$$

besitzt.

Setzen wir nun

$$z = Z(x_2 \ldots x_n) = x_n \, W\left(\frac{x_2}{x_n} \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

und

$$\frac{x_2}{x_n} = y_2, \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n} = y_{n-1},$$

so kommt

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 0\,, \quad \frac{\partial Z}{\partial x_2} = \frac{\partial W}{\partial y_2}\,, \ldots \frac{\partial Z}{\partial x_{n-1}} \ldots \frac{\partial W}{\partial y_{n-1}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_n} = W - y_2 \frac{\partial W}{\partial y_2} - \cdots - y_{n-1} \frac{\partial W}{\partial y_{n-1}}$$

. . . .

so dass unsere partielle Differentialgleichung die Form

$$\Pi\left(W y_2 \cdots y_n, \frac{\partial W}{\partial y_2} \cdots\right) = 0$$

annimmt, die nur die Grössen $y_2 \ldots y_n$ W und die zugehörigen Differentialquotienten erster bis m^{ter} Ordnung enthält.

Gestattet daher eine partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $F = 0$ in den Veränderlichen $z\, x_1\, x_2 \ldots x_m$ $(m > 2)$ eine zweigliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, die von den beiden infinitesimalen Transformationen

$$[W_k f] - W_k \frac{\partial f}{\partial z} \quad (k = 1, 2)$$

erzeugt wird, so haben die partiellen Differentialgleichungen

$$F = 0\,, \quad W_1 = 0\,, \quad W_2 = 0$$

die grösstmögliche Anzahl gemeinsamer Lösungen.

Setzen wir jetzt allgemein voraus, dass eine vorgelegte partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung in den Veränderlichen $z\, x_1 \ldots x_n$ eine q-gliedrige Gruppe von Berührungstransformationen

$$[W_k f] - W_k \frac{\partial f}{\partial z} f \quad (k = 1, 2 \ldots q)$$

gestattet und nehmen wir überdies noch an, dass die W keine Relation erfüllen, die die Form

$$\Omega\left(\frac{W_1}{W_q}, \frac{W_2}{W_q} \cdots \frac{W_{q-1}}{W_q}\right) = 0$$

besitzt, dann haben die Gleichungen

$$F = 0, \quad W_1 = 0, \ldots W_q = 0$$

die grösstmögliche Anzahl gemeinsamer Lösungen, und dabei bleibt jede einzelne unter diesen Lösungen bei der q-gliedrigen Gruppe invariant[1]).

Um dies zu beweisen, stellen wir die folgenden Ueberlegungen an.

Der Raum $z\,x_1 \ldots x_n$ enthält ∞^{2n+1} Elemente: $z\,x_1 \ldots x_n$ $p_1 \ldots p_n$. Unter ihnen giebt es im Allgemeinen ∞^{2n+1-q}, die die q Gleichungen

$$W_1 = 0, \ldots . W_q = 0$$

erfüllen. Die Elemente der hierdurch bestimmten Schaar geniessen die Eigenschaft, dass jedes derartige Element von jeder infinitesimalen Transformation der vorgelegten Gruppe in sich *verschoben* wird. Da nun diese Eigenschaft nach der Natur der Sache eine bei der endlichen wie infinitesimalen Transformation unserer Gruppe invariante ist, folgt zunächst, dass die von den Gleichungen $W_1 = 0 \ldots W_q = 0$ bestimmte *Schaar von Elementen bei allen Transformationen der Gruppe invariant bleibt.*

Die $\infty^{2n+1-q+\varepsilon}$ Elemente unserer invarianten Schaar ordnen sich in Theilgebiete, die einzeln invariant bleiben. Die kleinsten invarianten Theilgebiete umfassen höchstens ∞^q Elemente, unter denen jedes einzelne mit allen benachbarten Elementen desselben Gebietes vereinigt liegt.

Die $\infty^{\mu+\nu}$ Elemente der Schaar $W_1 = 0_1 \ldots W_q = 0$ ordnen sich somit in etwa ∞^{μ} kleinste invariante Theilgebiete E_ν, unter denen jedes ∞^{ν} Elemente umfasst, die einen Elementverein bilden.

---

1) Im Texte setzen wir stillschweigend voraus, dass sich unter den Werthsystemen $z\,x_1 \ldots$, die unser Gleichungssystem erfüllen, solche finden lassen, für welche sich die in Betracht kommenden Functionen regulär verhalten.

Zwischen benachbarten Elementvereinen E_ν finden nun eigenthümliche Beziehungen statt, die darin bestehen, dass, sobald zwei *bestimmte* benachbarte Elemente, die zu zwei verschiedenen E_ν gehören, vereinigt liegen, dass dann zwei *beliebige* benachbarte Elemente dieser beiden E_ν vereinigt liegen. Insofern finden also zwischen den ∞^μ Elementvereinen E_ν genau dieselben Beziehungen statt, wie zwischen den charakteristischen Streifen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Es ist auch nicht schwer, das erhaltene Resultat auf seinen inneren Grund zurückzuführen. Unsere Annahme, dass die q infinitesimalen Berührungstransformationen

$$[W_k f] - W_k \frac{\partial f}{\partial z} \quad (k = 1, 3 \dots q)$$

eine q-gliedrige Gruppe erzeugen, findet darin ihren analytischen Ausdruck, dass die q charakteristischen Functionen $W_1, \dots W_q$ paarweise Relationen von der Form

$$[W_i\, W_k] - W_i \frac{\partial W_k}{\partial z} + W_k \frac{\partial W_i}{\partial z} = \sum_s c_{iks}\, W_s$$

erfüllen. Hieraus folgt aber unmitttelbar, dass die partiellen Differentialgleichungen 1. O.

$$W_1 = 0\,, \dots .\ W_q = 0$$

in meinem Sinne des Wortes ein Involutionssystem bilden. Dieses Involutionssystem hat charakteristische Mannigfaltigkeiten, und das sind gerade die Elementvereine, die wir früher mit E_ν bezeichnet haben. —

Unsere frühere ausdrückliche Voraussetzung, dass die W_k keine homogene Relation $\Omega = 0$ erfüllen, lässt sich offenbar durch allgemeinere Annahmen ersetzen.

Es ist nun ein allgemeiner, von mir herrührender Satz, dass die charakteristischen Mannigfaltigkeiten eines Involutionssystems erster Ordnung sich immer ein-eindeutig (d. h. nicht unendlichdeutig), auf die Elemente erster Ordnung eines passend gewählten Punktraumes $\zeta_1\ \xi_1 \dots \xi_{n'}$ in solcher Weise beziehen lassen, dass zwei benachbarte charakteristische Mannigfaltig-

keiten, deren benachbarte Elemente immer vereinigt liegen, sich im Raume $\zeta \xi_1 \dots \xi_{n'}$ als zwei Elemente $(\zeta \xi \pi)$ abbilden, die vereinigt liegen.

Hieraus folgt nun, das die ursprünglich vorgelegte partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung und die hinzutretenden Gleichungen erster Ordnung $W_1 = 0, \dots W_q = 0$, das heisst also, dass das ganze Gleichungssystem

$$\text{(L)} \qquad F = 0\,, \quad W_1 = 0\,, \dots W_q = 0$$

sich durch eine *einzige* partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$\Phi\left(\zeta_1 \xi_1 \dots \xi_{n'} \pi_1 \dots \pi_\nu \dots \frac{\partial^m \zeta}{\partial \xi_{n'}{}^m}\right) = 0$$

ersetzen lässt. Da diese letzte Gleichung immer Lösungen besitzt, so gilt dasselbe für das Gleichungssystem (L).

Hiermit ist das angekündigte Resultat bewiesen. Dabei leuchtet unmittelbar ein, dass die obenstehenden Entwickelungen ohne Aenderung gültig bleiben, wenn nicht eine einzelne Gleichung m^{ter} Ordnung, sondern ein unbeschränkt integrables System m^{ter} Ordnung vorgelegt ist. Wir können daher den folgenden Satz formuliren:

Satz. *Liegt ein unbeschränkt integrables System von partiellen Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung vor:*

$$F_k\left(z\, x_1 \dots x_n \frac{\partial z}{\partial x_1} \dots \frac{\partial^2 z}{\partial x_1{}^2} \dots \frac{\partial^m z}{\partial x_n{}^m}\right) = 0$$
$$(k = 1, 2 \dots)\,,$$

das eine continuirliche Gruppe von Berührungstransformationen

$$[W_k f] - W_k \frac{\partial f}{\partial z} \quad (k = 1, 2 \dots q)$$

gestattet, so findet man alle Integralgebilde des Systems $F_1 = 0$, $F_2 = 0 \dots$, die bei der Gruppe invariant bleiben, indem man zu den Gleichungen $F_k = 0$ noch die q Gleichungen

$$W_1 = 0\,, \dots W_q = 0$$

hinzufügt. Diese q letzten Gleichungen bilden, wenn sie sich nicht widersprechen, immer ein Involutionssystem erster Ordnung, deren charakteristische Mannigfaltigkeiten, wenn sie in hinlänglich grosser Anzahl vorhanden sind, sich zu Integralgebilden des ursprünglich vorgelegten Gleichungssystems $F_1 = 0$, $F_2 = 0 \ldots$ zusammenfassen lassen.

Wir betrachten jetzt ein System von partiellen Differentialgleichungen, das die m Grössen $z_1\ z_2 \ldots z_m$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n$ bestimmt. Setzen wir zur Abkürzung]

$$p_k^{(i)} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k},$$

so hat unser Gleichungssystem die Form

$$F_\nu(x_1 \ldots x_n\, z_1 \ldots z_m\, p_1^{(1)} \ldots p_n^{(m)}) = 0\,, \quad (\nu = 1, 2 \ldots).$$

Jedes Werthsystem $x_1 \ldots x_n$, $z_1 \ldots z_m$, $p_1^{(1)} \ldots p_n^{(m)}$ nennen wir ein *Element*. Wir sagen ferner, dass eine Schaar von Elementen einen Elementverein bilden, wenn zwei benachbarte Elemente der Schaar immer das Gleichungssystem

$$dz_i - p_1^i\, dx_1 - \cdots - p_m^i\, dx_n = 0 \quad (i = 1 \ldots m)$$

erfüllen. Ein Elementverein enthält höchstens ∞^n und mindestens ∞^1 Elemente.

Wir bezeichnen einen Elementverein als einen Integralverein eines Systems von Differentialgleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0 \ldots$, wenn die Elemente des Elementvereins sämmtlich die Gleichungen $F_k = 0$ erfüllen. Wir unterscheiden zwischen Integral-V_1, Integral-V_2, ... Integral-V_n, je nach der Dimensionenzahl des betreffenden Integralvereins.

Wir sagen nun, dass das System von Differentialgleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0 \ldots$ unbeschränkt integrabel *ist, wenn* alle *Elemente des Gleichungssystems mindestens einem Integral-V_n angehören.*

Wir nennen andererseits das System von Differentialgleichungen $F_1 = 0$, $F_2 = 0 \ldots$ ein Involutionssystem, wenn jede

Integral-V_q des Gleichungssystems allgemeiner Lage in mindestens einem Integral-V_n enthalten ist.

Wir wollen nun annehmen, dass ein Involutionssystem erster Ordnung

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots$$

zwischen den unabhängigen Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ und ihren Functionen $z_1 \ldots z_m$ gewisse (bekannte) infinitesimale Transformationen

$$U_k f = \sum \xi_{ki}(xz) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum \zeta_{ki}(xz) \frac{\partial f}{\partial z_i}$$
$$(k = 1, 2 \ldots r)$$

gestattet, die eine r-gliedrige Gruppe bilden, (sowie dass die grössten Determinanten der Matrix

$$| \xi_{k1} \cdots \xi_{kn} \zeta_{k1} \cdots \zeta_{km} |$$

nicht identisch verschwinden).

Giebt es nun hinlänglich viele Elemente allgemeiner Lage, die alle nachstehenden Gleichungen erster Ordnung

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots$$
$$\zeta_{ki} - p_1^i \xi_{k1} - p_2^i \xi_{k2} - \cdots - p_n^i \xi_{kn} = 0$$
$$(k = 1 \ldots r, \quad i = 1 \ldots m)$$

erfüllen, so ist das hiermit erhaltene System von Differentialgleichungen unbeschränkt integrabel.

Der Beweis wird genau in derselben Weise geführt, wie in dem vorigen Beispiele.

Kapitel 4.

Partielle Differentialgleichungen, die eine unendliche Gruppe gestatten.

Im vorigen Kapitel beschäftigten wir uns mit partiellen Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten. Wir zeigten, dass, sobald eine infinitesimale Transformation einer derartigen Gleichung vorliegt, im Allgemeinen specielle

Integral-Mannigfaltigkeiten vorhanden sind, die bei jener Transformation nicht in neue Integralgebilde übergeführt werden, sondern in sich verschoben werden. Gestattet daher eine vorgelegte partielle Differentialgleichung eine endliche oder unendliche continuirliche Gruppe, so geben die vorhergehenden Theorien Methoden zur Bestimmung gewisser Kategorien von Integralgebilden, die, sobald die vorgelegte Gruppe unendlich ist, *im Allgemeinen* nicht nur von arbiträren Constanten abhängen.

Es ist nun aber möglich, wie wir in diesem Kapitel *an einfachen Beispielen* nachweisen werden, noch grösseren Vortheil von dem betreffenden Umstande zu ziehen. Wir stützen uns bei der Entwicklung dieser neuen Methoden, die nach unserer Ansicht eine hervorragende Wichtigkeit besitzen, auf unsere allgemeine Theorie der Differentialinvarianten. Diese unsre Methoden beruhen sämmtlich darauf, dass wir bei der Behandlung einer partiellen Differentialgleichung, die eine bekannte unendliche continuirliche Gruppe gestattet, neue Veränderliche einführen und zwar *ein (volles) System von Differentialinvarianten*, das nach unsrer allgemeinen Theorie zu jeder continuirlichen Gruppe gehört.

Beispiel I. Betrachten wir zuerst die unendliche continuirliche Gruppe, deren infinitesimale Transformationen die allgemeine Form

$$Z(z)\frac{\partial f}{\partial z}$$

besitzen, wobei Z eine arbiträre Function des Argumentes z bezeichnet.

Bezeichnen wir nun wie gewöhnlich die Differentialquotienten von Z mit Z', $Z''\ldots$, so besitzen die infinitesimalen Transformationen der zugehörigen erweiterten Gruppen die Form

$$Z\frac{\partial f}{\partial z}+Z'\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}+r\frac{\partial f}{\partial r}+s\frac{\partial f}{\partial s}+t\frac{\partial f}{\partial t}+\cdots\right)$$
$$+Z''\left(p^2\frac{\partial f}{\partial r}+pq\frac{\partial f}{\partial s}+q^2\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$
$$+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

Wünscht man daher alle zugehörigen Differentialinvarianten nullter, erster und zweiter Ordnung zu finden, so bildet man die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0, \quad p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}+r\frac{\partial f}{\partial r}+s\frac{\partial f}{\partial s}+t\frac{\partial f}{\partial t},$$

$$p^2\frac{\partial f}{\partial r}+pq\frac{\partial f}{\partial s}+q^2\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

die in Uebereinstimmung mit unseren allgemeinen Theorien ein vollständiges System bestimmen. Unter ihren Lösungen finden sich zwei von nullter Ordnung, nämlich

$$x \text{ und } y,$$

eine von erster Ordnung:

$$u=\frac{p}{q}$$

und zwei von zweiter Ordnung

$$\frac{qr-ps}{q^2}=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{qs-pt}{q^2}=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Nach unseren allgemeinen Theorien drückt sich jede Differentialinvariante durch

$$x\,y\,u$$

und den successiven Differentialquotienten

$$\frac{\partial u}{\partial x}\;\frac{\partial u}{\partial y}\;\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdots$$

aus. Es bilden dabei die drei Grössen x y und u nach unsrer Terminologie ein *volles System von Differentialinvarianten.*

Jede Relation von der Form

$$\Omega\left(xyu\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y}\cdots\right)=0$$

liefert nun eine invariante Differentialgleichung

$$W(xyzpqrst\ldots)=0.$$

Existirte eine invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich nicht auf die Form

$$\Omega\left(x y u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

zurückführen liesse, so müsste vermöge dieser Gleichung zweiter Ordnung die dreireihige Determinante der Matrix

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q & r & s & t \\ & & & & & p^2 & pq & q^2 \end{array}\right|$$

verschwinden. Da eine solche Gleichung nicht vorhanden ist, schliessen wir:

Gestattet eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung alle Transformationen der unendlichen Gruppe

$$Z(z) \frac{\partial f}{\partial z},$$

für welche

$$x, y, u = \frac{p}{q}$$

ein volles System von Differentialinvarianten liefern, so kann sie die Form

$$\Omega\left(x y u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

erhalten, womit ihre Reduction auf gewöhnliche Differentialgleichungen geleistet ist.

Entsprechende Ueberlegungen geben den allgemeinen Satz:

Gestattet eine partielle Differentialgleichung m^{ter} Ordnung in den Veränderlichen $x\ y\ z$ alle Transformationen der unendlichen Gruppe $Z(z)\frac{\partial f}{\partial z}$, so lässt sie sich ohne Integration auf eine Gleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückführen, die selbst eine *allgemeine* Form in den Veränderlichen $x y u$ besitzt. Gelingt es, diese Hülfsgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu integriren, so bleibt nur übrig eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{p}{q} - \alpha(xy) = 0$$

zu integriren. Es leuchtet unmittelbar ein, dass bei der Erledigung unserer beiden Hülfsgleichungen die bekannte Gruppe $Z(z)r$ in keiner Weise verwerthet werden kann.

Beispiel 2. Betrachten wir jetzt die unendliche Gruppe

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} - \xi' z \frac{\partial f}{\partial z},$$

die ich im Jahre 1883 (Gesellschaft der Wissenschaft zu Christiania) bei meiner Bestimmung aller unendlichen Gruppen in zwei Veränderlichen als eine kanonische Form aufstellte[1]. Bezeichnen wir nun die Incremente der Grössen xyz wie gewöhnlich mit δx, δy, δz, und setzen dementsprechend:

$$\delta x = \xi \delta \tau, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = -\xi' z \delta \tau,$$

so finden wir nach bekannten Regeln:

$$\delta p = (-2\xi' p - \xi'' z)\delta\tau, \quad \delta q = \xi' q \,\delta\tau$$
$$\delta r = (-3\xi' r - 3\xi'' p - \xi''' z)\delta\tau$$
$$\delta s = (-2\xi' s - \xi'' q)\,\delta\tau, \quad \delta t = -\xi' t \delta\tau.$$

Es ist daher

$$X''f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} - \xi'\left(z\frac{\partial f}{\partial z} + 2p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} + 3r\frac{\partial f}{\partial r} + 2s\frac{\partial f}{\partial s} + t\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \xi''\left(z\frac{\partial f}{\partial p} + 3p\frac{\partial f}{\partial r} + q\frac{\partial f}{\partial s}\right) - \xi''' z\frac{\partial f}{\partial r}$$

das Symbol der allgemeinen infinitesimalen Transformation unserer zweimal erweiterten Gruppe. Die zugehörigen Differentialinvarianten von nullter, erster und zweiter Ordnung sind daher bestimmt als Lösungen des vollständigen Systems

---

1) Verhandl. der Gesellschaft der Wissenschaft zu Christiania 1883.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial f}{\partial r}=0\,,\quad z\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial s}$$

$$z\frac{\partial f}{\partial z}+2p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}+2s\frac{\partial f}{\partial s}+t\frac{\partial f}{\partial t}=0\,.$$

Wir finden also eine Differentialinvariante nullter Ordnung, nämlich y, die wir mit α bezeichnen, eine von erster Ordnung: $\beta=\frac{q}{z}$ und zwei von zweiter Ordnung, nämlich

$$u=\frac{zs-pq}{z^3}\,,\quad v=\frac{t}{z}\,.$$

Dementsprechend ist

$$\Omega(\mu\nu uv)=0$$

die allgemeine Form einer invarianten Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Dass hiermit wirklich alle invarianten partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gefunden sind, ergiebt sich am einfachsten daraus, dass unter den vierreihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 2p & q & 3r & 2s & t \\ 0 & 0 & 0 & z & 0 & 3p & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

solche vorhanden sind z. B.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 2p & 3r \\ 0 & 0 & z & 3p \\ 0 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}=z^3\,,$$

die weder identisch, noch vermöge einer wirklichen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung verschwinden.

Im vorliegenden Falle ist es leicht einzusehen, dass alle Differentialinvarianten dritter und höherer Ordnung sich durch

Differentiation aus μ, ν, u, v ableiten lassen und dass somit diese vier Grössen nach meiner Terminologie ein *volles System von Differentialinvarianten* bilden.

Betrachten wir nämlich eine beliebige Fläche, die keine Relation von der Form

$$W\left(y, \frac{q}{z}\right) = 0 = W(\mu\nu)$$

erfüllen, so können wir die Grössen $\alpha\,\beta$ als *Gaussische* Coordinaten für die Punkte dieser Fläche wählen, anders ausgesprochen, wir können statt xy die Grössen $\alpha\,\beta$ als unabhängige Veränderliche einführen. Indem wir dies thun, können wir nachweisen, dass die vier Grössen

$$\text{(M)} \qquad \frac{\partial u}{\partial \mu}, \; \frac{\partial u}{\partial \nu}, \; \frac{\partial v}{\partial \mu}, \; \frac{\partial v}{\partial \nu}$$

Differentialinvarianten und offenbar Differentialinvarianten dritter Ordnung unserer Gruppe sind. Um das zu beweisen, wählen wir zwei beliebige Differentialinvarianten m^{ter} Ordnung, etwa U und V, und bilden die allgemeine Gleichung

$$\Phi(UV) = 0$$

mit der arbiträren Function Φ. Indem wir Φ nach und nach in allen möglichen Weisen wählen, erhalten wir unendlich viel Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung, die sämmtlich intermediäre Integrale und zwar die allgemeinsten intermediären Integrale der Differentialgleichung $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dU}{dx} & \dfrac{dU}{dy} \\ \dfrac{dV}{dx} & \dfrac{dV}{dy} \end{vmatrix} = 0 = \Delta$$

sind. Da nun der allgemeine Ausdruck $\Phi(UV)$ immer eine Differentialinvariante darstellt, so ist $\Delta = 0$ sicher eine invariante Differentialgleichung.

Sind daher $U\,V\,W$ drei Differentialinvarianten, so ist die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dV}{dx} - c\frac{dW}{dx} \\ \frac{dU}{dy} & \frac{dV}{dy} - c\frac{dW}{dy} \end{vmatrix} = 0$$

immer eine invariante Differentialgleichung, welchen Werth auch die Constante c haben möge. Diese Gleichung lässt sich aber auf die Form bringen

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dV}{dx} \\ \frac{dU}{dy} & \frac{dV}{dy} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{dU}{dx} & \frac{dW}{dx} \\ \frac{dU}{dy} & \frac{dW}{dy} \end{vmatrix} = c$$

und hier ist die linke Seite gerade, weil c eine arbiträre Constante darstellt, sicher eine Differentialinvariante.

Die gefundene Differentialinvariante lässt sich nun, wenn wir U und W als unabhängige Veränderliche statt xy einführen, durch die Functionaldeterminante der Grössen UV hinsichtlich der unabhängigen Veränderlichen UW:

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dU} & \frac{dV}{dU} \\ \frac{dU}{dW} & \frac{dV}{dW} \end{vmatrix} \equiv \frac{dV}{dW}$$

ersetzen.

In unserem Falle sind also wirklich die Grössen (M), die wir kurz durch

$$u_\mu \; u_\nu \; v_\mu \; v_\nu$$

bezeichnen, Differentialinvarianten.

Wir kennen somit *acht* Differentialinvarianten, nämlich

(N) $$\mu, \; \nu, \; u, \; v, \; u_\mu, \; u_\nu, \; v_\mu, \; v_\nu,$$

deren Ordnung kleiner als *vier* ist. Nun aber lässt sich nachweisen, dass es nicht mehr als sieben unabhängige Differentialinvarianten giebt, deren Ordnung kleiner als vier ist. Wollen wir nämlich alle diese Differentialinvarianten berechnen, so müssen wir zu den früher gefundenen Formeln

$$\delta x = \xi(x)\,\delta\tau, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = -\xi' z\,\delta\tau$$
$$\delta p = (-2\xi' p - \xi'' z)\,\delta\tau, \quad \delta q = -\xi' q\,\delta\tau$$
$$\delta r = (-3\xi' r - 3\xi'' p - \xi''' z)\,\delta\tau$$
$$\delta s = (-2\xi' s - \xi'' q)\,\delta\tau, \quad \delta t = -\xi' t\,\delta\tau$$

noch die Ausdrücke der Incremente

$$\delta\alpha = (-4\xi'\alpha - 6\xi'' r - 4\xi^{(4)} z)\,\delta\tau$$
$$\delta\beta = (-3\xi'\beta - 3\xi'' s - \xi''' q)\,\delta\tau$$
$$\delta\gamma = (2\xi'\gamma - \xi'' t)\,\delta\tau$$
$$\delta\delta = -\xi'\delta.\,\delta\tau$$

hinzufügen.

Die gesuchten Differentialinvarianten sind Lösungen des vollständigen Systems:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad z\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

$$z\frac{\partial f}{\partial z} + 2p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} + 3r\frac{\partial f}{\partial r} + 2s\frac{\partial f}{\partial s} + t\frac{\partial f}{\partial t} + 4\alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$
$$+ 3\beta\frac{\partial f}{\partial \beta} + 2\gamma\frac{\partial f}{\partial \gamma} + \delta\frac{\partial f}{\partial \delta} = 0$$

$$z\frac{\partial f}{\partial p} + 3p\frac{\partial f}{\partial r} + q\frac{\partial f}{\partial s} + 6r\frac{\partial f}{\partial \alpha} + 3s\frac{\partial f}{\partial \beta} + t\frac{\partial f}{\partial \gamma} = 0$$

$$z\frac{\partial f}{\partial r} + 4p\frac{\partial f}{\partial \alpha} + q\frac{\partial f}{\partial \beta},$$

das *zwölf* unabhängige Veränderliche enthält und aus fünf unabhängigen Gleichungen besteht, indem die eine fünfreihige Determinante der zugehörigen Matrix den Werth z^4 besitzt. Hieraus ergiebt sich andererseits, dass jede invariante Differentialgleichung dritter Ordnung sich als eine Relation zwischen Differentialinvarianten darstellen lässt, andererseits, dass die Zahl der unabhängigen Differentialinvarianten dritter Ordnung gleich

$$12 - 5 = 7$$

ist.

Hieraus ziehen wir den Schluss, dass die acht Grössen (N) durch eine und nur durch *eine identische Relation*

$$W(\mu\,\nu\,u\,v\,u_\mu\,u_\nu\,v_\mu\,v_\nu) \equiv 0$$

verbunden sind.

Jetzt können wir eine allgemeine Integrationstheorie für alle partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung entwickeln, die unsere Gruppe gestatten.

Liegt in der That eine invariante partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vor, so können wir sie nach früheren Auseinandersetzungen auf die Form

$$\Omega(\mu\,\nu\,u\,v) = 0$$

bringen. Sodann lösen wir diese Gleichung nach u oder v, etwa nach v auf,

$$v = V(\mu\nu u),$$

und berechnen sodann die Differentialquotienten v_μ und v_ν. In dieser Weise gelingt es, aus der identischen Gleichung $W = 0$ eine Relation von der Form

$$\Pi(\mu\nu u u_\mu u_\nu) = 0$$

abzuleiten. Hiermit ist es uns gelungen, die Bestimmung von u als Function von μ und ν auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung *erster* Ordnung, also auf *gewöhnliche* Differentialgleichungen zurückzuführen.

Es liegt in der Natur der Sache, dass sich über die Integration von $\Pi = 0$ nichts Besonderes sagen lässt, indem Π eine ganz beliebige Function von seinen fünf Argumenten ist. Setzen wir aber voraus, dass die Integration von $\Pi = 0$ schon geleistet ist, so gestattet uns die zugehörige Integralgleichung

$$u - U(\mu\nu) = 0$$

zusammen mit der vorgelegten Gleichung $\Omega = 0$, auch die Grösse v als Function von μ, ν zu berechnen: $v = V(\mu\nu)$.

Die beiden in dieser Weise gefundenen Gleichungen

$$u - U(\mu\nu) = 0\,, \quad v - V(\mu\nu) = 0$$

liefern aber nach Substitution der Werthe

$$\mu = y\,, \quad \nu = \frac{q}{z}\,, \quad u = \frac{zs - pq}{z^3}\,, \quad v = \frac{t}{z}$$

die beiden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{zs - pq}{z^3} - U\left(y, \frac{q}{z}\right), \quad \frac{t}{z} - V\left(y, \frac{q}{z}\right) = 0\,,$$

die gemeinsame Integralflächen haben, und sogar ein Involutionssystem zweiter Ordnung bilden. Daher lässt sich die Bestimmung der gemeinsamen Integralflächen (vgl. S. 71—81) durch die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen leisten.

Gestattet daher eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in xyz die unendliche Gruppe:

$$\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x} - \xi' . z\frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

so verlangt ihre Integration nur die successive Integration von drei gewöhnlichen simultanen Systemen.

Entsprechende Theorien lassen sich entwickeln für beliebige Systeme partieller Differentialgleichungen in xyz, die unsere Gruppe gestatten. Wir beschränken uns auf die folgenden einfachen Bemerkungen.

Wir wollen annehmen, dass ein Involutionssystem dritter Ordnung

$$F_1(xyzpqr\,..\,\alpha\beta\gamma\delta) = 0\,, \quad F_2 = 0$$

vorliegt, das unsere unendliche Gruppe gestattet. Nach unseren früheren Auseinandersetzungen können wir mit Sicherheit schliessen, dass dieses Gleichungssystem auf die Form

$$\Phi_1(\mu\nu uv u_\mu u_\nu v_\mu v_\nu) = 0\,, \quad \Phi_2 = 0$$

gebracht werden kann. Erinnern wir uns nun überdies der identischen Relation $W = 0$, so sehen wir, dass die beiden Grössen u und v als Functionen von μ und ν durch *drei* par-

tielle Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad W = 0$$

bestimmt sind. Wir finden daher (vgl. S. 82 u. ff.) die Grössen u und v als Functionen von μ und ν durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Sodann behandeln wir die gefundenen Integralgleichungen

$$u = U(\mu\nu), \quad v = V(\mu\nu)$$

wie im vorigen Beispiele.

Wäre nur *eine* Gleichung *dritter* Ordnung vorgelegt, die unsere Gruppe gestattet, etwa die Gleichung

$$F(xyz \dots \gamma\delta) = 0,$$

so bringen wir sie auf die Form

$$\Omega(\mu\nu u v u_\mu u_\nu v_\nu v_\nu) = 0,$$

fügen sodann die Gleichung $W = 0$ hinzu und müssen sodann das Involutionssystem erster Ordnung

$$\Phi = 0, \quad W = 0$$

mit den beiden unbekannten Functionen u und v integriren. Durch zweimalige Differentiation und Elimination von v ersetzt man dieses Involutionssystem erster Ordnung mit zwei unbekannten Functionen durch ein einziges Involutionssystem *dritter* Ordnung mit der einzigen Function u:

$$\Theta_1(\mu\nu u, u_\mu \dots u_{\nu\nu\nu}) = 0, \quad \Theta_2 = 0.$$

Um das hiermit erhaltene Resultat zu verallgemeinern, stelle ich die folgenden Ueberlegungen an.

Ein Involutionssystem in den Veränderlichen xyz besitzt mehrere charakteristische Zahlen, unter denen aber eine ganz bestimmte, die ich mit ω bezeichne, ohne Vergleich die wichtigste ist. Diese Zahl ω, die ich als *Classe* des Involutionssystem bezeichne, definire ich folgendermassen.

Liegt in den Veränderlichen xyz ein Involutionssystem m^{ter} Ordnung vor, so ist die Differenz zwischen der Zahl der Differentialquotienten $(m+q)^{ter}$ Ordnung und der Zahl der durch Differentiation hervorgehenden unabhängigen Differentialgleichungen $(m+q)^{ter}$ Ordnung immer dieselbe, gleichgültig, ob q gleich oder grösser als Null ist. Diese Zahl bezeichne ich mit ω und nenne sie die Classe des Involutionssystems.

Benutze ich diese Terminologie, so geben die Entwickelungen des Kapitel 2 so zu sagen unmittelbar den folgenden Satz:

Theorem. *Wenn die Classe eines Involutionssystems in den Veränderlichen $x\,y\,z$ gleich Null oder 1 ist, so lässt sich die Erledigung des Involutionssystems auf gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen.*

Wir können aber jetzt auch noch den folgenden allgemeinen Satz aufstellen:

Theorem. *Gestattet ein Involutionssystem ω^{ter} Classe die unendliche Gruppe $\xi(x)p - \xi' zr$, so lässt es sich immer zurückführen auf ein Involutionssystem $(\omega - 1)^{ter}$ Classe verbunden mit einem Involutionssystem erster Classe.*

Nach unseren früheren Auseinandersetzungen gilt genau dasselbe für Involutionssysteme, die die unendliche Gruppe $Z(z)r$ gestattet. In der That: *Das soeben formulirte Theorem ist nur der specielle Fall eines allgemeinen Theorems, das sich auf alle Involutionssysteme in beliebig vielen Veränderlichen und ebenfalls auf alle unendlichen Gruppen ausdehnen lässt.* In dieser Abhandlung beschränken wir uns aber auf specielle Fälle dieser allgemeinen Theorie, die wir an anderen Stellen eingehend entwickeln wollen.

Betrachten wir jetzt partielle Differentialgleichungen, die die Gruppe

$$\xi(x)p + \eta(y)q$$

gestatten. Hier hat die zweimal erweiterte infinitesimale Transformation die Form

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} - \xi' p\frac{\partial f}{\partial p} - \eta' q\frac{\partial f}{\partial q} - (2\xi' r + \xi'' p)\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$-(\xi' + \eta')s\frac{\partial f}{\partial s} - (2\eta' t + \eta'' q)\frac{\partial f}{\partial t}\,.$$

Es sind daher die Differentialinvarianten zweiter Ordnung die Lösungen des vollständigen Systems

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0\,,$$

$$p\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial s} = 0\,, \quad q\frac{\partial f}{\partial q} + s\frac{\partial f}{\partial s} = 0\,,$$

das heisst sie sind Functionen von

$$z \text{ und } \frac{s}{pq}\,.$$

Hieraus schliessen wir, dass die invarianten Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch die allgemeine Formel

$$\frac{s}{pq} = \varphi(z)$$

dargestellt werden. Hier geben die auf Seite 113 u. ff. entwickelten Methoden die beiden intermediären Integrale

$$e^{-\int\varphi\, dz}\frac{\partial z}{\partial x} = A'(x), \quad e^{-\int\varphi\, dz}\frac{\partial z}{\partial y} = B'(y)\,,$$

woraus durch Quadratur die allgemeine Integralgleichung

$$\int e^{-\int\varphi\, dz}\, dz = A(x) + B(y)$$

hervorgeht.

Unsere Gruppe hat *vier* Differentialinvarianten dritter Ordnung, die wir mit

$$z = \mu\,, \quad \frac{s}{pq} = \nu\,, \quad u\,, \quad v$$

bezeichnen; ferner sieben Invarianten vierter Ordnung; da nun aber

$$\mu,\ \nu,\ u,\ v,\ u_\mu,\ u_\nu,\ v_\mu,\ v_\nu$$

solche Invarianten sind, so besteht eine identische Relation

$$W(\mu\nu u v u_\mu u_\nu v_\mu v_\nu) \equiv 0\,.$$

Liegt nun irgend eine invariante Differentialgleichung dritter Ordnung vor, so bringen wir sie zunächst auf die Form

$$\Omega\,(\mu\nu u v) = 0$$

und schaffen sodann aus $W = 0$ etwa die Grösse v weg. Hierdurch erhalten wir zur Bestimmung von u als Function von μ und ν eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Ist sie integrirt, so bilden die beiden in dieser Weise erhaltenen Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$u - U(\mu\nu) = 0\,, \quad v - V(\mu\nu) = 0$$

ein Involutionssystem dritter Ordnung zweiter Classe.

Um nun eine weitere Reduction zu erreichen, verwerthen wir den Umstand, dass die bekannte Gruppe zwei uns bekannte unendliche Untergruppen enthält, nämlich die Gruppen

$$\xi(x)p \text{ und } \eta(y)q$$

(die überdies alle beide *invariante* Untergruppen sind).

In Folge dessen gelingt es uns sogar, in zwei verschiedenen Weisen unser Involutionssystem zweiter Classe auf ein System erster Classe, also auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen. Indem wir uns an dieser Stelle mit diesem Resultate begnügen, gehen wir auf die Frage, ob die gefundenen gewöhnlichen Differentialgleichungen besondere Vereinfachungen gestatten, gar nicht ein.

Durch Weiterführung dieser Betrachtungen erhält man den Satz:

Theorem. *Gestattet ein Involutionssystem n^{ter} Classe in xyz die unendliche Gruppe*

$$\xi(x)p + \eta(y)q\,,$$

so lässt es sich zurückführen auf ein Involutionssystem $(n-2)^{ter}$ Classe und gewöhnliche Differentialgleichungen.

Aehnliche Betrachtungen zeigen, dass dieser Satz auch für solche Involutionssysteme in xyz besteht, die die unendliche Gruppe

$$\xi(x)p + \eta(y)q - z(\xi' + \eta')r$$

gestattet.

Gestattet andererseits ein Involutionssystem n^{ter} Classe in xyz die unendliche Gruppe

$$\xi(x)p + \eta(y)q + \zeta(z)r$$

mit mehreren bekannten *invarianten* Untergruppen, so lässt sich unser Problem zurückführen auf die Integration eines Involutionssystems $(n-3)^{ter}$ Classe etc.

Wie gross die mögliche Erniedrigung ist, beruht eben in jedem Falle auf der Zahl der willkürlichen Functionen, die in der bekannten unendlichen Gruppe auftreten, präciser gesagt, auf den Classenzahlen der Definitionsgleichungen der betreffenden Gruppe.

Denken wir uns andererseits, dass ein Involutionssystem in xyz vorliegt, das eine *unbekannte* Gruppe von Berührungstransformationen gestattet, so stellt sich zunächst die Frage, wie man diese Gruppe in einfachster Weise bestimmt. Zur allgemeinen Erledigung dieser Frage muss man zuerst alle Gruppen auf kanonische Formen bringen. Meine allgemeinen Theorien gestatten, wie längst von mir angegeben, alle diese Probleme rational zu erledigen.

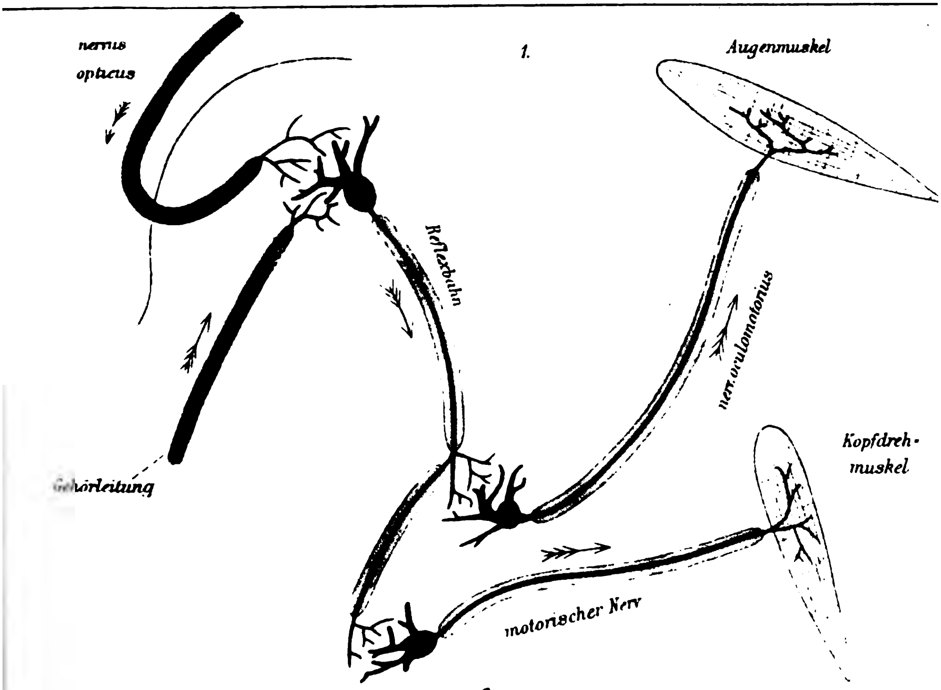
Alle Entwickelungen dieser Abhandlung beruhen explicite oder implicite auf meiner allgemeinen Transformationstheorie. In meiner nächsten Arbeit, deren Inhalt ich übrigens schon seit längerer Zeit dieser Gesellschaft mitgetheilt habe, versuche ich die Frage, wie man den Gruppenbegriff in rationeller Weise für die Theorie der Differentialgleichungen verwerthet, ganz allgemein zu behandeln. Kann auch nicht darüber die Rede sein, diese Frage in definitiver Weise zu erledigen, so wage ich doch zu behaupten, dass meine allgemeinen Resultate die Aufmerksamkeit der Mathematiker verdienen.

In meinen Vorlesungen im Wintersemester 1893—1894 illustrirte ich die Theorien des letzten Kapitels durch einige weiteren Beispiele. Zwei unter meinen Zuhörern, nämlich die Herren BEUDON und WILLIAMS werden wahrscheinlicherweise versuchen, die von mir skizzirten Theorien, auf die die Fürstlich JABLONOWSKI'sche Gesellschaft inzwischen die Aufmerksamkeit gerichtet hat, zu verwerthen [1]).

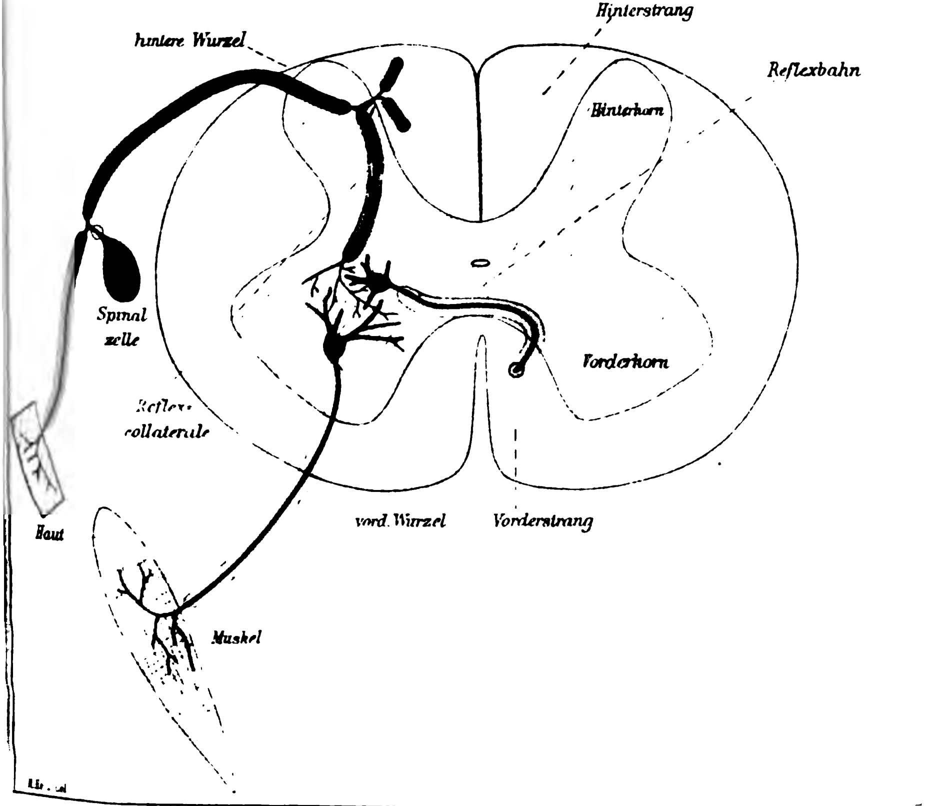
---

1) In einer bald erscheinenden Arbeit gebe ich eine ausführlichere Darstellung meiner längst veröffentlichten Bestimmung aller Flächen, die eine continuirliche *projective* Gruppe gestatten. Ich sehe mich dazu veranlasst, da es sich gezeigt hat, dass Mathematiker, die sich für diese Untersuchung interessiren, nicht dazu im Stande gewesen sind, einige von mir unterdrückten *einfachen* Rechnungen auf eigene Hand zu reproduciren. (Vgl. Archiv for Math.... Bd. 7, Christiania 1882, sowie Theorie der Transfgr. Bd. 3, Leipzig 1893.)

1.


nervus opticus
Augenmuskel
Reflexbahn
nerv. oculomotorius
Kopfdreh-muskel
motorischer Nerv

2.


Hinterstrang
hintere Wurzel
Reflexbahn
Hinterhorn
Spinal zelle
Vorderhorn
Haut
vord. Wurzel
Vorderstrang
Muskel

SITZUNG VOM 4. MÄRZ 1895.

Vorträge hielten:

1. Herr **Adolph Mayer**, o. M.: Ueber die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode und das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variabeln.
2. Herr **Hermann Credner**, o. M.: Ueber die Phosphoritknollen des Leipziger Mittel-Oligocäns und die norddeutsche Phosphoritzone (siehe »Abhandlungen«).
3. Herr **Wilhelm Ostwald**, o. M.: Ueber physiko-chemische Messmethoden.
4. Herr **Max von Frey**, a. o. M.: Beiträge zur Sinnesphysiologie der Haut. Dritte Mittheilung.
5. Herr **Carl Neumann**, o. M.: Ueber einen Ersatz des Dirichlet'schen Principes für gewisse Fälle.
6. Herr **Sophus Lie**, o. M.: Ueber eine Abhandlung des Herrn G. Scheffers: Eine Abbildung der Geraden des Raumes in der Ebene.
7. **Derselbe**: Bestimmung aller Flächen, die eine continuirliche Schaar von projectiven Transformationen gestatten.

. . .

A. Mayer, *Die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode und das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variabeln.*

Im Jahrgang 1885 dieser Berichte und dann noch etwas weiter ausgeführt im 26. Bande der Mathematischen Annalen habe ich eine strenge Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode für die Aufgabe gegeben, die als das allgemeinste Problem des Maximums und Minimums einfacher Integrale angesehen werden darf[1]):

Unter allen stetigen Functionen $y_1, \ldots, y_n$ von x, die r gegebenen Differentialgleichungen 1. O. genügen und in den

1) Man kann sich immer auf erste Differentialquotienten der unbekannten Functionen beschränken, da man, wenn ursprünglich höhere Differentialquotienten auftraten, nur die niedrigeren Ableitungen einer jeden unbekannten Function neuen Variabeln gleichzusetzen und dafür diese Definitionsgleichungen als neue Bedingungsgleichungen hinzuzufügen braucht, um die Aufgabe auf eine solche mit nur ersten Differentialquotienten zurückgeführt zu haben.

beiden gegebenen Grenzen x_0 und x_1 gegebene Werthe besitzen, diejenigen zu finden, für welche ein gegebenes Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\, dx$$

einen grössten oder kleinsten Werth erhält.

Bedenkt man aber, dass die Differentialgleichung

$$y_0' - f = 0,$$

verbunden mit der Grenzbedingung, dass y_0 für $x = x_0$ verschwinden soll, als Werth der Function y_0 an der Stelle $x = x_1$ eben

$$y_{01} = \int_{x_0}^{x_1} f\, dx$$

ergiebt, so erkennt man, dass diese Aufgabe selbst wieder nur ein specieller Fall der folgenden ist:

Unter allen stetigen Functionen $y_0, y_1, \ldots, y_n$ der unabhängigen Variabeln x, welche $r+1$ gegebene Differentialgleichungen 1. O.

$$(1) \qquad \varphi_k(x, y_0, y_1, \ldots, y_n, y_0', y_1', \ldots, y_n') = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, r < n,$$

identisch erfüllen, und von denen überdies die n letzten für zwei gegebene Werthe x_0 und x_1 von x, die erste, y_0, dagegen nur für $x = x_0$, gegebene Werthe besitzen, diejenigen zu finden, denen ein grösster oder kleinster Werth der Function y_0 an der Stelle $x = x_1$ zugehört.

Mit diesem allgemeinsten Problem der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variabeln habe ich mich bereits früher (diese Berichte 1878) beschäftigt, damals aber die Lagrange'sche Regel einfach als selbstverständlich angenommen.

Die Differentialgleichungen, welche dieselbe liefert, sind in Bezug auf die Variabeln y vollständig symmetrisch gebaut und bringen hierdurch die Reciprocitätsverhältnisse, welche zwischen dem vorliegenden Problem und demjenigen bestehen, in welchem y_0 mit irgend einer der n anderen Variabeln $y_1, \ldots, y_n$ seine Rolle ausgetauscht hat, unmittelbar zur Anschauung.

Obgleich daher das erste speciellere Problem insofern ungleich wichtiger ist, als sich bisher alle interessanteren Aufgaben

der Variationsrechnung noch immer ihm unterordnen liessen, so hat doch auch das allgemeine Problem und vor allem die Frage eigenes Interesse, ob denn auch seine Lösungen nothwendig den Lagrange'schen Differentialgleichungen genügen müssen.

Diese Frage zu entscheiden, ist der Zweck der folgenden Betrachtungen. Sie werden zeigen, dass die *Lagrange'sche Multiplicatorenmethode* in der That auch für das allgemeine Problem zu Recht besteht, ja dass sie sich hier in gewisser Hinsicht noch einfacher begründen lässt, als für das früher behandelte specielle Problem. Während dort nämlich gewisse Ausnahmen eintreten konnten[1]), gilt hier die Lagrange'sche Regel ohne jede Ausnahme, und das erklärt sich auch sofort daraus, dass die Lagrange'schen Gleichungen im allgemeinen Problem *verkürzte*, im speciellen dagegen *unverkürzte* lineare Differentialgleichungen in Bezug auf die Multiplicatoren sind.

An die Ableitung der Differentialgleichungen des allgemeinen Problems musste sich naturgemäss auch eine Discussion dieser Gleichungen anschliessen, d. h. es war nun auch die Frage noch zu beantworten, wann denn das Problem möglich und bestimmt ist, und dies wieder veranlasste mich, die 1878 nur angedeutete Reduction der Differentialgleichungen des Problems auf eine partielle Differentialgleichung 1. O. mit nur $n+1$ unabhängigen Variabeln gleichfalls noch wirklich durchzuführen.

§ 1.

Ableitung der Differentialgleichungen des Problems und Anzahl ihrer Integrationsconstanten.

Kommen unter den gegebenen Differentialgleichungen (1) endliche Gleichungen vor, oder lassen sich aus ihnen die Differentialquotienten $y_0', y_1', \ldots, y_n'$ vollständig eliminiren, so kann man sich immer aus diesen Gleichungen schon eine oder mehrere der Unbekannten y selbst als Functionen von x und von den übrigen bestimmt denken. Daher ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man voraussetzt, dass die Determinante:

(2) $$\sum \pm \varphi_{0y_0'}' \varphi_{1y_1'}' \cdots \varphi_{ry_r'}'$$

1) Eine demnächst in den Mathem. Annalen erscheinende neue und höchst originelle Begründungsart der Lagrange'schen Methode von Herrn Turksma dürfte übrigens auch diese Ausnahmen beseitigen.

weder an sich Null ist, noch auch in Folge der Bedingungsgleichungen (1) identisch verschwindet.

Ist dann die Aufgabe überhaupt allgemein, d. h. ohne Beschränkung der vorgeschriebenen Grenzwerthe lösbar, so muss sie, so lange die letzteren nicht ganz besondere Ausnahmewerthe erhalten, jedenfalls auch solche Lösungen zulassen, für welche die Determinante (2) nicht identisch Null wird.

Diese Lösungen denke ich mir bereits gefunden und bezeichne sie eben durch $y_0, y_1, \dots, y_n$ (sodass also im Folgenden $y_0, y_1, \dots, y_n$ bestimmte stetige Functionen von x bedeuten, von denen aber auch noch die ersten Ableitungen zwischen x_0 und x_1 als stetig vorausgesetzt werden).

Dann muss für alle stetigen Variationen $\delta y_1, \dots, \delta y_n$, welche für $x = x_0$ und $x = x_1$ verschwinden und zusammen mit δy_0 den $r + 1$ linearen Differentialgleichungen genügen:

$$(3) \qquad \sum_0^n {}^i (\varphi'_{k y_i} \delta y_i + \varphi'_{k y'_i} \delta y'_i) = 0 ,$$

die Variation δy_0 sowohl an der Stelle $x = x_0$ als auch an der Stelle $x = x_1$ den Werth Null annehmen.

Es handelt sich darum, aus dieser Forderung Differentialgleichungen abzuleiten, welche unsre Lösungen $y_0, y_1, \dots, y_n$ nothwendig befriedigen müssen, und welche zugleich auch diese Lösungen zu bestimmen gestatten, und hierzu wieder kommt es zunächst darauf an, aus den, nach den Differentialquotienten von $\delta y_0, \delta y_1, \dots, \delta y_r$ auflösbaren Gleichungen (3) die Werthe dieser $r + 1$ Variationen selbst zu berechnen.

Zu dem Ende multiplicire ich die $r + 1$ Bedingungsgleichungen (3) mit den vorläufig unbestimmten Factoren λ_k, addire sie dann und schreibe die Summe in der Form:

$$4) \quad \frac{d}{dx}\left(\sum_0^n {}^i \delta y_i \sum_0^r {}^k \lambda_k \varphi'_{k y'_i}\right) + \sum_0^n {}^i \delta y_i \sum_0^r {}^k \left(\lambda_k \varphi'_{k y_i} - \frac{d \lambda_k \varphi'_{k y'_i}}{dx}\right) = 0 .$$

Nach der über die Determinante (2) eingeführten Annahme sind nun die $r + 1$ Gleichungen:

$$(5) \qquad \sum_0^r {}^k \left(\lambda_k \varphi'_{k y_\varrho} - \frac{d \lambda_k \varphi'_{k y'_\varrho}}{dx}\right) = 0 ,$$

$$\varrho = 0, 1, \dots r ,$$

auflösbar nach den Differentialquotienten der Multiplicatoren $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$, und bilden somit ein verkürztes System von $r+1$ linearen Differentialgleichungen 1. O. zwischen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ und x, das $r+1$ linear unabhängige Systeme von Lösungen zulässt:

$$\lambda_0 = \lambda_0^\sigma, \quad \lambda_1 = \lambda_1^\sigma, \quad \ldots, \lambda_r = \lambda_r^\sigma,$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots, r.$$

Legt man den Multiplicatoren der Reihe nach diese $r+1$ verschiedenen Werthsysteme bei, so erhält man aus (4) die $r+1$ Gleichungen:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_0^n{}_i\, \delta y_i \sum_0^r{}_k\, \lambda_k^\sigma \varphi'_k y'_i\right) + \sum_{r+1}^n{}_\tau\, \delta y_\tau \sum_0^r{}_k \left(\lambda_k^\sigma \varphi'_k y_\iota - \frac{d\lambda_k^\sigma \varphi'_k y'_\tau}{dx}\right) = 0,$$

und aus diesen entspringen weiter, da alle Variationen δy für $x = x_0$ verschwinden sollen, durch Integration zwischen den Grenzen x_0 und x die Gleichungen:

$$(6) \qquad \sum_0^r{}_\varrho\, \delta y_\varrho \sum_0^r{}_k\, \lambda_k^\sigma \varphi'_k y'_\varrho = -\sum_{r+1}^n{}_\tau\, \delta y_\tau \sum_0^r{}_k\, \lambda_k^\sigma \varphi'_k y'_\tau$$
$$-\int_{x_0}^x dx \sum_{r+1}^n{}_\tau\, \delta y_\tau \sum_0^r{}_k \left(\lambda_k^\sigma \varphi'_k y_\tau - \frac{d\lambda_k^\sigma \varphi'_k y'_\tau}{dx}\right).$$

Die Determinante:

$$\sum \pm \lambda_0^0 \lambda_1^1 \ldots \lambda_r^r \sum \pm \varphi'_0 y'_0\, \varphi'_1 y'_1 \ldots \varphi'_r y'_r$$

dieser $r+1$ Gleichungen ist nicht Null, sie liefern also unmittelbar die gesuchten Lösungen $\delta y_0, \delta y_1, \ldots, \delta y_r$ der Gleichungen (3).

Wählen wir überdies x_0 und x_1 so, dass diese Determinante auch für $x = x_0$ und $x = x_1$ nicht verschwindet, so bleiben die Gleichungen (6) auch an diesen beiden Stellen noch auflösbar nach $\delta y_0, \delta y_1, \ldots, \delta y_r$. Angewandt auf die Werthe x_0 und x_1 von x lehren sie daher einerseits, dass $\delta y_0, \delta y_1, \ldots, \delta y_r$ an der Stelle $x = x_0$ schon von selbst den verlangten Werth Null annehmen, und ergeben andrerseits für die Werthe $\delta y_{01}, \delta y_{11}, \ldots, \delta y_{r1}$ dieser Variationen an der Stelle $x = x_1$ die $r+1$ von einander unabhängigen Gleichungen:

$$(7)\qquad \sum_0^r{}_\varrho\, \delta y_{\varrho 1} \left[\sum_0^r{}_k \lambda_k^\sigma \varphi_k' y_\varrho'\right]_{x=x_1}$$

$$= -\int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{r+1}^n{}_\tau\, \delta y_\tau \sum_0^r{}_k \left(\lambda_k^\sigma \varphi_k' y_\tau - \frac{d\lambda_k^\sigma \varphi_k' y_\tau'}{dx}\right).$$

Aus diesen erhält man für die $\delta y_{\varrho 1}$ selbst Werthe von der Form:

$$\delta y_{\varrho 1} = -\sum_0^r{}_\sigma\, c_\varrho^\sigma \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{r+1}^n{}_\tau\, \delta y_\tau \sum_0^r{}_k \left(\lambda_k^\sigma \varphi_k' y_\tau - \frac{d\lambda_k^\sigma \varphi_k' y_\tau'}{dx}\right).$$

Die constanten Factoren c_ϱ^σ aber kann man unter die Integralzeichen ziehen und dann alle Integrale zu einem vereinigen. Auf diese Weise findet man, wenn man noch:

$$(8)\qquad \sum_0^r{}_\sigma\, c_\varrho^\sigma \lambda_k^\sigma = \mu_k^\varrho$$

setzt:

$$(9)\qquad \delta y_{\varrho 1} = -\int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{r+1}^n{}_\tau\, \delta y_\tau \sum_0^r{}_k \left(\mu_k^\varrho \varphi_k' y_\tau - \frac{d\mu_k^\varrho \varphi_k' y_\tau'}{dx}\right),$$

und hierin sind nach (8)

$$\lambda_0 = \mu_0^\varrho,\ \lambda_1 = \mu_1^\varrho,\ \ldots,\ \lambda r = \mu_r^\varrho$$

wiederum Lösungen der Differentialgleichungen (5).

Die Grundforderung unserer Aufgabe, dass δy_0 für $x = x_1$ gleichzeitig mit $\delta y_1, \ldots \delta y_n$ verschwinden muss, reducirt sich demnach auf die, dass die Gleichung:

$$(10)\qquad W_{\delta y}^0 \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{r+1}^n{}_\tau\, \delta y_\tau \sum_0^r{}_k \left(\mu_k^0 \varphi_k' y_\tau - \frac{d\mu_k^0 \varphi_k' y_\tau'}{dx}\right) = 0$$

erfüllt werden muss durch alle stetigen Functionen $\delta y_{r+1}, \ldots \delta y_n$, welche in den beiden Grenzen x_0 und x_1 verschwinden, und die r Bedingungen erfüllen:

$$(11)\qquad W_{\delta y}^\varrho \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{r+1}^n{}_\tau\, \delta y_\tau \sum_0^r{}_k \left(\mu_k^\varrho \varphi_k' y_\tau - \frac{d\mu_k^\varrho \varphi_k' y_\tau'}{dx}\right) = 0,\ ^{1)}$$

$$\varrho = 1, 2, \ldots, r.$$

1) Man hätte natürlich auch gleich unmittelbar aus den Gleichungen (7) schliessen können, dass eine der $n+1$ Gleichungen:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{r+1}^n{}_\tau\, \delta y_\tau \sum_0^r{}_k \left(\lambda_k^\sigma \varphi_k' y_\tau - \frac{d\lambda_k^\sigma \varphi_k' y_\tau'}{dx}\right) = 0$$

eine Folge der übrigen sein muss.

Setzt man aber für $\tau = r + 1, \dots n$:

(12) $$\delta y_\tau = z_\tau + \sum_1^r{}^\sigma \alpha_\sigma u_\tau^\sigma ,$$

wo die α_σ Constanten, die z_τ und u_τ^σ stetige Functionen von x bedeuten, die für $x = x_0$ und $x = x_1$ verschwinden, und von denen die z_μ so willkürlich als möglich bleiben sollen, die u_τ^σ dagegen passend zu wählen sind, so geht diese Forderung über in die, dass die Gleichung:

(10') $$W_z^0 + \sum_1^r{}^\sigma \alpha_\sigma W_{u^\sigma}^0 = 0$$

eine blosse Folge der r Gleichungen sein muss:

(11') $$W_z^\varrho + \sum_1^r{}^\sigma \alpha_\sigma W_{u^\sigma}^\varrho = 0 .$$

Kann man nun die Functionen u_τ^σ so wählen, dass die *Determinante:*

(13) $$\Delta_r \equiv \sum \pm W_{u^1}^1 W_{u^2}^2 \dots W_{u^r}^r$$

nicht Null wird, so beschränken die Gleichungen (11') die Willkür der z in keiner Weise, sondern ordnen nur jedem gegebenen Functionensystem $z_{r+1}, \dots, z_n$ ein System Constanten $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ zu, welche diese r Gleichungen befriedigen.

In diesem Falle muss also für alle stetigen, in beiden Grenzen verschwindenden Functionen z eine Relation von der Form bestehen:

$$W_z^0 \equiv \beta^1 W_z^1 + \dots + \beta^r W_z^r ,$$

in der die β von der Wahl der Functionen z unabhängige Constanten sind.

Setzt man aber:

(14) $$- \mu_k^0 + \sum_1^r{}^\varrho \beta^\varrho \mu_k^\varrho \equiv \nu_k ,$$

so kann man nach (10) und (11) diese Relation so schreiben:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{r+1}^n{}^\tau z_\tau \sum_0^k \left(\nu_k \varphi_k' y_\tau - \frac{d \nu_k \varphi_k' y_\tau'}{dx} \right) \equiv 0 .$$

Ihr Bestehen verlangt daher, dass hierin der Coefficient jedes einzelnen z_τ Null sei.

Nach (14) sind aber mit den μ_k^σ zugleich auch die Functionen:

$$\lambda_0 = \nu_0\,,\quad \lambda_1 = \nu_1, \ldots \lambda_r = \nu_r$$

wieder Lösungen der Differentialgleichungen:

$$(5)\qquad \sum_0^r {}^k \left(\lambda_k \varphi_k' y_\varrho' - \frac{d\lambda_k \varphi_k' y_\varrho'}{dx}\right) = 0\,,$$
$$\varrho = 0, 1, \ldots r.$$

So oft also die Determinante (13) nicht für alle stetigen, in beiden Grenzen verschwindenden Functionen u_τ^σ stets Null ist, muss es nothwendig Lösungen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_r$ der $r+1$ Gleichungen (5) geben, welche gleichzeitig auch die $n-r$ Gleichungen erfüllen:

$$(15)\qquad \sum_0^r {}^k \left(\lambda_k \varphi_k' y_\tau - \frac{d\lambda_k \varphi_k' y_\tau'}{dx}\right) = 0\,,$$
$$\tau = r+1, \ldots, n.$$

Nehmen wir jetzt umgekehrt an, *dass die Determinante Δ_r Null sei, welche stetigen, in beiden Grenzen verschwindenden Functionen man auch für die u_τ^σ setzen möge*, so kann dies einmal davon herrühren, dass jedes einzelne Element:

$$W_{u^\sigma}^\varrho \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{r+1}^n {}^\tau u_\tau^\sigma \sum_0^r {}^k \left(\mu_k^\varrho \varphi_k' y_\tau - \frac{d\mu_k^\varrho \varphi_k' y_\tau'}{dx}\right)$$

für sich stets Null ist. Das aber verlangt, dass jede der Summen:

$$\sum_0^r {}^k \left(\mu_k^\varrho \varphi_k' y_\tau - \frac{d\mu_k^\varrho \varphi_k' y_\tau'}{dx}\right) \equiv 0$$

sei, führt also unmittelbar wieder zu dem früheren Resultate.

Es kann aber auch sein, dass von der Determinante Δ_r nur für irgend ein $p > 1$ und $\leqq r$ sämmtliche Unterdeterminanten p^{ten} Grades identisch verschwinden, dagegen irgend eine Unterdeterminante $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades, etwa:

$$\Delta_{p-1} \equiv \sum \pm W_{u^1}^1 \, W_{u^2}^2 \ldots W_{u^{p-1}}^{p-1}\,,$$

nicht für alle u_τ^σ Null ist.

Setzt man dann für

$$u_\tau^1\,,\quad u_\tau^2,\ldots,\quad u_\tau^{p-1}\,;\quad \tau = r+1,\ldots n\,,$$

irgend solche an beiden Grenzen verschwindende stetige Functionen von x, welche $\varDelta_{p-1}$ nicht zum Verschwinden bringen, und entwickelt die Determinante

$$\varDelta_p \equiv \sum \pm W_{u^1}^1 W_{u^2}^2 \ldots W_{u^p}^p$$

nach den Elementen $W_{u^p}^\varrho$, so ergiebt sich:

(16) $$\varDelta_p \equiv \sum_1^p {}^\varrho c_\varrho W_{u^p}^\varrho\,,$$

wo die Coefficienten:

$$c_\varrho \equiv \frac{\partial \varDelta_p}{\partial W_{u^p}^\varrho}$$

von den p Elementen:

$$W_{u^p}^\varrho \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{r+1}^n {}^\tau u_\tau^p \sum_0^r {}^k \left(\mu_k^\varrho \varphi_k' y_\tau - \frac{d\mu_k^\varrho \varphi_k' y_\tau'}{dx}\right),$$

$$\varrho = 1, 2, \ldots p\,,$$

und damit auch von den Functionen

$$u_{r+1}^p\,,\ \ldots,\ u_n^p$$

selbst unabhängige Constanten sind, und jedenfalls $c \equiv \varDelta_{p-1}$ nicht Null ist.

Setzt man aber

(17) $$\sum_1^p {}^\varrho c_\varrho \mu_k^\varrho \equiv \pi_k\,,$$

so kann man die Formel (16) so schreiben:

$$\varDelta_p \equiv \int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{r+1}^n {}^\tau u_\tau^p \sum_0^r {}^k \left(\pi_k \varphi_k' y_\tau - \frac{d\pi_k \varphi_k' y_\tau'}{dx}\right).$$

Nach Voraussetzung ist nun $\varDelta_p$ Null für alle beliebigen, in beiden Grenzen verschwindenden Functionen $u_{r+1}^p, \ldots, u_r^p$, also müssen die Grössen:

$$\lambda_0 = \pi_0\,,\quad \lambda_1 = \pi_1\,,\ \ldots,\ \lambda_r = \pi_r\,,$$

die nach (17) bereits den Differentialgleichungen (5) genügen, gleichzeitig auch Lösungen der Differentialgleichungen (15) sein, und man sieht somit:

In jedem Falle müssen die Lösungen $y_0, y_1, \ldots, y_n$ *unsres Problems die Eigenschaft besitzen, den* $n+1$ *Differentialgleichungen*:

$$(18) \qquad \sum_0^r {}^k \left(\lambda_k \varphi'_k y_i - \frac{d\lambda_k \varphi'_k y'_i}{dx}\right) = 0\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n\,,$$

gemeinsame Lösungen $\lambda_0, \lambda_1, \ldots. \lambda_r$ *zu verschaffen.* —

In den Multiplicatoren $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sind zu den ursprünglichen $n+1$ Unbekannten $y_0, y_1, \ldots, y_n$ noch $r+1$ neue Unbekannte hinzugetreten. Dafür hat man aber neben den eben gewonnenen $n+1$ Differentialgleichungen (18) auch noch die $r+1$ gegebenen Differentialgleichungen (1) selbst und somit gerade eben soviel Gleichungen als Unbekannte.

Um jedoch der Lösung y_0 für $x = x_0$ und den Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ an den beiden gegebenen Stellen x_0 und x_1 gegebene Werthe verschaffen zu können, müssen diese Lösungen $2n+1$ willkürliche Constanten enthalten.

Nun bleiben die Gleichungen (18) unverändert, wenn man $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ durch $c\lambda_0, c\lambda_1, \ldots, c\lambda_r$ ersetzt, wo c eine willkürliche Constante. Von den willkürlichen Constanten, welche die vollständige Integration des Systems Differentialgleichungen (1) und (18) mit sich bringt, tritt daher eine nur als gemeinschaftlicher Factor in den Lösungen λ auf. Möglich und bestimmt kann folglich unser Problem nur dann sein, wenn dies System Differentialgleichungen von der Ordnung $2n+2$ ist.

Setzt man aber:

$$(19) \qquad \Omega \equiv \lambda_0 \varphi_0 + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r\,:$$

so kann man die Differentialgleichungen (18) kürzer so schreiben:

$$(20) \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y'_i} = \frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\,, \qquad i = 0, 1, \ldots, n\,,$$

und erkennt leicht, dass das System Differentialgleichungen (1), (20) dann und nur dann von der Ordnung $2n+2$ ist, wenn die $n+r+2$ Gleichungen:

$$(21) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y'_i} = v_i\,, \quad \varphi_k = 0$$

die $n + r + 2$ Unbekannten bestimmen:

(22) $$y_0', y_1', \ldots, y_n', \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r.$$

In der That, lassen sich die Gleichungen (21) nach diesen Unbekannten auflösen, so seien:

(23) $$y_i' = (y_i'), \quad \lambda_k = (\lambda_k)$$

die Auflösungen und überhaupt werde ihre Substitution durch Einschliessung in ( ) angezeigt.

Dann kann man die Gleichungen (1), (20) ersetzen durch die $2n + 2$ Differentialgleichungen 1. O. zwischen $y_0, y_1, \ldots, y_n, v_0, v_1, \ldots, v_n$ und x:

(24) $$\frac{dy_i}{dx} = (y_i'), \quad \frac{dv_i}{dx} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right)$$

und durch die $r + 1$ endlichen Gleichungen:

(25) $$\lambda_k = (\lambda_k).$$

Die vollständige Integration des Systems (24) liefert unmittelbar die Lösungen y der Gleichungen (1), (20), und durch Einsetzung seiner Lösungen erhält man aus (25) auch die Lösungen λ jener Gleichungen. Mit dem System (24) ist daher auch das ursprüngliche System (1), (20) sicher von der Ordnung $2n + 2$.

Andrerseits gestatten, nach unsrer Voraussetzung über die Determinante (2), die $r + 1$ letzten Gleichungen (21) keinenfalls eine Elimination der y'. Soll sich also aus allen $n + r + 2$ Gleichungen (21) eine von den Grössen (22) freie Gleichung ableiten lassen, so kann dieselbe jedenfalls nicht frei sein von allen v. Ziehen aber die Gleichungen (21) die Gleichung nach sich:

$$\Phi(x, y_0, y_1, \ldots, y_n, v_0, v_1, \ldots, v_n) = 0,$$

so muss nothwendig, nachdem jedes

$$v_i \text{ durch das entsprechende } \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}$$

ersetzt wurde, mit dieser Gleichung zugleich auch die Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_0^n{}_i \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} y_i' + \sum_0^n{}_i \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = 0$$

vermöge der Gleichungen (1) eine Identität werden, und dann folgt aus den Gleichungen (20):

(26)
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_0^n {}_i \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} y_i' + \sum_0^n {}_i \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} = 0 ,$$

also auch:

(27)
$$\sum_0^n {}_i \frac{\partial \Phi}{\partial v_i} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \right) = 0 .$$

Nun ist die Gleichung (26) entweder wiederum eine oder aber keine blosse Folge der Gleichungen (1).

Im ersten Falle ist nach (27) auch eine der $n+1$ Gleichungen (20) eine Folge der übrigen und der Gleichungen (1); die Gleichungen (1), (20) reduciren sich also auf weniger als $n+r+2$ Gleichungen, sie reichen nicht mehr aus, um alle $n+r+2$ Unbekannte y und λ als Functionen von x zu definiren, und das Problem wird unbestimmt.

Dieser Fall tritt unter anderem immer dann ein, wenn man x nur als eine der ursprünglichen Aufgabe fremde Hülfsvariable eingeführt hatte. Dann nämlich werden die Gleichungen (1) frei von x und zugleich homogen 0. O. in den Differentialquotienten $y_0', y_1', \ldots, y_n'$. Durch (1), resp. an sich wird also sowohl

$$\Omega \equiv 0 ,$$

als auch:

$$\sum_0^n {}_i\, y_i' \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \equiv 0 .$$

Differentiirt man aber beide Relationen vollständig nach x und zieht die Ableitungen von einander ab, so sieht man, dass die Gleichungen (1) auch die Gleichung nach sich ziehen:

$$\sum_0^n {}_i\, y_i' \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \right) = 0 . \quad —$$

Wenn dagegen die Gleichung (26) keine blosse Folge der Gleichungen (1) ist, so kann man nach (27) die Gleichung (26) selbst einer der n Gleichungen (20) substituiren. Dann aber enthält das System (1), (20) nur noch n Differentialgleichungen 2. O. und daher ist klar, dass seine Integration, falls das System überhaupt alle unbekannten Functionen bestimmt, doch jedenfalls nur weniger willkürliche Constante einführen kann, als im allgemeinen Falle. Die Aufgabe wird also entweder unmöglich oder aber wiederum unbestimmt. —

§ 2.

Reduction der Differentialgleichungen des Problems.

Bestimmt und möglich kann nach dem Vorhergehenden unser Problem nur dann sein, wenn die $n+r+2$ Gleichungen:

(21) $$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = v_i, \quad \varphi_k = 0$$

auflösbar sind nach den $n+r+2$ Unbekannten y_i' und λ_k, und dann führt die Substitution ( ) dieser Auflösungen seine Differentialgleichungen über in die $2n+2$ Differentialgleichungen 1. O.

(24) $$\frac{dy_i}{dx} = (y_i'), \quad \frac{dv_i}{dx} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right).$$

Es ist nun wohlbekannt, dass diese Differentialgleichungen die kanonische Form besitzen und daher äquivalent sind einer partiellen Differentialgleichung 1. O. mit $n+2$ unabhängigen Variabeln, aber ohne die unbekannte Function selbst.

Das Eigenthümliche am System (24) aber ist, dass sich dasselbe stets zurückführen lässt auf ein System von nur noch $2n+1$ Differentialgleichungen 1. O. und damit zugleich auf eine partielle Differentialgleichung 1. O. mit nur $n+1$ unabhängigen Variabeln, die aber die unbekannte Function selbst enthält.

Definirt man nämlich H als Function der Variabeln x, y_0, $y_1, \ldots, y_n, v_0, v_1, \ldots, v_n$ durch die Gleichung:

(28) $$H \equiv \sum_0^n {}^i\, v_i (y_i') - (\Omega) \equiv \sum_0^n {}^i\, v_i (y_i'),$$

und variirt nun die Variabeln y und v, so ergiebt sich, wenn man die Identitäten:

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right) \equiv v_i, \quad (\varphi_k) \equiv 0$$

beachtet, sofort:

$$\delta H \equiv \sum_0^n {}^i \left\{ (y_i')\, \delta v_i - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right) \delta y_i \right\},$$

d. h.

(29) $$\frac{\partial H}{\partial v_i} \equiv (y_i'), \quad \frac{\partial H}{\partial y_i} \equiv -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y_i}\right).$$

Daher besitzen eben die Gleichungen (24) die kanonische Form:

(30) $$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Zugleich aber ist nach (28) und (29)

$$H \equiv \sum_0^n {}^i\, v_i \frac{\partial H}{\partial v_i},$$

also homogen 1. O. in den Variabeln $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

Setzt man daher:

(31) $$\frac{v_h}{v_0} \equiv -p_h,$$

so erhält H die Form:

(32) $$H \equiv v_0 F(x, y_0, y_1, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots p_n),$$

und wenn man hieraus die Werthe der partiellen Differentialquotienten von H berechnet und die Relation benutzt:

$$\frac{dp_h}{dx} \equiv -\frac{1}{v_0}\left(\frac{dv_h}{dx} + p_h \frac{dv_0}{dx}\right),$$

so sieht man, dass das System (30) sich seinerseits wieder auf die $2n+1$ Differentialgleichungen 1. O. zwischen $x, y_0, y_1, \ldots, y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ reducirt:

(33) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{dy_0}{dx} = F - \sum_1^n {}^h\, p_h \frac{\partial F}{\partial y_h}, \\ &\frac{dy_h}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial p_h}, \quad \frac{dp_h}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y_h} + p_h \frac{\partial F}{\partial y_0}, \end{aligned}\right.$$

nach deren Integration sich v_0 durch die Quadratur bestimmt:

$$\log v_0 = -\int \frac{\partial F}{\partial y_0} dx + \text{Const.}$$

Damit ist einmal auf neuem Wege wieder gezeigt, dass, wenn unser Problem nicht unbestimmt ist, die Lösungen y seiner Differentialgleichungen nicht mehr als $2n+1$ willkürliche Constanten enthalten können. Zugleich sind aber damit auch diese Differentialgleichungen selbst auf eine partielle Differential-

gleichung 1. O. mit nur noch $n+1$ unabhängigen Variabeln zurückgeführt., die dafür aber, im Allgemeinen wenigstens, die unbekannte Function selbst enthält.

Denn das System (33) ist äquivalent der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial y_0}{\partial x} = F\left(x, y_0, y_1, \cdots, y_n, \frac{\partial y_0}{\partial y_1}, \frac{\partial y_0}{\partial y_2}, \cdots, \frac{\partial y_0}{\partial y_n}\right).$$

Ist:

$$y_0 = Y_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

irgend eine vollständige Lösung derselben, so bilden die $2n+1$ Gleichungen mit den $2n+1$ willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$:

$$y_0 = Y_0, \quad \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha_h} = \beta_h \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha}, \quad p_h = \frac{\partial Y_0}{\partial y_h}$$

die vollständigen Integralgleichungen des Systems (33).[1])

Nach (21), (28), (31) und (32) aber erhält man die Function F direct, indem man aus den $n+r+1$ Gleichungen:

$$\frac{\dfrac{\partial \Omega}{\partial y_h'}}{\dfrac{\partial \Omega}{\partial y_0'}} = -p_h, \quad \varphi_k = 0$$

die $n+r+1$ Unbekannten

$$y_0', y_1', \ldots, y_n'; \ \lambda_0 : \lambda_1 : \ldots : \lambda_r$$

bestimmt und die Werthe der y' in:

$$F = y_0' - \sum_1^n{}^h p_h y_h'$$

einsetzt.

Zur Zurückführung der Differentialgleichungen des Problems auf eine partielle Differentialgleichung erhält man daher die folgende Regel[2]):

Man löse die $n+r+1$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_0'} \frac{\partial y_0}{\partial y_h} = 0, \quad \varphi_k = 0,$$
$$h = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 0, 1, \ldots r,$$

1 Jacobi, Werke Bd. V, p. 291.

2) Diese Berichte 1878, p. 20.

nach den $n + r + 1$ Unbekannten auf:

$$y_0', y_1', \ldots, y_n'; \quad \lambda_0 : \lambda_1 : \ldots : \lambda_r$$

und führe durch Substitution der Auflösungen y' die Gleichung:

$$\frac{\partial y_0}{\partial x} = y_0' - \sum_1^n {}_h \frac{\partial y_0}{\partial y_h} y_h'$$

über in eine partielle Differentialgleichung 1. O. zwischen der unbekannten Function y_0 und den $n + 1$ unabhängigen Variabeln $x, y_1, \ldots, y_n$.

Hat man von dieser partiellen Differentialgleichung irgend eine vollständige Lösung

$$y_0 = Y_0(x, y_1, \ldots, y_n, \alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

gefunden, so erhält man durch Auflösung der $n + 1$ Gleichungen mit den $2n + 1$ willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$:

$$y_0 = Y_0, \quad \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha_h} = \beta_h \frac{\partial Y_0}{\partial \alpha}$$

nach den $n + 1$ Unbekannten $y_0, y_1, \ldots, y_n$ unmittelbar die vollständigen Lösungen y der Differentialgleichungen (1), (20), *womit zugleich auch die Verhältnisse ihrer Multiplicatoren λ bestimmt sind, während man diese selbst schliesslich durch eine blosse Quadratur aus einer der Gleichungen* (20) *finden kann.*

W. Ostwald, *Ueber physiko-chemische Messmethoden.*

Die Entwickelung der physikalischen Chemie hat den arbeitenden Forscher mit einer ganzen Reihe neuer Hilfsmittel zur Beantwortung von bestimmten Fragen über die Beschaffenheit und Constitution chemischer Gemenge, insbesondere in Lösungen, beschenkt. Die vorhandenen Methoden haben eine sehr verschiedene Tragweite und Anwendbarkeit, und geben auf wesentlich verschiedene Fragen quantitative Antwort. Im Interesse einer sachgemässen Anwendung dieser Methoden, welche nicht immer erreicht worden ist, erscheint es wünschenswerth, eine Uebersicht darüber zu erlangen, welche Fragen einerseits durch die einzelnen Verfahren beantwortet werden können, und was andererseits die Bedeutung der durch jedes einzelne Verfahren erhaltenen Ergebnisse ist.

Zunächst giebt es eine Anzahl von Eigenschaften, welche aller »Materie« zukommen; durch das Vorhandensein derselben ist eben das bestimmt, was wir Materie nennen. Hierher gehört Masse, Gewicht, Volum u. s. w. Von diesen Eigenschaften wird am meisten das Gewicht benutzt, um den Nachweis vorhandener Materie im Allgemeinen zu führen; da es von irgend welchen Aenderungen innerhalb einer abgeschlossenen Menge Materie nicht geändert wird, so ist es für diesen Zweck vor allem geeignet. Dagegen gestattet die Eigenschaft des Gewichtes nicht, irgend welche Unterschiede der Materie wahrzunehmen und nachzuweisen.

Von minderer Allgemeinheit, aber dadurch zu bestimmteren Aufschlüssen geeignet, sind die Eigenschaften, welche ich *colligative* zu nennen vorgeschlagen habe. Sie kommen zunächst nicht

aller Materie unter allen Umständen zu, es ist aber allgemein zu behaupten, dass für alle Materie die Umstände hervorgebracht werden können, unter welchen sie colligative Eigenschaften besitzt. Die nothwendige Bedingung dazu ist, dass die Materie einen möglichst grossen Raum stetig[1]) erfüllt. Wir kennen zwei Arten einer solchen Raumerfüllung: bei den Gasen und bei den Lösungen. Für beide Zustände der Materie gelten dieselben Gesetze bezüglich des Verhältnisses der Energie zum Raume: die Volumenergie wird durch das Product von Druck und Volum dargestellt, und ist der sogenannten absoluten Temperatur proportional. Wir haben demnach für die beiden Zustände die Gleichung $pv = RT$, wo R eine Constante für eine gegebene Menge (d. h. ein gegebenes Gewicht) Materie ist.

Nun kann man offenbar die mit einander zu vergleichenden Mengen verschiedener Materie so bestimmen, dass die Constante R für sie denselben, ein für allemal festgesetzten Werth hat. Die nach dieser Definition bestimmten Gewichte nennt man Molekulargewichte, und es ist das empirische Gesetz bekannt, dass diese Mengen sich zu einander verhalten, wie die chemischen Verbindungsgewichte der betreffenden Stoffe, entweder unmittelbar oder nach Multiplication mit rationalen, meist kleinen Factoren. Geschichtlich hat sich die Kenntniss dieser Beziehung zuerst an den Gasen entwickelt, für welche Gay-Lussac das Gesetz fand, dass sie sich zu gleichen oder in einfachen Verhältnissen stehenden Volumen verbinden, gleichen Druck und gleiche Temperatur vorausgesetzt. Der oben gegebene Ausdruck ist nichts als eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf den Fall, dass die Gase nicht gleichen Druck und gleiche Temperatur haben. Für Lösungen ist das Statthaben dieser Beziehung von van t'Hoff nachgewiesen worden.

Durch die atomistische Hypothese ist dieses Naturgesetz in die Gestalt der Molekularhypothese geformt worden, und man findet auch in ganz sorgfältig geschriebenen Lehrbüchern eine

1) Diese Stetigkeit darf nicht als eine absolute aufgefasst werden, selbst im experimentellen Sinne nicht. Denn die sogenannten Methoden zur Bestimmung der Grösse der Molekeln beweisen, dass unterhalb der Dimension von etwa 10^{-8} cm der von der Materie erfüllte Raum unstetige Eigenschaften annimmt, oder genauer gesagt, unhomogen wird. Es soll die oben erwähnte Stetigkeit der Raumerfüllung nur bis zu dieser Grenze beansprucht werden.

Molekel als das kleinste Quantum Materie definirt, welches für sich bestehen und mit anderen in Wechselwirkung treten kann. Offenbar schwebt diese Definition ganz in der Luft, denn es liegen überhaupt keine Versuche vor, das kleinste Quantum Materie zu bestimmen, welches für sich existiren kann. Auch trägt die Definition dem *relativen* Charakter der als Molekulargewicht bezeichneten Grösse keine Rechnung. Auf Grund der oben gegebenen energetischen Definition wird man als Molekulargewichte solche Mengen verschiedener Stoffe zu bezeichnen haben, für welche der Werth der Constanten R im Zustande der Vertheilung in einem grossem Raume gleich ist. Will man eine anschaulichere Definition, so kann man dasselbe dadurch ausdrücken, dass man solche Mengen Materie vergleicht, welche bei gegebener Temperatur gleiche Volumenergie pv haben.

Bei allen Zustandsänderungen, bei welchen diese Volumenergie in Frage kommt, kann man durch die Messung dieser Energie in Beziehung auf die entsprechende Stoffmenge die zu einem bestimmten Werthe der Constanten R gehörige Stoffmenge ermitteln, und jede derartige Operation führt demgemäss auf eine »Molekulargewichtsbestimmung«. Da es in allen diesen Fällen immer und nur auf die entsprechende Energieleistung ankommt, so müssen, wie es auch die Erfahrung lehrt, alle die verschiedenen Methoden der Molekulargewichtsbestimmung immer dasselbe Ergebniss zeigen, wenn die Bedingungen dieselben oder doch vergleichbar sind.

Die Eigenschaften nun, welche von den Aenderungen der Volumenergie abhängen, und welche demnach für die verschiedensten Stoffe gleich sein müssen, wenn die Volumenergie denselben Werth hat, sind es, die colligative genannt werden. Somit wird man als äquimolekulare Mengen solche Mengen bezeichnen, für welche die colligativen Eigenschaften gleiche Werthe haben. Misst man die verschiedenen Stoffe nicht nach ihrem Gewicht schlechthin, sondern nach Einheiten, welche durch den Inhalt einer gleichen Menge Volumenergie bei einer bestimmten Temperatur bestimmt sind, oder mit anderen Worten nach Molekulargewichten, so ergeben die colligativen Eigenschaften unmittelbar eine Bestimmung der *Concentration* des betreffenden Stoffes, gemessen in seiner Einheit, oder die molekulare Dichte des Stoffes. So beweist beispielsweise eine Gefrierpunktserniedrigung einer wässerigen Lösung um 1,89°, dass in einem

Liter die mit 2 g Wasserstoff äquimolekulare Menge irgend eines Stoffes oder Stoffgemisches vorhanden ist. Die Natur dieses Stoffes unterliegt keiner Beschränkung, ausser dass er nicht das Lösungsmittel selbst sein darf; insbesondere wirken Ionen genau so, wie freie Molekeln, und es ist bekannt, dass wegen der unerwarteten Wirkung der Ionen die Dissociationstheorie ins Leben gerufen wurde.

Alle Fragen also, die sich auf Grund der Kenntniss des Molekulargewichtes beantworten lassen, können mittelst der Messung einer colligativen Eigenschaft entschieden werden. Auf die Frage, ob die gemessene molekulare Concentration von einheitlichen oder gemengten Stoffen herrührt, giebt es auf diesem Wege keine Antwort. Der lange Streit darüber, ob der Dampf des Salmiaks z. B. dissociirt ist, oder nicht, zeigt anschaulich, wie hilflos in dieser Beziehung die colligative Methode der Dampfdichtebestimmung ist. Ebenso ist es gleichgültig, welche von den vielen möglichen Methoden man anwendet. Unter gleichen Bedingungen geben sie alle immer die gleiche Auskunft, und man lernt aus einer Messung des osmotischen Druckes in dieser Hinsicht nicht mehr und nicht weniger, als aus der einer Gefrierpunktserniedrigung.

Während die bisher betrachteten Eigenschaften aller Materie zukommen oder doch ertheilt werden können, ist die nun zu besprechende Eigenschaft zwar noch weit verbreitet, aber nicht mehr allgemein. Es ist die elektrolytische Leitfähigkeit. Diese Eigenschaft kommt nur den Ionen zu, für deren Vorhandensein sie das entscheidende Kennzeichen bildet; man kann also sagen, dass, wo elektrolytische Leitfähigkeit vorhanden ist, auch Ionen vorhanden sein müssen.

Auch über die Concentration der charakterisirten Klasse von Stoffen, der Ionen, giebt die Messung der Leitfähigkeit Auskunft, allerdings aber in weit beschränkterer Weise, als die colligativen Eigenschaften es thun. Denn während dort die Constante nur noch mit einer einfachen Temperaturfunction multiplicirt war, ist sie hier von der Natur der Ionen, des Lösungsmittels und von der Temperatur abhängig. Beschränkt man sich auf eine bestimmte Temperatur und auf ein bestimmtes Lösungsmittel (praktisch kommt allein Wasser in Betracht), so hat man nur noch mit dem Coefficienten der Wanderungsgeschwindigkeit zu thun, welcher für die meisten Ionen inner-

halb ziemlich naher Grenzen schwankt. Sieht man von den ganz isolirt stehenden Ionen Wasserstoff und Hydroxyl ab, so liegen die äussersten bekannten Werthe der Ionengeschwindigkeiten zwischen Grenzen, die sich wie 1 : 6 verhalten. Man wird also aus grosser Leitfähigkeit mit völliger Sicherheit auf eine grosse Ionenconcentration zu schliessen haben, und umgekehrt; um aber aus dem gemessenen Werthe der Leitfähigkeit einen Schluss auf den genauen Werth der Ionenconcentration ziehen zu können, muss man wissen, welche Ionen vorhanden, und welches ihre Wanderungsgeschwindigkeiten sind. Auf Grund der vorhandenen Kenntnisse der Einzelwerthe und der allgemeinen Beziehungen wird man schon jetzt die meisten hier auftretenden Fragen beantworten können. Weiss man nicht, welche von den möglichen Ionen vorhanden sind, so kann man doch für die möglichen Fälle meist hinreichend genaue Schätzungen machen, um die eine oder andere Möglichkeit auszuschliessen.

Weitere Eigenschaften, welche ähnlich wie die elektrische Leitfähigkeit eine bestimmte grössere Klasse von Stoffen erkennen liessen, sind kaum bekannt. Allenfalls dürfte die Eigenschaft der Drehung der Polarisationsebene in flüssigem oder gelöstem Zustande hier angeführt werden, welche dem Nachweise von van t'Hoff gemäss mit ganz bestimmten Constitutionsverhältnissen, nämlich dem Vorhandensein eines sogenannten asymmetrischen Kohlenstoffatoms zusammenhängt. Dieser Nachweis ist nach den bisherigen Erfahrungen allgemeingültig (insofern nicht asymmetrischer Stickstoff in Frage kommt, worüber noch weitere experimentelle Nachweise abzuwarten sind), aber nicht umkehrbar. Abwesenheit von optischer Drehung ist kein Beweis für die Abwesenheit von asymmetrischem Kohlenstoff. Zwar ist in solchen Fällen der Stoff meist in active Bestandtheile von entgegengesetzter Drehung spaltbar; da aber gegebenenfalls die Unmöglichkeit der Spaltung nicht allgemein beweisbar ist, so ist auch die Umkehrung des Satzes nicht beweisbar.

Im Anschluss an diesen Fall könnte man als hierhergehörig noch die grosse Zahl weiterer constitutiver Eigenschaften anführen. Diese beruhen indessen, soweit ich es übersehen kann, sämmtlich nur auf quantitativen Unterschieden, nicht auf dem Vorhandensein oder der vollkommenen Abwesenheit einer bestimmten Eigenschaft, und haben daher nicht den bindenden

Charakter, wie die Drehung der Polarisationsebene. Doch scheint kein Grund vorhanden zu sein, dass es nicht noch mehr solche Eigenschaften, wie die letztere geben sollte.

Endlich giebt es Gruppeneigenschaften, welche der in den gegenwärtigen Anschauungen lebende Chemiker allerdings nicht zu diesen rechnen würde: es sind dies die Ergebnisse der Elementaranalyse im allgemeinen, nicht auf organische Verbindungen beschränkten Sinne. Solange man die Elemente als in ihren »Verbindungen« real vorhanden ansieht, kann man hier natürlich nicht von Gruppeneigenschaften reden, sondern nur von den Eigenschaften des betreffenden Elements, welches aus seinen Verbindungen wieder abgeschieden wird. Stellt man sich aber auf den kritischen Standpunkt, nach welchem diese Ausdrucksweise nur eine durch die Hypothese der Fortexistenz der Elemente in den Verbindungen auf eine kurze Form gebrachte Darstellung der Verhältnisse ist, so wird man allerdings in der Elementaranalyse ein Hilfsmittel zum Erkennen gewisser *Klassen* von Stoffen, nämlich der Abkömmlinge je eines bestimmten Elementes anerkennen.

Die noch übrig bleibenden Messhilfsmittel beziehen sich auf individuelle Stoffe. Hierher gehören in erster Linie die gewöhnlichen analytischen Reactionen; und zwar geben dieselben in den meisten Fällen, in denen man sie anwendet, nämlich in verdünnten wässerigen Lösungen, das Vorhandensein bestimmter *Ionen* zu erkennen.

In einem vor Kurzem erschienenen Werke[1]) habe ich gezeigt, wie sich die Thatsachen der analytischen Chemie vollständig und widerspruchsfrei unter diese Formel bringen lassen, und wie die sogenannten anomalen Reactionen sich in dem Lichte der Ionentheorie sämmtlich deuten lassen. Der Niederschlag, welchen Baryumsalze in einer Lösung erzeugen, beweist, wenn er die Eigenschaften des Baryumsulfats hat, mit unzweifelhafter Sicherheit das Vorhandensein von SO^4-Ionen in der Flüssigkeit, während Abkömmlinge der Schwefelsäure, in welchen solche Ionen nicht vorhanden sind, wie z. B. die noch in letzter Zeit von Recoura[2]) untersuchten Chromsulfonsäuren, keinen Niederschlag mit Baryumsalzen geben.

---

1) Die wissenschaftlichen Grundlagen der analytischen Chemie. Leipzig, W. Engelmann. 1894.

2) Compt. rend. 114, 474. 1892.

Gleichzeitig gestatten ebendieselben Methoden auch einen Schluss auf die Concentration derselben Ionen in der Lösung, wenigstens insofern sie ein Minimum erkennen lassen, unter welchem die Concentration nicht liegen darf, wenn überhaupt eine Reaction eintreten soll. Denn da man aus allgemeinen energetischen Gründen den Satz aussprechen darf, dass in jedem Gemenge jeder mögliche Stoff auch wirklich vorhanden ist, nur in sehr vielen Fällen in einer nicht mehr nachweisbaren Menge, so wird man auch behaupten dürfen, dass beispielsweise in den Lösungen der eben erwähnten Chromsulfonsäure Ionen vorhanden sind. Nur darf man gleichzeitig behaupten, dass sie, da die Lösung durch Baryumsalze nicht gefällt wird, in einer Menge vorhanden sind, deren Betrag unter einem bestimmten, durch die Eigenschaften, insbesondere die Löslichkeit des Baryumsulfates gegebenen Werthe liegt. Wie dieser Betrag zu bestimmen ist, wird später genauer erörtert werden.

Wenn wir also durch eine derartige Reaction die Gegenwart eines gewissen Ions nachgewiesen haben, so sind wir zwar berechtigt, zu behaupten, dass die Lösung in Bezug auf dieses Ion concentrirter ist, als der fragliche Grenzwerth angiebt, wir dürfen aber nicht behaupten, dass die Gesammtmenge des durch die Reaction gemessenen Stoffes im Ionenzustande zugegen gewesen ist. Vielmehr sind die Fälle überaus häufig, dass nur ein Theil dieses Stoffes als Ion zugegen ist, und dass in dem Maasse, wie die analytische Reaction (z. B. die Fällung) vorschreitet, das Ion sich aus anderen Verbindungen erst bildet. Dies ist z. B. in jeder etwas concentrirteren Salzlösung der Fall, wo nur ein Theil des Salzes dissociirt ist, durch die Analyse nichtsdestoweniger aber die Gesammtmenge des Stoffes angegeben wird, welches in das fragliche Ion übergehen kann.

Hierbei lassen sich noch etwas feinere Unterschiede beobachten, welche auf der Geschwindigkeit der Ionenbildung, und des umgekehrten Vorganges beruhen. Die Geschwindigkeit, mit der sich einfache Ionenreactionen, wie die Bildung der Salzmolekel aus den beiden Ionen, und umgekehrt die Dissociation derselben in ihre Ionen, vollziehen, ist unmessbar gross. Dagegen erfolgen Vorgänge zwischen indifferenten Stoffen, oder zwischen solchen und Ionen im allgemeinen mit endlicher Geschwindigkeit, häufig sogar mit ziemlich geringer. Fast in allen Fällen, wo durch das Zusammenbringen geeigneter Stoffe neue

Ionen gebildet werden, lassen sich in Bezug auf die entsprechende Geschwindigkeit bequem verfolgen, und die Reaction braucht zu ihrer Vollendung eine messbare, zuweilen beträchtliche Zeit. So entsteht z. B. Phosphormolybdänsäure beim Zusammenbringen phosphorsäure- und molybdänsäurehaltiger Lösungen keineswegs augenblicklich, sondern man kann an der zunehmenden Gelbfärbung leicht den Fortgang der Reaction beobachten, und daher rührt die analytische Regel, dass man den Niederschlag erst nach längerem Stehen in der Wärme abfiltriren darf, wenn es sich um quantitative Bestimmungen handelt.

Man wird daher in allen Fällen, wo in homogener Lösung ein Vorgang mit sichtbarer Langsamkeit erfolgt, den Schluss ziehen dürfen, dass es sich nicht um eine einfache Ionenreaction im Sinne der Bildung eines Salzes aus seinen Ionen handelt. Auf die Einschränkung, dass der Satz nur für homogene Lösungen Anwendung findet, ist besonders Acht zu geben, denn die Ausscheidung eines Niederschlages kann gleichfalls langsam erfolgen, auch wenn es sich um eine einfache Salzbildung handelt. Im letzteren Falle kommt die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Uebersättigungszustand aufhebt, in Frage, und diese hat mit den oben erwähnten Fällen, wo sich complexe Ionen und dergl. bilden, unmittelbar nichts zu thun. Auch der umgekehrte Schluss, dass, wenn die homogene Reaction mit unmessbar grosser Geschwindigkeit erfolgt, eine einfache Ionenreaction vorliegt, wird, soweit die bisherigen Erfahrungen reichen, als richtig anzusehen sein. Natürlich finden auch in diesem Gebiete Uebergänge zwischen beiden Typen statt, bei denen solche Stoffe in Frage kommen, welche auf der Zwischenstufe zwischen gewöhnlichen Salzen und indifferenten Verbindungen stehen.

Durch die analytischen Fällungsreactionen wird also die Gegenwart und die *potentielle* Menge eines bestimmten Ions angezeigt, d. h. die Menge, welche sich aus den vorhandenen Stoffen in kurzer Zeit bilden kann. Es erhebt sich die Frage, ob es nicht Mittel giebt, die in jedem Augenblicke *thatsächlich* vorhandene Concentration in Bezug auf ein bestimmtes Ion zu ermitteln, und diese Frage kann gleichfalls bejahend beantwortet werden. Hier ist das eigentliche Gebiet der physikalischen Methoden, denn die Voraussetzung aller derartigen Bestimmungen ist, dass an dem Zustande des zu untersuchenden

Objectes keine, oder eine verschwindend kleine Aenderung vorgenommen werden darf.

Somit sind an dieser Stelle zunächst die auf der Messung besonderer Eigenschaften beruhenden physikalischen Methoden zu erwähnen. Hat der zu messende Stoff eine bestimmte Farbe, Drehung der Polarisationsebene, einen bestimmten Magnetismus, während die anderen vorhandenen Stoffe von diesen Eigenschaften frei sind, so kann man immer auf die Messung eben dieser Eigenschaft eine Quantitätsbestimmung des betreffenden Stoffes begründen. Auch in dem Falle, dass nicht die An- oder Abwesenheit einer Eigenschaft vorliegt, sondern nur Grössenunterschiede derselben zwischen dem zu bestimmenden Stoffe und dem Lösungsmittel vorliegen, kann man solche Messungen ausführen; sie sind aber viel bedingter, als in dem früheren Fall, und bieten auch in Bezug auf die Genauigkeit ungünstigere Verhältnisse.

Neben diesen Verfahren, deren Anwendbarkeit seit längerer Zeit bekannt ist, giebt es noch eine Anzahl weiterer Methoden, welche auf den Gesetzen des chemischen Gleichgewichts beruhen, und deren Verwerthung bisher nur in einzelnen Fällen stattgefunden hat. Da sie dort, wo die anderen Verfahren versagen, sehr bestimmte und weitgehende quantitative Schlüsse zu ziehen gestatten, ist eine Auseinandersetzung ihrer Grundlagen und Anwendungsweisen von besonderem Interesse. Man kann die hier vorhandenen Mittel in drei Gruppen theilen: das elektrometrische Verfahren, die katalytische Methode und die Methode der Löslichkeitsbestimmung. Von diesen drei Methoden geben die beiden ersten die Menge bestimmter einzelner Ionen zu erkennen, die dritte ist unter häufig vorkommenden Umständen von dem Vorhandensein mehrerer Ionen abhängig. Weitere Verfahren ergeben sich aus der Benutzung anderer Gleichgewichtszustände.

Das elektrometrische Verfahren beruht auf der Thatsache, dass der Potentialunterschied zwischen einer metallischen Elektrode und einer diese berührenden Flüssigkeit nur von der Concentration der Metallionen in der letzteren (und der Temperatur) abhängt, von der Gegenwart anderer Ionen in der Lösung aber wesentlich unabhängig ist. Von der Natur des Lösungsmittels ist der Potentialunterschied nicht unabhängig, so dass man sich auch in diesem Falle ausschliesslich, wo die

Umstände es nur irgend gestatten, auf wässerige Lösungen beschränken wird. Hierdurch ist ein Mittel gegeben, für alle Metalle, welche man als Elektroden benutzen kann, die Concentration ihrer Ionen in vorhandenen Lösungen festzustellen.

Dass es dabei auf die Concentration der *Ionen* und nicht etwa auf die des Metalles insgesammt ankommt, geht schon aus dem Umstande hervor, dass verschiedene Lösungen von gleichem Metallgehalt sehr verschiedene Potentiale zeigen können; so erhält man mit Ketten, welche Silber in Berührung mit einer Lösung von Kaliumsilbercyanid einerseits, Silbernitrat andererseits enthalten, elektromotorische Kräfte, welche bis auf 1,5 Volt steigen können.

Dieses Verfahren hat seinen besonderen Werth in Fällen, wo die Concentration der Ionen so geringe Werthe annimmt, dass kein anderes analytisches Mittel auch nur die Gegenwart des betreffenden Ions anzuzeigen vermag. Seine Anwendung erfolgt in einfachster Gestalt in der Weise, dass man eine Kette aus der zu untersuchenden Flüssigkeit einerseits, und einer Lösung eines einfachen Salzes des betreffenden Metalls andererseits bildet; beide Flüssigkeiten werden, gegebenenfalls unter Zwischenschaltung eines dritten Salzes, welches mit keinem der beiden Lösungen eine Fällung giebt, unter Anwendung des Metalls als Elektrode zu einer Kette geschlossen. Das Statthaben einer elektromotorischen Kraft beweist dann (von kleinen Kräften infolge der gebildeten Flüssigkeitsketten abgesehen) das Bestehen einer Concentrationsverschiedenheit der Metallionen, und der Quotient der beiden Concentrationen ist der elektromotorischen Kraft proportional. Der Proportionalitätscoefficient hängt von der Werthigkeit des Metalls und der Temperatur ab; er ist gegeben durch den Ausdruck

$$\pi = \frac{0{,}002\ T}{n} \log \frac{c}{c'} ,$$

wo π die elektromotorische Kraft in Volts, T die absolute Temperatur, c und c' die beiden Concentrationen sind; n ist die Werthigkeit des Metalls. Hierzu ist allerdings zu bemerken, dass infolge der Berührung der Lösungen noch gewisse Complicationen eintreten, welche den Zahlenfactor verkleinern; zu ganz genauen Messungen müssen diese Einflüsse berücksichtigt werden. In allen Fällen, wo es sich aber um die Grössen-

ordnung der fraglichen Concentrationswerthe handelt, kann man von diesen Einflüssen absehen.

Die Zahl der als Electroden verwerthbaren Metalle ist nicht gross. Durch die Anwendung derselben in Form von Amalgam kann man die Reihe etwas erweitern, doch bleibt sie immer recht beschränkt. Es ist daher von Wichtigkeit, dass es ein entsprechendes Verfahren giebt, welches auf *negative* Ionen anwendbar ist, falls diese mit einem der brauchbaren Metalle ein schwerlösliches Salz bilden. Das Verfahren beruht darauf, dass durch die Gegenwart des schwerlöslichen Salzes die Concentration der Metallionen mit der der Anionen des schwerlöslichen Salzes in einem gesetzmässigen Zusammenhange steht, welcher in dem einfachsten Falle, dass beide Ionen einwerthig sind, der einer umgekehrten Proportionalität ist. Haben wir beispielsweise Silber nebst Chlorsilber in einer Lösung, welche Chlorionen enthält, so ist das Potential in der Weise von der Concentration der Chlorionen abhängig, dass wegen der Gegenwart des Chlorsilbers die Concentration der Silberionen der der Chlorionen umgekehrt proportional sein muss. Man kann also aus der Messung der elektromotorischen Kraft in ganz derselben Weise auf die Concentration der Chlorionen schliessen, wie man auf die der Metallionen hat schliessen können; auch die entsprechenden Formeln sind im Grenzfalle übereinstimmend gestaltet. Nur muss der Umstand ins Auge gefasst werden, dass die Concentration der Chlorionen relativ gross im Verhältniss zu der durch die Löslichkeit des Chlorsilbers gegebenen Concentration bleiben muss, da sonst die einfachen angenäherten Formeln keine Geltung mehr behalten. Es ist daher bei der Anwendung dieses Verfahrens wesentlich, möglichst schwerlösliche Verbindungen der betreffenden Anionen zu wählen.

Endlich können die Ionen Wasserstoff und Hydroxyl mit Hülfe von Elektroden bestimmt werden, welche den einen oder das andere als Ion abgeben können. Praktisch kommt hier in erster Linie eine mit Wasserstoff gesättigte Elektrode aus Palladium in Betracht; auch Platin unter gleichen Umständen kann Verwendung finden, da theoretisch wie experimentell nachgewiesen ist, dass beide gleiches Potential haben, wenn sie mit Wasserstoff von gleichem Drucke gesättigt sind. Diese Elektroden dienen gleichfalls für die Messung von Hydroxylionen, denn da im Wasser das Product der beiden Concentrationen

einen bestimmten Werth haben muss, so ist durch die Messung der einen stets die andere mitbestimmt.

Die zweite Gruppe von Methoden, die katalytischen, beruhen auf dem Umstande, dass durch die Gegenwart gewisser Stoffe chemische Vorgange in ihrem Zeitverlaufe beschleunigt oder verzögert werden. Experimentell ist bisher nur der erste Fall, der der Beschleunigung untersucht worden, doch deuten einzelne Beobachtungen darauf hin, dass auch katalytische Verzögerungen vorkommen.

Ueber das Wesen der katalytischen Vorgänge herrscht noch viele Unklarheit. Bisher ist es wohl allgemein als eine Art chemischer Arbeitsleistung aufgefasst worden, und es musste gerechtes Befremden erregen, dass, wie es die Erfahrung lehrte, der wirksame Stoff am Ende des Vorganges sich in ebendemselben Zustande befand, wie vorher, also keine Arbeit im Sinne einer Energieabgabe geleistet haben konnte. Fasst man dagegen, wie oben geschehen, die katalytische Wirkung als eine blosse Beschleunigung eines chemischen Vorganges auf, der auch ohnedies, nur mit einer häufig unmessbaren Langsamkeit verläuft, so fällt diese Schwierigkeit ganz fort. Zwar könnte man in Analogie der chemischen Beschleunigung mit der mechanischen auch für diese einen Energieaufwand als nothwendig ansehen, doch würde dies nur ein Beweis für die Unzulänglichkeit der mechanischen Analogie sein. Denn da den chemisch »bewegten« Stoffen keine entsprechende Trägheit zukommt, indem eine chemische Geschwindigkeit beim Aufhören der treibenden Ursachen nicht etwa ungeändert bleibt, wie eine mechanische, sondern alsbald Null wird, so sieht man, dass diese Analogie überhaupt nicht zutrifft, und ein aus ihr gezogener Einwand keine Beweiskraft hat.

Mit der irrthümlichen Annahme einer von dem katalytisch wirkenden Stoffe ausgehenden Kraft hängt die gegenwärtig zur »Erklärung« dieser Erscheinungen allgemein übliche Ansicht zusammen, dass der fragliche Stoff sich vorübergehend mit dem katalysirten verbindet, und alsbald wieder eine Abspaltung erfährt, oder dass in irgend einer anderen Weise eine ununterbrochene Folge von Verbindungen und Zersetzungen erfolge. Ein klassisches Beispiel dazu ist die gebräuchliche Theorie der Schwefelsäurebildung. Nach derselben soll die Oxydation der schwefligen Säure dergestalt vor sich gehen, dass der Sauerstoff

nicht unmittelbar auf die erstere wirkt, sondern erst vorhandenes Stickoxyd zu Hyperoxyd oxydirt, worauf letzteres die schweflige Säure oxydirt. Bei dieser Erklärung wird der eigentlich der Erklärung bedürftige Punkt ganz ausser Acht gelassen. Die Frage ist nicht, wie wird die schweflige Säure oxydirt? — denn sie wird bekanntlich auch unmittelbar durch den Sauerstoff in Schwefelsäure übergeführt, sondern sie ist: warum geht der Process bei Gegenwart von Oxyden des Stickstoffs so sehr viel schneller vor sich als ohne sie? Von vornherein müsste man erwarten, dass der zweifache Vorgang unter Mitwirkung der Oxyde des Stickstoffs mehr Zeit beanspruchen müsste, als die einfache unmittelbare Oxydation. Dabei ist besonders zu beachten, dass die gesammte Wärmetönung nothwendig dieselbe ist, ob der Vorgang unmittelbar oder mittelbar unter Mitwirkung der Stickstoffoxyde stattfindet. Für jeden der beiden Theilvorgänge ist also jedenfalls eine geringere Wärmetönung zur Verfügung, als für den einen Gesammtvorgang, und ob man, wie gewöhnlich früher geschah, nur die Aenderung der gesammten Energie in Frage zieht, oder ob man richtiger nur die der freien Energie berücksichtigt, in jedem Falle kommt man dazu, dass in den Energieverhältnissen kein Grund für eine Beschleunigung bei der Annahme der successiven Reactionen gefunden werden kann, sondern nur einer für eine Verzögerung.

Ist man auf diese Weise ins Klare gekommen, dass die bisher üblichen »Erklärungen« der katalytischen Vorgänge ihren Zweck verfehlen, so wird man weniger dagegen haben, die Frage nach den »Ursachen« der katalytischen Wirkungen zunächst offen zu lassen, und zunächst die nach den *Gesetzen* derselben einer Erörterung zu unterziehen. Es ist dies offenbar der sicherste Weg, auch zu einer Erklärung dieser Erscheinungen zu gelangen, wobei das Wort Erklärung im Sinne der Herstellung eines zahlenmässigen Zusammenhanges mit anderen messbaren Grössen verstanden ist. Hierbei haben wir vor allen Dingen ins Auge zu fassen, das aus den bisher bekannten Gesetzen der chemischen Energie kein bestimmter Schluss über die Geschwindigkeit zu ziehen ist, mit welcher irgend ein chemischer Vorgang ablaufen muss. In den Bestimmungsgrössen der chemischen Energie ist die Zeit nicht enthalten, und somit ist, wenn ein nicht im Gleichgewicht befindliches chemisches Gebilde gegeben ist, zwar der Gleichgewichtszustand festgelegt, welchem

es zustreben wird, und auch die ganze Reihe der Zwischenzustände, welche es bis dahin durchlaufen muss; über die *Zeit* aber, binnen deren dieses alles erfolgen wird, ist energetisch nichts gegeben, und diese hängt daher von einer Reihe von Umständen ab, welche mit den Energieverhältnissen nichts zu thun haben. Daher ist es möglich, dass ohne irgend welchen Energieverbrauch, wie das in den katalytischen Vorgängen geschieht, das Zeitmaass des Processes in allerweitestem Maasse verändert wird.

Zu den Umständen nun, durch welche dies Zeitmaass eine Aenderung erfährt, gehört die Gegenwart bestimmter Stoffe, und deren Wirkung nennt man eben katalytisch. Wir sehen aus dem eben Dargelegten, dass die Frage, warum sie beschleunigend, bez. verzögernd wirken, zunächst überhaupt nicht gestellt werden kann, denn wir wissen ja überhaupt noch nicht, von welchen Ursachen die Geschwindigkeit einer chemischen Reaction abhängt, und wären deshalb nicht einmal im Stande, den Grund, wenn er uns genannt werden würde, unmittelbar zu begreifen. Daher ist in diesem Gebiete nichts möglich, als sich zunächst auf den rein experimentellen Standpunkt zu stellen, und sich dessen zu getrösten, dass mit der Kenntniss der obwaltenden zahlenmässigen Gesetzmässigkeiten auch die Theorie der Reactionsgeschwindigkeitsconstanten und der sie beeinflussenden Ursachen gegeben sein wird.

Unter den katalytisch wirkenden Stoffen spielt nun der Wasserstoff im Ionenzustande eine ganz besondere Rolle, und ich wage, auf Grund meiner bisherigen Erfahrungen, den Satz auszusprechen, dass die Gegenwart desselben *jeden* chemischen Vorgang beschleunigt. Ausgeschlossen sind hier nur solche Systeme, welche die Zufügung von Wasserstoffionen nicht vertragen, weil sie andere Ionen enthalten, welche mit jenen sich zu neutralen Stoffen verbinden. Solche störende Ionen sind zunächst Hydroxylionen, sodann aber auch die Anionen schwacher Säuren. In solchen Fällen würde der ganze Zustand geändert werden, und damit hört die Vergleichbarkeit der Geschwindigkeiten auf.

Man kann demnach die Beschleunigung langsam verlaufender chemischer Vorgänge als ein bequemes Mittel benutzen, die Gegenwart von Wasserstoffionen zu erkennen. Diese Aufgabe würde allerdings keine besondere Lösung beanspruchen, da auch die Verfärbung der alkalimetrischen Indicatoren, z. B. die

Rothfärbung von Lakmus, die Gegenwart von Wasserstoffionen anzeigt. Aber beim Titriren mit dem Indicator erfährt man, wie bei den analytischen Methoden überhaupt, nur die Gesammtmenge der potentiellen Wasserstoffionen, d. h. die vorhandenen, und die, welche sich unter der Reaction noch bilden können; für sehr viele Aufgaben ist es aber sehr viel wichtiger, die thatsächlich im Augenblick bestehende Ionenconcentration zu erfahren. Hierzu kann die Reactionsbeschleunigung auf Grund des Satzes dienen, dass die Beschleunigung der Concentration der Wasserstoffionen in erster Linie einfach proportional ist. Dieses Gesetz ist von mir an der Katalyse des Methylacetats und an der Inversion des Rohrzuckers nachgewiesen, und diese beiden Stoffe sind nach den bisherigen Erfahrungen auch die zweckmässigsten, um derartige Bestimmungen praktisch auszuführen. Ein Beispiel der Anwendung der zweiten Methode liefert die Arbeit von Trevor über die Wasserstoffdissociation der sauren Salze[1]). Die hier gelöste Aufgabe, den sehr geringen Gehalt an Wasserstoffionen in einer Lösung, welche ausserdem noch drei oder vier Ionen enthielt, messend zu bestimmen, wäre auf andere Weise schwerlich zu lösen gewesen. Indessen ist die Anwendung des Verfahrens keineswegs auf beide Stoffe beschränkt, vielmehr wird jeder andere Stoff oder Stoffcomplex, welcher eine bequem messbare langsame Reaction erfährt, ebensogut zu benutzen sein. Von den beiden genannten wird man unter übrigens gleichen Umständen der Zuckerinversion den Vorzug geben, da in diesem Falle nur indifferente Stoffe ins Spiel kommen, und da die Messung mittelst der Drehung der Polarisationsebene durch die Gegenwart anderer Stoffe nur in sehr geringem Maasse gestört wird. Beim Methylacetet entsteht neben dem indifferenten Alkohol eine Säure, die Essigsäure; und wenn diese auch schwach ist, so werden doch durch ihre Gegenwart Verwicklungen in den Vorgang gebracht, welche sich allerdings theoretisch bewältigen lassen, aber doch den Ansatz verwickelter und unbequemer machen. Dem steht allerdings in vielen Fällen die grosse Bequemlichkeit und Einfachheit der experimentellen Ausführung entgegen.

Für andere Ionen sind specifische katalytische Wirkungen kaum bekannt. Beim Hydroxyl sind die ganz analogen Verseifungs-

---

1) Ztschr. phys. Ch. **10**, 320. 1892.

erscheinungen zu erwähnen, doch wird man diese nicht unter die katalytischen Vorgänge, sondern unter die unmittelbaren chemischen Reactionen zählen. Man kann immerhin sich derselben in ganz gleicher Weise zur Bestimmung der Concentration der vorhandenen Hydroxylionen bedienen. Eine rein katalytische Wirkung durch Hydroxylionen ist die von Will und Bredig untersuchte Umwandlung des Hyoscyamins in Atropin, und sie folgt auch denselben Gesetzen, wie die Wasserstoffkatalysen. Bei entsprechender Aufmerksamkeit wird man unzweifelhaft noch eine grössere Anzahl ähnlicher reinen Katalysen ausfindig machen, doch scheint die Wirkung des Hydroxyls in dieser Hinsicht immerhin weit eingeschränkter zu sein, als die des Wasserstoffs.

Ausser diesen Wirkungen sind noch einige wenige andere bekannt. In erster Linie erwähne ich die zuerst von Schönbein beobachtete Beschleunigung der Oxydations- und Reductionserscheinungen durch die Gegenwart von Eisenvitriol oder ähnlichen Verbindungen. Dass es sich hier um eine Reaction der Eisenionen handelt, geht daraus hervor, dass Blutlaugensalz ohne Wirkung, wenigstens ohne messbare ist; in diesem Salze ist bekanntlich das Eisen in Gestalt eines complexen Ions vorhanden und die theoretisch zuzugebende Menge von Eisenionen ist unter allen Umständen ausserordentlich klein. Ein zweiter ähnlich wirkender Stoff ist das Ion der Dichromsäure, vielleicht auch das der Chromsäure. Wie man sieht, kann sowohl ein Reductionsmittel, wie das Ferrosalz, wie auch ein Oxydationsmittel, wie die Chromsäure, die Rolle eines katalytischen Beschleunigers für Oxydationsvorgänge spielen.

In die gleiche Klasse der Oxydationsbeschleuniger gehören noch viele andere Stoffe, wie Vanadinsalze, Kupfersalze u. s. w. Von dieser Eigenschaft wird technisch bereits in ziemlich ausgedehnter Weise Gebrauch gemacht, indem z. B. die Oxydation des salzsauren Anilins zu Anilinschwarz mittelst der Gegenwart solcher Beschleuniger in weit kürzerer Zeit ausführbar wird, als ohne dieselben. Es ist unzweifelhaft, dass man solche Vorgänge in Formen bringen kann, in denen sie quantitativ messbar werden, und es lässt sich schon jetzt absehen, dass das Gesetz der Massenwirkung, d. h. die Proportionalität zwischen Concentration des Katalysators und der Beschleunigung des chemischen Vorganges, sich auch als gültig erweisen wird.

Für die Messung der Concentration der Beschleuniger ist das Verfahren in solchen Fällen bisher noch nicht benutzt worden; zur Bestimmung des Grades der Dissociation in gewissen halbcomplexen Eisenverbindungen würde es z. B. sich ohne Zweifel leicht anwenden lassen. Die Hauptsache für ein weiteres Eindringen in diese Gebiete ist freilich zunächst die Ermittelung der beschleunigend wirkenden Stoffe überhaupt, und die Beantwortung der Frage, ob verschiedenen Oxydationsvorgängen gegenüber die verschiedenen Katalysatoren proportional, oder mit specifischen Coefficienten wirken.

Das dritte allgemeine Verfahren ist das des heterogenen Gleichgewichts. Es ist von allen das allgemeinste und mannigfaltigste, und die Zahl seiner Anwendungen lässt sich schon jetzt schwer übersehen. Es beruht auf dem von Nernst zuerst in voller Allgemeinheit ausgesprochenen Satze, dass in je zwei angrenzenden Phasen die Concentrationen eines jeden Bestandtheils, sei es ein Ion oder eine indifferente Molekel, immer in einem bestimmten Verhältniss stehen müssen. Dieses Verhältniss ist von der Beschaffenheit der beiden Phasen abhängig, und wird dadurch bestimmt, dass das chemische Potential des Stoffes in den beiden Phasen den gleichen Werth haben muss, d. h., dass keine Arbeit bei der Uebertragung des Stoffes aus der einen Phase in die andere gewonnen oder verloren werden darf. Absolute Energieverschiedenheiten können zwischen diesen beiden Zuständen des Stoffes sehr wohl bestehen; dagegen muss die freie Energie in beiden dieselbe sein.

Die Anwendung dieses Satzes kann sich sehr mannigfaltig gestalten. Eine der einfachsten Formen derselben ergiebt sich, wenn die zweite Phase so beschaffen ist, dass nur der gesuchte Stoff in merklicher Menge in sie übergehen kann, nicht aber die anderen vorhandenen Stoffe. Aus der Messung der Concentration in der zweiten Phase kann man dann, wenn das Theilungsverhältniss bekannt ist, auf die der ersten Phase schliessen. Als Beispiel für die Anwendung dieses Verfahrens erwähne ich eine Arbeit von Jakowkin [1]), in welcher die Menge des in Jodjodkalium vorhandenen freien (nicht als Trijodid gebundenen) Jods aus dem Gehalt an Jod in Schwefelkohlenstoff, welcher mit der Lösung durch Schütteln ins Gleichgewicht

1) Ztschr. phys. Chem. 18, 589. 1894.

gebracht worden war, erschlossen wurde. In diesem Falle diente als zweite Phase ein mit der ersten Flüssigkeit nicht mischbares Lösungsmittel; in ganz gleicher Weise kann der leere oder mit einem indifferenten Gase erfüllte Raum den Dienst einer zweiten Phase leisten. So würde man beispielweise eine ähnliche Aufgabe über den Zustand des freien Broms in entsprechenden Lösungen auch dadurch erledigen können, dass man den Dampfdruck des Broms über solchen Lösungen [1]) bestimmte; dieser würde der Concentration des freien Broms in der Lösung ebenso proportional sein, wie die Löslichkeit in einem zweiten Lösungsmittel.

Die Anzahl der Formen, welche ein solches Verfahren annehmen kann, ist ausserordentlich gross, und die möglichen Anwendungen sind so wenig erschöpft, dass im Gegentheil wegen der noch wenig in das allgemeine Bewusstsein übergegangenen Ausgiebigkeit des Verfahrens eine Unzahl von Problemen vorliegt, welche schon jetzt nach dieser Methode gelöst werden können, während sie noch meist als mit den gegenwärtigen Mitteln unlösbar angesehen werden.

Mit der elektrometrischen Methode theilt dies Verfahren die Eigenschaft, dass es sich in der eben dargelegten Gestalt auf die Gegenwart eines einzigen Stoffes, unabhängig von der Gegenwart irgend welcher anderer Stoffe, bezieht. Dies hängt in den bisher besprochenen Fällen aber nur davon ab, dass es sich um den Uebergang eines einheitlichen Stoffes aus dem einen Zustand in den anderen handelt. Zusammengesetzte Elektroden im eigentlichen Sinne sind noch nicht bekannt [2]), wohl aber zusammengesetzte Stoffe, welche sich in verschiedener Weise zwischen zwei Phasen vertheilen können. Liegt ein solcher Fall vor, so bleibt zwar das Gesetz von der Proportionalität der Concentrationen in den beiden Phasen bestehen, diese Concentrationen sind aber nicht mehr unabhängig von der Gegenwart anderer Stoffe, sondern werden durch solche in entscheidender Weise mitbestimmt, und wir gelangen so zu den allgemeineren Methoden des heterogenen Gleichgewichts.

Einen der einfachsten und zugleich wichtigsten Fälle finden wir bei der Lösung eines dissociirbaren Stoffes in einem entsprechenden Lösungsmittel, namentlich Wasser. Hier können

---

1) Vgl. hierzu M. Wildermann, Ztschr. phys. Ch. **11**, 407. 1893.

2) Nach noch im Gange befindlichen Untersuchungen in meinem Laboratorium verhielten sich die metallisch leitenden Superoxyde wie zusammengesetzte Elektroden.

mehrere Fälle auftreten, je nachdem die Dissociation theilweise oder (praktisch) vollständig, resp. Null ist. Der zweite Fall ist der einfachste und lässt sich am leichtesten übersehen.

Haben wir ein binäres Salz, z. B. Chlorthallium, welches sich in Wasser unter Zerfall in seine Ionen auflöst, so kann das Gleichgewicht der Lösung mit den festen Salzen auf zweierlei Weise gestört werden: durch die Veränderung der Concentration der Chlorionen, und die der Thalliumionen. Nach dem Gesetze der Massenwirkung wird Gleichgewicht bestehen, wenn das Product der beiden Concentrationen einen bestimmten, durch die Löslichkeit des festen Stoffes bedingten Werth annimmt; eine Aenderung der Concentration des einen Ions bedingt somit immer eine Aenderung der gesammten Löslichkeit, bis die Concentration des anderen Ions den durch die Bedingung des constanten Products gegebenen Werth angenommen hat. Dadurch wird ein solcher Stoff ein Prüfmittel auf die Gegenwart, und ein Hilfsmittel zur quantitativen Bestimmung eines jeden seiner beiden Ionen, *aber nur unter der Bedingung, dass die Concentration des anderen Ions bekannt ist.* In sehr vielen Fällen lässt sich diese Bedingung mehr oder weniger leicht erfüllen; alsdann sind derartige Lösungserscheinungen äusserst leicht auszuführende Proben auf die Gegenwart bestimmter Ionen. So ist beispielsweise die Löslichkeit des Chlorsilbers in Ammoniak ein sicherer Beweis dafür, dass in der Lösung kein eigentliches Silbersalz, d. h. kein Salz, welches eine irgend erhebliche Menge von Silberionen giebt, enthalten sein kann, denn die Lösung des Chlorsilbers kann nur dadurch erfolgen, dass eines von den Producten, die bei der Auflösung dieses Salzes in Wasser entstehen, in der ammoniakalischen Auflösung nur in verschwindend geringer Menge vorhanden ist. Da es sich nun leicht nachweisen lässt, dass die Chorionen noch vorhanden sind, folgt nothwendig, dass die Silberionen verschwunden sein müssen[1]).

---

1) Der Einfachelt wegen ist bei dieser Darlegung auf den dritten Bestandtheil, das unzersetzte Chlorsilber, keine Rücksicht genommen worden, obwohl seine Menge, wenn auch sehr gering, doch sicher nicht Null ist. Wenn irgend ein Grund vorhanden wäre, dem Ammoniak eine Fähigkeit, sich mit dem nichtdissociirten Chlorsilber in der Lösung zu einer Verbindung zu vereinigen, zuzuschreiben, so würde die oben gegebene Erörterung ihre Gültigkeit verlieren, und sie ist daher thatsächlich nicht bindend, so lange in dieser Beziehung kein sicherer Nachweis erbracht ist.

Das Mittel, den erforderlichen Nachweis für das Vorhandensein eines Ions zu bringen, besteht in der Anwendung eines anderen Salzes mit dem fraglichen Ion, dessen Löslichkeit im Falle des Vorhandenseins dieses Ions gleichfalls vermindert sein muss. Durch die Anwendung mehrerer derartiger Proben lassen sich immer mehr Gleichungen, als Unbekannte gewinnen, und somit die Frage entscheiden, wenn auch unter Umständen der Nachweis, wenn alle möglichen Fälle berücksichtigt werden sollen, ziemlich verwickelte Formen annehmen kann. Alsdann ist es meist möglich, die Entscheidung durch eines der Verfahren zu gewinnen, welche nur auf einen bestimmten Stoff, insbesondere ein bestimmtes Ion reagiren. In dem oben erwähnten Falle der Löslichkeit des Chlorsilbers in Ammoniak beweist die ziemlich bedeutende Potentialdifferenz einer Silberlösung von gewöhnlichem Dissociationszustande gegen die ammoniakalische Lösung z. B. einer von Silbernitrat, dass in der That die Concentration der in letzterer vorhandenen Silberionen ausserordentlich kleine Werthe hat.

Wie dieser gedrängte Ueberblick zeigt, ist der Betrag der Aufklärung, welchen man aus dem Studium der Eigenschaften gegebener Lösungen in Bezug auf die Beschaffenheit der in der Lösung vorhandenen Stoffe und ihre »Constitution« erhalten kann, ein sehr beträchtlicher. Im Gegensatz zu vielen Methoden der Constitutionsbestimmung, deren sich die organische Chemie zu bedienen pflegt, handelt es sich hier nicht um mehr oder weniger begründete Analogie- und Wahrscheinlichkeitsschlüsse, sondern um unzweideutig mit Ja und Nein zu treffende Entscheidungen, sowie um Mengenbestimmungen, welche nicht nur das ganze Gebiet des Wägbaren umfassen, sondern nach der Seite der kleinen und kleinsten Mengen weit über die bisher erreichten Grenzen hinausgehen. Nach dieser letzten Richtung sind namentlich die elektrometrischen Methoden von uneingeschränkter Ausgiebigkeit, und ihre Anwendung lehrt uns zum ersten Male Grössen und Grössenordnungen kennen, die sich den gewöhnlichen Methoden völlig entzogen, und welche z. B. die spectralanalytischen Methoden, die bisher am weitesten nach der Richtung des Nachweises geringster Mengen vorzudringen erlaubten, um mindestens ebensoviel hinter sich lassen, als diese ihrerzeit den älteren analytischen Methoden überlegen waren.

Die neuere Wissenschaft hat sich des reichen Schatzes von

Hilfsmitteln der Forschung, welche die physikalische Chemie bietet, bisher nur in sehr geringem Umfange bedient, und insbesondere haben gerade die in neuerer Zeit wieder mehrfach aufgenommenen Forschungen im anorganischen Gebiete vielfach eine Beschaffenheit, als wenn jene Hilfsmittel gar nicht vorhanden wären. Wie oft werden Fragen erörtert, und unentschieden gelassen, über welche einige wenige messende Versuche bezüglich der Leitfähigkeit, eine Molekulargewichtsbestimmung in der Lösung u. s. w. völlig ausreichende Auskunft geben würden! Noch immer wird der Trugschluss, dass das, was aus einer Lösung auskrystallisirt, auch in ihr in gleicher Beschaffenheit enthalten sei, täglich gemacht; welch eine ausgiebige Quelle von Widersprüchen und Irrthümern in dieser Schlussweise liegt, erkennt jeder, der unbefangen die Geschichte der Wissenschaft studirt.

Was hier in Bezug auf die allgemeine Frage des Nachweises bestimmter Stoffe in einem vorhandenen Objecte gesagt worden ist, hat eine weit über das Gebiet rein chemischer Fragen hinausreichende Bedeutung. Denn gleiche Fragen sind es, von denen in den angewandten Gebieten, der Physiologie, der Technik u. s. w. die weitreichendsten Entscheidungen abhängen. Um eine Antwort darauf zu haben, was unter gegebenen Umständen zwischen gegebenen Stoffen geschehen muss, ist vor allen Dingen eine Kenntniss der Zustände erforderlich, in welchen sich die in Wechselwirkung stehenden Stoffe befinden. Um den in solchen Richtungen thätigen Forschern die Anwendung der physikalischen Hilfsmittel zu erleichtern, soll in erster Linie die vorstehende Zusammenstellung dienen. Zum Allgemeingute können diese Methoden allerdings erst werden, wenn eine Reihe von Beispielen vorliegt, an denen die Art und Weise ihrer Anwendung und der Betrag der durch die in einem gegebenen Falle zu erlangenden Auskünfte ersichtlich gemacht wird. Wiewohl bereits von Zeit zu Zeit derartige Arbeiten veröffentlicht worden sind, ist doch der erwünschte allgemeine Erfolg in solchen Fällen immer von einer gewissen Massenwirkung abhängig, denn eine Wahrheit, die zum fünften oder zehnten Male aufgezeigt wird, hat eine weit überzeugendere Wirkung, als sie beim ersten Male zu erzielen vermag.

M. von Frey, *Beiträge zur Sinnesphysiologie der Haut.* Dritte Mittheilung.

In der Beschreibung meiner Sensibilitätsprüfungen auf den freien Flächen des Auges bin ich mit einigen Worten auf den Temperatursinn dieser Orte eingegangen und habe auf Grund ergebnissloser Versuche die Meinung geäussert, dass Cornea und Conjunctiva der Temperaturempfindung entbehrten.

Kurze Zeit nach dem Erscheinen jener Mittheilung — Sitzung vom 2. Juli 1894 — hatte Herr Prof. Sattler die Güte, mich auf die Abhandlungen von E. Fuchs[1]) und A. Molter[2]) aufmerksam zu machen, in welchen den genannten Flächen dieselben Sinnesqualitäten wie der Haut zugesprochen werden. Durch diese Angaben, sowie durch die gleichlautenden von H. H. Donaldson[3]) und M. Dessoir[4]) wurde ich veranlasst, die beabsichtigte weitere Prüfung ohne Verzug wieder aufzunehmen. Ich überzeugte mich bald, dass ich den genannten Autoren nicht in allen Punkten beistimmen konnte, dass aber auch meine Angabe einer Einschränkung bedurfte[5]).

1) Wiener med. Jahrb. IV.

2) Diss. Erlangen. Cassel, Th. Fischer (1878).

3) Mind, vol. 10 (1885) p. 399.

4) Du Bois-Reymond's Arch. 1892 S. 175.

5) Seit dem Abschluss dieser Versuche ist auch W. A. Nagel (Arch. f. d. ges. Physiol. Bd. 59 S. 563) für die Kältempfindung des Auges eingetreten.

In einer weiteren Abhandlung (ebendort S. 595) bespricht derselbe Autor mein Verfahren zur Bestimmung mechanischer Reizschwellen und verlangt, dass nicht der Druck der »Reizhaare«, sondern ihre auf der Wage ausgewerthete Kraft der Messung zu Grunde gelegt werde.

Ich hatte nicht gedacht, dass über das Unzulängliche eines solchen Beginnens noch Zweifel bestünden, sonst würde ich in meiner ersten Mittheilung die Methode ausführlicher begründet haben. Ich glaubte, vorbehaltlich einer eingehenden Darstellung, mich damals um so kürzer fassen zu dürfen, als Aubert & Kammler und später Bloch sich indirect desselben Maassstabs bedient haben wie ich, so dass anzunehmen war, es gebe, bei aller Verschiedenheit der Methoden im Einzelnen, principiell keine Meinungsverschiedenheit.

Setzt man ein Hundert-Gramm-Gewicht auf irgend eine Hautstelle, so empfindet man Druck; belastet man eine auf die Haut gesetzte Nadel mit 100 Gramm, so fühlt man Schmerz. Die auf die Haut ausgeübte Kraft ist in beiden Fällen dieselbe, der physiologische Erfolg aber sehr verschieden,

Wenn ich über diesen Nachtrag zu früheren Beobachtungen erst heute berichte[1]), so ist dies darin begründet, dass die eigen-

---

entsprechend der auf die Flächeneinheit wirkenden Kraft oder dem Druck. Die Angabe des auf die Haut ausgeübten Druckes ist demnach für jede zu messende mechanische Einwirkung nothwendig; sie ist für viele Fälle auch zureichend. Handelt es sich um Schwellenbestimmung auf Sinnespunkten, welche im Verhältniss zum Querschnitt des Reizhaares weit auseinanderliegen und ausserdem niedrige Reizschwellen besitzen, wie dies z. B. für die Bestimmung der Druckschwelle an den meisten Orten des Körpers zutrifft, so bedürfen die von mir gemachten Angaben keines Zusatzes. *Reizhaare verschiedener Kraft aber gleichen Druckes werden gleich empfunden.*

Anders gestaltet sich die Sache, wenn die eben gemachten Voraussetzungen nicht zutreffen. In diesem Falle wird in der Regel mehr als ein Sinnespunkt in die Erregung einbezogen und die Stärke der ausgelösten Empfindung ist dann nicht nur von dem Drucke des Reizhaares, sondern auch von der Anzahl getroffener Flächeneinheiten (bezw. Nervenendigungen(abhängig. Als Beispiel eines solchen Falles habe ich den Versuch an der Lippe beschrieben. In diesem und ähnlichen Fällen kann es sich offenbar nicht darum handeln, die unzureichende Bestimmung (des Druckes) durch eine andere unzureichende (der Kraft) zu ersetzen, sondern Zusätze einzuführen, derart, dass gleichen Reizen in physikalischem Sinne wieder gleiche physiologische Erfolge entsprechen. In ähnlicher Weise wird der Erfolg galvanischer Reizung in vielen Fällen durch Angabe der Stromdichte zureichend gekennzeichnet, während unter gewissen Umständen auch die Stromdauer oder andere Versuchsbedingungen in Betracht gezogen werden müssen.

Ich bin mir ferner von Anfang an darüber klar gewesen, dass auch die Beschaffenheit der Epidermis für den Versuch von Bedeutung ist, indem mit zunehmender Derbheit die Ausbreitung der Deformation wächst, allerdings auf Kosten der Tiefe. Auch dies muss unter Umständen bei der Angabe von Schwellenwerthen berücksichtigt werden. Nur in dem Falle, dass Theile des Körpers den stattfindenden Einwirkungen gegenüber als absolut starr angesehen werden dürfen (leichte Stösse auf den Nagel, auf die Zähne), darf statt des Druckes die Kraft des Reizmittels zur Messung benutzt werden, weil die nervöse Fläche, auf welche gewirkt wird (Nagelbett, Alveole), für das betreffende Gebilde constant bleibt.

Wenn Herr Nagel sagt, dass Reizhaare ungleichen Drucks aber gleicher Kraft gleich empfunden werden, so ist dieser Satz oder dessen Umkehrung in solcher Allgemeinheit hingestellt ebenso unrichtig, wie es sein Gegentheil sein würde. Wie die vorstehenden Erörterungen zeigen, hängt der Erfolg durchaus ab von den speciellen Versuchsbedingungen (Kraft und Querschnitt der Reizhaare, gereizte Hautstelle, Art der Sinnespunkte, ob Schwellenreize etc.), welche bekannt sein müssen, wenn die Ergebnisse in irgend einer Richtung verwerthbar sein sollen.

1) Ueber den wesentlichen Inhalt der nachfolgend beschriebenen Beobachtungen wurde der Biologischen Gesellschaft in einem Vortrag am 1. Febr. d. J. berichtet.

thümlichen örtlichen Verhältnisse sowie die Beziehungen zu anderen Körpertheilen die Versuche weiter ausdehnten, als ursprünglich vorausgesehen war. Von einem Abschluss sind sie, namentlich in ihrem anatomischen Theile, freilich auch jetzt noch weit entfernt; doch scheinen mir einige der berührten Fragen wichtig genug, um sie hier zur Sprache zu bringen. Eine ausführliche Darstellung hoffe ich bald folgen lassen zu können.

---

1. Die Kaltpunkte der Conjunctiva können in Folge der ungewöhnlich niedrigen Schmerzschwelle nicht nach den Verfahren von Blix oder Goldscheider aufgesucht werden. Man kommt indessen auch mit sehr kleinen Metallmassen zum Ziel, wenn man die Vorsicht gebraucht, sie nach kurzem Gebrauch wieder abzukühlen. Als sehr geeignet fand ich weiche Kupferdrähte 0,2 mm dick und 8—20 cm lang oder dünnste Blechstreifen, wie sie unter dem Namen Lametta als Christbaumschmuck in den Handel kommen. Um Beschädigungen des Epithels durch die scharfen Enden zu vermeiden, schmilzt man in der Bunsenflamme eine kleine Metallperle an. Handelt es sich nicht um Auffindung einzelner Punkte, sondern um den Nachweis der Kälteempfindung überhaupt, so leisten gute Dienste kleine, aus 1,0 mm dickem Messingblech ausgestanzte Scheibchen, Durchmesser 2 mm, welche mit Siegellack an dem Ende einer Schweinsborste befestigt werden. Ein weiteres brauchbares Verfahren wird unten bei der Prüfung des Wärmesinnes Erwähnung finden.

Tastet man mit einem feinen Drähtchen die Conjunctiva bulbi ab und zeichnet die gefundenen Kaltpunkte ein in eine Karte des Gefässnetzes (siehe meine erste Mittheilung), so findet man für die Kaltpunkte eine weniger dichte Vertheilung als für die Schmerzpunkte. Innerhalb einer Fläche von 29 mm^2 der temporalen Seite meiner rechten Conjunctiva bulbi liessen sich z. B. 35 Schmerzpunkte und 10 Kaltpunkte nachweisen. Einzelne Kaltpunkte liegen Schmerzpunkten sehr nahe, andere völlig isolirt. Auffällig viele Kaltpunkte trifft man an, wenn man mit dem Draht den Conjunctivalgefässen entlang fährt.

Besondere Aufmerksamkeit habe ich dem Verhalten der Cornea geschenkt. Man kann mit den dünnen Drähten und Metallstreifen ohne zu grosse Belästigung die Cornea abtasten; aber so oft ich den Versuch auch wiederholte, immer hat er mir

ein negatives Resultat ergeben, ausgenommen auf dem Randtheil der Cornea. Am überzeugendsten ist der folgende Versuch. Man legt das Drähtchen sanft auf den Scheitel der Cornea und führt dann in der Richtung eines Radius langsam nach aussen. Anfangs stellt sich nur die bekannte brennende Empfindung ein. *Sobald man sich aber dem Rande auf 1—2 mm genähert hat, tritt die Kälteempfindung mit grösster Deutlichkeit hinzu.* Der Versuch gelingt nicht auf jedem Radius, am sichersten auf den Radien der temporalen Cornealhälfte.

Der Cornealrand und die nächst anstossenden Theile der Conjunctiva sind, soweit ich urtheilen kann, die kaltempfindlichsten Orte des Auges. Hier gelingt der Nachweis der Kaltpunkte auch mit dem Verfahren, welches mir seinerzeit keinen Aufschluss gegeben hatte, nämlich durch Aufsetzen eines stärkeren Haares, etwa 0,1 mm Durchmesser, welches vorher in eiskalte Kochsalzlösung getaucht war. Es muss natürlich berücksichtigt werden, dass der kleine Tropfen an der Spitze des Haares sehr bald die Temperatur der Bindehaut annimmt, so dass nur bei der ersten Berührung die Kälteempfindung deutlich ist. An Orten, wo die Kaltpunkte dicht liegen, wie auf dem Lidrande und dem Randtheil der Cornea, führt dieses Verfahren, welches den Vorzug besitzt, das wenigst angreifende zu sein, ohne weiteres zu guten Resultaten. Für die Conjunctiva muss man über die Lage der Kaltpunkte schon etwas orientirt sein, wenn man nicht lange vergeblich suchen soll. Einzelne Kaltpunkte sprechen bei Berührung mit dem Reizhaar an, auch wenn dieses nicht in kalte Salzlösung getaucht war. Ob es sich hier um mechanische Reizung handelt oder um adaequate, durch die Spur von Thränenflüssigkeit, die dem Haare anhaftet, muss ich unentschieden lassen.

Herr Dr. F. Kiesow, dem ich für vielfache Nachprüfung meiner Beobachtungen zu grossem Danke verpflichtet bin, bemühte sich durch Anwendung von Cocain die Versuche zu erleichtern. Leider ist es weder ihm noch mir gelungen, die Angabe von Donaldson (a. a. O.) zu bestätigen, nach welcher die Temperaturempfindung des Auges bei vollständiger Aufhebung des Berührungsschmerzes erhalten bleibt. Unsere Versuche in dieser Richtung ergaben folgendes: Hat man für eine Anzahl Schmerzpunkte der Conjunctiva die mechanische Reizschwelle bestimmt, sich ferner von dem sicheren Ansprechen benachbarter

Kaltpunkte auf adaequate Reizung überzeugt und vergiftet dann das Auge mit einigen Tropfen einer 1—2 proc. Lösung von salzsaurem Cocain, so findet man, sobald eine deutliche Erhöhung der Schmerzschwelle nachweisbar wird, die Erregbarkeit der Kaltpunkte ebenfalls vermindert oder ganz aufgehoben. Etwas abweichend verhalten sich die Kaltpunkte des Cornealrandes, welche noch deutlich reagiren können, wenn die Schmerzhaftigkeit an dieser Stelle bereits stark herabgesetzt ist. Für den Nachweis der Kaltpunkte des Cornealrandes ist demnach schwache Cocainisirung vortheilhaft. Die centralen Theile der Hornhaut findet man hierbei der Kälteempfindung unfähig, ein Ergebniss, welches natürlich nur in seiner Uebereinstimmung mit dem Befunde am unvergifteten Auge als beweiskräftig angesehen werden kann.

2. Die Prüfung des Auges auf Warmempfindung ist viel schwerer auszuführen, und ich muss gestehen, dass ich bisher noch nicht zu sicheren Ergebnissen gelangt bin. Die Schwierigkeiten sind theils physikalischer, theils psychologischer Natur. Die feinen Drähte und Metallstreifen, welche zum Aufsuchen der Kaltpunkte wohl geeignet sind, da sie sich sehr rasch auf die Zimmertemperatur wieder einstellen, sind hier nicht verwendbar. Es würde wenigstens ziemlich complicirter Wärme- und Regulationseinrichtungen bedürfen, um die Enden der Drähte gerade innerhalb der Temperaturen zu erhalten, welche nach unten durch die Körpertemperatur, nach oben durch die schmerzhaft reizenden Temperaturgrade begrenzt sind. Kleine Tröpfchen Kochsalzlösung, wie sie an der Spitze von Reizhaaren hängen bleiben, kühlen durch Verdunstung so rasch ab, dass sie, bis es zur Berührung kommt, meist schon unter die Körpertemperatur herabgesunken sind. Grössere Mengen Flüssigkeit, etwa mit einem Pinsel, an das Auge zu bringen, gibt ebenfalls wenig zuverlässige Resultate. Abgesehen von der starken Belästigung durch die Haare des Pinsels, fliesst die warme Salzlösung gegen das Lid herab und gibt leicht zu Täuschungen Veranlassung.

Das nachfolgend beschriebene Verfahren ist von dieser Unzuträglichkeit frei, verzichtet aber allerdings auf ganz umschriebene Reizung. Eine kleine Menge Watte wird zu einem Röllchen gedreht, etwa 20 mm lang und 2 mm im Durchmesser, und an die Spitze einer Schweinsborste geleimt. Man taucht die Watte

in weisses Vaselin, welches im Wasserbad auf 45—50° gehalten wird. Diese Temperatur liegt wenig über dem Erstarrungspunkt des Vaselins. Bei schwerer schmelzenden Präparaten lässt sich der Schmelzpunkt durch Zusatz von Paraffinum liquidum herabdrücken[1]. Die von einem solchen Wattebäuschchen erwärmte Fläche des Auges beträgt etwa 3 mm². Das Vaselin erstarrt nach kurzer Zeit und kann daher nicht nach dem Lide herabfliessen, wozu übrigens in Folge der grossen Oberflächenspannung gegenüber der Thränenflüssigkeit die Neigung gering ist. Die mechanische Reizung ist unbedeutend, was für solche Versuche gefordert werden muss. Denn nur so lange der Lidschlag sich unterdrücken und eine Berührung des sehr wärmeempfindlichen Lides mit dem Reizmittel sich vermeiden lässt, können Täuschungen ausgeschlossen werden. Handelt es sich nur um Versuche auf der Conjunctiva, so kann man dreister vorgehen, und im Wasserbad vorgewärmte Drähte von 3 mm Stärke anwenden, deren Ende abgerundet und geglättet ist.

Ich zähle alle diese verschiedenen Verfahrungsarten so umständlich auf, um zu zeigen, dass ich es an Bemühungen nicht habe fehlen lassen, ein sicheres Urtheil zu erlangen. *Trotzdem ist es mir und ebenso Herrn Kiesow nicht gelungen, das Vorhandensein von Wärmeempfindung unzweideutig nachzuweisen.* Die einzigen Orte, an welchen ich das Vorhandensein von Wärmepunkten auf meinem Auge für möglich halte, sind die in der Nähe des temporalen und nasalen Augenwinkels liegenden Flächen der Conjunctiva. Hier glaubte ich zuweilen Warmpunkte gefunden zu haben, doch liessen sich dieselben bei erneuten Versuchen nicht wieder mit Sicherheit ermitteln. Eine Schwierigkeit für die Beobachtung liegt darin, dass sich solche umschriebene Wärmeempfindungen wohl verwechseln lassen mit den leicht brennenden Empfindungen, welche sich hier, wie auf der Haut, noch unterhalb der Grenze des eigentlichen Temperaturschmerzes einstellen. Bei stumpfer Wärme-, dagegen lebhafter Schmerzempfindung wäre ein solches Ueberdecken der ersteren durch die zweite wohl denkbar. Die Unsicherheit des Erfolges kann nicht ohne weiteres den benutzten Reizungs-

---

1) Taucht man die Watte statt in Vaselin in abgekühltes flüssiges Paraffin, so eignet sich das Verfahren auch zum Nachweis der Kaltempfindung.

verfahren zugeschrieben werden, denn auf der Haut des Lides liess sich mit denselben Mitteln die Empfindung der Wärme stets mit aller Deutlichkeit nachweisen.

Das Ergebniss dieser Versuche sofort zu verallgemeinern würde kaum gerechtfertigt sein. Da ein so geübter und gewissenhafter Beobachter wie Donaldson [1]) das Vorhandensein von Wärmeempfindung für mehrere Augen bestimmt constatirt hat, so ist anzunehmen, dass individuelle Verschiedenheiten vorkommen, wie sie innerhalb der Mundhöhle für die Componenten des Geschmacksinns von Urbantchitsch [2]) und Kiesow [3]) nachgewiesen sind.

Gelegentlich der Prüfung auf Warmempfindung lässt sich am Auge eine sehr sonderbare Erscheinung beobachten, welche ich als *paradoxe Kaltempfindung* bezeichnen will. Sie besteht darin, dass Kaltpunkte auf Berührung mit dem warmen Drahte ansprechen und zwar mit der ihnen eigenthümlichen, scharf umschriebenen (punktförmigen) Kaltempfindung. Dieselbe Beobachtung lässt sich auch auf der Haut machen und hier noch genauer untersuchen. Hat man z. B. auf einer Extremität eine grössere Zahl Kaltpunkte aufgesucht und in wiederholten Prüfungen so genau als irgend möglich bezeichnet und übergeht dieselben mit der Spitze des Blix'schen Heizrohres, so findet man, dass *ein Theil* der Punkte wie auf adaequate Reizung reagirt. Die Erregung gelingt nicht direct auf den Kaltpunkt, d. h. auf der Stelle, welche für den adaequaten Reiz als die günstigste bestimmt worden ist, sondern von einem oder mehreren Orten der nächsten Umgebung. Auf eine Discussion dieses sonderbaren Verhaltens möchte ich erst eingehen, wenn meine anatomischen Untersuchungen weiter gediehen sind. Die paradoxe Erregung der Kaltpunkte gelingt auf der Haut im Allgemeinen erst bei Temperaturen von 45° C. aufwärts und gehört nicht zu den leicht beobachtbaren Erscheinungen. Eine Ausnahme machen die Brustwarze und die glans penis. An diesen beiden für Kälte ungemein empfindlichen Orten ist die paradoxe Kaltempfindung mit Leichtigkeit durch alle Temperaturen über 40° C. auslösbar

1) a. a. O. S. 344.

2) Beobachtungen über Anomalien des Geschmacks etc. in Folge von Erkrankungen der Paukenhöhle. 1876.

3) Philosophische Studien (Wundt) Bd. 10, S. 329.

(s. u.). Hierher gehört auch die Empfindung von Frost beim Besteigen eines heissen Bades.

3. Die Fähigkeit der Conjunctiva Kälte zu empfinden kommt vielfach bei Berührungen, namentlich mit Metallinstrumenten, zur Geltung. Durch die Betheiligung des Temperatursinns kann die Wahrnehmung als Ganzes einen mehr oder weniger indifferenten, d. h. schmerzlosen Charakter annehmen.

Wird dagegen die Erregung der Kaltpunkte ausgeschlossen, was bei Verwendung der Reizhaare so gut wie vollkommen erreicht ist, so sind alle überhaupt wahrnehmbaren Berührungen schmerzhaft, wie ich dies schon früher angegeben habe. Es ist mir allerdings aus einer Anzahl von Beobachtern, welche sich freundlichst dem Versuche unterzogen, von einigen die Angabe gemacht worden, sie fühlten die Berührung. Damit ist natürlich über den Character der Empfindung nichts praejudicirt, denn es ist in jedermanns Belieben gestellt, was er unter einer Berührungsempfindung verstehen will. Ich habe in meinen beiden früheren Mittheilungen die Worte Druck- und Berührungsempfindung als sich deckende Begriffe gebraucht, bestreite aber nicht die Berechtigung, dem letzteren Begriffe eine weitere Bestimmung unterzulegen. Ich behaupte nur, *dass die auf Cornea und Conjunctiva mechanisch erregbaren Sinnespunkte die Bedeutung von Schmerzpunkten und nicht von Druckpunkten haben.*

Wie ich in meiner zweiten Mittheilung zeigte, unterscheiden sich die Druckpunkte von den Schmerzpunkten:

1. Durch eine verschiedene anatomische Lage und Vertheilung.
2. Durch eine niedrigere mechanische Reizschwelle.
3. Durch eine grössere Beweglichkeit bei Anwendung oscillirender elektrischer Reize.
4. Durch die Eigenthümlichkeit, bei Reizung mit dem constanten Strom nicht in dauernde, sondern in rhythmische Erregung zu gerathen.

Diese letztere Beobachtung ist in der erwähnten Mittheilung nicht enthalten und sei hier ergänzend angeführt. Das »Schwirren« der Druckpunkte, welches bei faradischer Reizung so überaus deutlich sich einstellt, tritt nach Art eines unvollständigen Schliessungstetanus auch bei galvanischer Erregung auf. Am leichtesten ist es mit unpolarisirbarer Pinselelektrode auf den

Schleimhautflächen der Lippen zu beobachten, unschwer aber auch auf der Haut. Ich bemerke, dass dasselbe Symptom sich ferner bei galvanischer oder mechanischer Erregung der Nervenstämme einstellt.

Von diesen vier Merkmalen setzt 1 den anderweitigen Nachweis verschiedenartiger Sinnespunkte bereits voraus, 4 habe ich der starken Lichterscheinungen halber, welche das Aufsetzen der Electrode eines constanten Stromes auf die Conjunctiva begleiten, noch nicht genauer zu untersuchen gewagt.

Bezüglich des zweiten Merkmals kann ich mich auf meine früheren Beobachtungen berufen, nach welchen die Reizschwellen der empfindlichen Punkte auf Cornea bezw. Conjunctiva zwar nicht völlig identisch sind, aber innerhalb jeder dieser Flächen sehr nahe beisammen liegen. Jedenfalls fehlt ein Sprung in den Schwellenwerthen, wie er an Orten mit Druck- und Schmerzpunkten gefunden zu werden pflegt. Man könnte allerdings annehmen, dass gerade auf der Conjunctiva die mechanischen Reizschwellen für die beiden Punktgattungen zusammenfallen; dann müsste aber bei der Reizung bald die eine, bald die andere Empfindung sich einstellen. Auf Cornea und Conjunctiva meiner Augen habe ich nichts davon bemerken können und ich muss aus den Angaben anderer Beobachter schliessen, dass es sich nicht um eine individuelle Eigenthümlichkeit handelt.

Die Untersuchung auf das dritte Merkmal, das Schwirren der Druckpunkte bei faradischer Reizung, hat mir, wie ich schon bei einer früheren Gelegenheit bemerkte, nur negative Resultate ergeben.

Ich muss also schliessen, dass auf Cornea und Conjunctiva die Druckpunkte fehlen oder doch in so verschwindend kleiner Zahl vorkommen, dass sie für den Character der dort auslösbaren Empfindungen nicht in Betracht kommen. Für die Annahme, dass diese Orte neben ihrem hochentwickelten Schmerzsinn noch einen besonderen Berührungssinn besitzen, welcher dann auch auf der übrigen Haut kaum fehlen dürfte, habe ich keine Anzeichen finden können und ist mir auch keine überzeugende Beobachtung bekannt. Gegen eine solche Annahme spricht, dass Berührung des Auges mit einem feinen Pinsel oder einem Watteflöckchen qualitativ anders empfunden wird als auf der Haut, wie mir von allen Beobachtern bestätigt wurde.

Drückt man mit einem Stäbchen auf die Conjunctiva, so

kann neben dem localen Schmerz, oder bei Anwendung von Cocain ohne denselben, eine Empfindung besonderer Art ausgelöst werden, welche sich auch ohne directe Berührung der Conjunctiva hervorrufen lässt, indem man bei geschlossenen Lidern auf den Augapfel drückt. Es handelt sich hierbei um eine nicht von der Oberfläche, sondern aus der Tiefe des Auges kommende dumpf schmerzhafte, nicht localisirte Empfindung, auf welche einzugehen hier nicht der Ort ist. Ich möchte, um Missverständnisse auszuschliessen, derselben Erwähnung thun.

4. Bei den Bestimmungen der mechanischen Reizschwellen an den verschiedenen Orten der Körperoberfläche ist mir die Glans penis durch ihren hohen Schwellenwerth auffällig geworden. Ich kam daher, nachdem ich Druck- und Schmerzpunkte zu trennen gelernt hatte, auf die Beobachtung zurück und versuchte auch an diesem Orte die verschiedenen Sinnesqualitäten zu sondern. Es stellte sich dabei heraus, *dass die hohe Reizschwelle bedingt ist durch das Fehlen der Druckpunkte. Der seinerzeit bestimmte Schwellenwerth ist die Schmerzschwelle.*

Man muss bei diesem Versuche unterscheiden zwischen Empfindungen, welche am Orte der Reizung und solchen, welche anderwärts entstehen. Die Haut des männlichen Gliedes besitzt im Allgemeinen, wie die übrige Körperhaut, Druckempfindung. Die Druckpunkte, an der Wurzel des Gliedes spärlich vertheilt, stehen dichter, je mehr man sich dem Rande der Vorhaut nähert; auf dem inneren Blatte der Vorhaut, gegen den Eichelhals, nehmen sie ab und verschwinden schliesslich. Das Frenulum ist reich an Druckpunkten. Mechanische Reizungen der Eichel, welche das Glied als Ganzes bewegen, werden durch den Drucksinn der genannten Orte in Form der gewöhnlichen Druckempfindung wahrgenommen. Fasst man dagegen mit einer Pincette eine Falte der Eichel und vermeidet eine Bewegung des Gliedes, so wird bei schwachem Kneifen nichts gefühlt, bei starkem Kneifen Schmerz. Das Präputium reagirt auf denselben Eingriff zuerst mit Druckempfindung, weiterhin mit Schmerz, entsprechend der doppelten Reizschwelle. Uebereinstimmende Ergebnisse liefert die faradische Reizung, welche zweckmässig mit einer spitzen Pinselelektrode (unpolarisirbar) ausgeführt wird. Die niedrigste Schwelle für diesen Reiz besitzen der Rand der Vorhaut, das Frenulum und die Umgebung der Harnröhrenmündung.

Auf dem Vorhautrande finden sich intensiv und fein, d. h. umschrieben, stechende Schmerzpunkte und schwirrende Druckpunkte. Auf der Eichel fehlt das Schwirren. Die Reize werden schmerzhaft oder gar nicht empfunden d. h. mit Schwellenreizen lässt sich das Vorhandensein zahlreicher unempfindlicher Lücken zwischen den Schmerzpunkten nachweisen. (Ueber elektrisch auslösbare Temperaturempfindungen s. u.). Der Schmerz hat etwas anderen Charakter als auf dem Präputium und der Haut im Allgemeinen; er ist bohrend und anscheinend tief liegend, wie aus dem Schwellkörper kommend. Man überzeugt sich aber durch Einstechen feiner Nadeln oder Durchstossen ganz oberflächlicher Falten, dass schon die äussersten Theile intensiver Schmerzempfindung fähig sind.

Auch der Temperatursinn des männlichen Gliedes zeigt einige Besonderheiten. Zunächst nimmt die Dichte der Temperaturpunkte, und zwar Kalt- wie Warmpunkte, von der Wurzel des Gliedes gegen den Rand der Vorhaut hin zu, ähnlich wie die Druckpunkte. Beim Uebergang auf die Eichel nimmt aber der Temperatursinn zunächst nicht ab, sondern erfährt sogar eine besondere Ausbildung im Eichelhals und auf der Corona glandis. Diese Orte gehören zu den temperaturempfindlichsten des Körpers und können in dieser Richtung nur verglichen werden mit den von Goldscheider als bevorzugt gekennzeichneten Stellen: Mamilla, Augenlider, Lippen, Zunge. Der Temperatursinn der Eichel ist vorwiegend Kältesinn; neben dem Reichthum an Kaltpunkten fällt auf die Intensität der Empfindung, die sie aufzulösen im Stande sind. Von dem Eichelwulst gegen die Mündung der Harnröhre nimmt die Empfindlichkeit für Temperaturen rasch ab, um in der Mitte zwischen beiden Orten nahezu Null zu werden[1]). Die Umgebung des Orificium urethrae sowie das Frenulum besitzen dagegen Temperaturempfindung, insbesondere auch ausgesprochene Warmempfindung.

Die Kaltpunkte der Eichel reagiren ausser auf adäquate Reizung auch sehr deutlich auf faradische. Um Täuschungen auszuschliessen, gebraucht man am besten eine Pinselelektrode, welche mit körperwarmer Kochsalzlösung getränkt ist; man setzt die Spitze auf den vorher genau bezeichneten Kaltpunkt und

1) Hierauf dürfte die Angabe Dessoir's zu beziehen sein, dass die Eichel keine Temperaturempfindung besitzt. a. a. O. S. 278.

überzeugt sich, dass nur für die Dauer der Reizung die Kaltempfindung auftritt. Die Reizschwelle liegt höher, als für die Schmerzpunkte.

Die Kaltpunkte der Eichel zeigen ferner in ganz hervorragendem Grade die Erscheinung der paradoxen Erregung. Berührung vorher bezeichneter Kaltpunkte mit dem erwärmten Metallconus wird stets und deutlich kalt empfunden. In dem Maasse als die Temperatur des Metalls über die Körpertemperatur steigt, wächst die Intensität der Kaltempfindung; oberhalb 50° gesellt sich zu der starken Kaltempfindung ein schmerzhaftes Brennen, der bekannte Wärmeschmerz. Aus der grossen Dichte der Kaltpunkte und ihrer Empfindlichkeit für den Wärmereiz erklärt sich, dass flächenhafte Berührung mit erwärmten Metallstäben an den meisten Stellen der Eichel kalt gefühlt wird, um so intensiver, je höher die Temperatur. Brennend heisse Gegenstände werden intensiv kalt und zugleich schmerzhaft brennend empfunden. Nur in der Gegend der Harnröhrenmündung lässt sich auch bei flächenhafter Reizung Wärmeempfindung auslösen. Für das Aufsuchen der Warmpunkte bildet das leichte Ansprechen der Kaltpunkte eine ernstliche Schwierigkeit.

Herrn Collegen A. Kollmann, welcher mir die Patienten seiner Poliklinik freundlichst zuwies, verdanke ich die Gelegenheit die Verhältnisse an einer Anzahl Personen prüfen zu können. Von 13 Untersuchten zeigten 10 die eben beschriebene regionale Verbreitung des Temperatursinnes (wenn auch mit einigen kleineren individuellen Verschiedenheiten) und die paradoxe Kaltempfindung. Die Angaben von 3 Untersuchten konnten, weil sich selbst widersprechend, nicht benutzt werden.

Ausser Temperatur- und Schmerzempfindung auf der Eichel, dazu Druckempfindung auf der Vorhaut und der Haut des Gliedes habe ich weitere Sinnespunkte nicht auffinden können. Insbesondere fehlt jeder Anhaltspunkt, für das Gefühl der Wollust irgend welche Organe an der Oberfläche des Körpers specifisch verantwortlich zu machen. Reizung der Druckpunkte des Gliedes *kann* mit wollüstigen Empfindungen verknüpft sein, genau wie an anderen Orten mit dem Gefühl des Kitzels. Diese Verbindung ist aber keine nothwendige oder unvermeidliche, sondern hängt von gewissen Bedingungen ab, auf deren Besprechung ich bei einer anderen Gelegenheit eingehen möchte.

5. Als höchst unwahrscheinlich muss es gelten, dass die vier auf der Oberfläche des menschlichen Körpers bisher nachgewiesenen elementaren Empfindungsarten, Warm, Kalt, Druck und Schmerz, durch ein und denselben nervösen Apparat vermittelt werden sollten. Die Abstimmung auf gewisse Reizarten setzt auch bestimmte Einrichtungen voraus, die sich im anatomischen Bau der Endorgane bemerklich machen müssen. Der Nachweis, dass für umschriebene Reize von eben überminimaler Stärke die genannten Empfindungen nur von gewissen »Punkten« der Haut auszulösen sind und dass diese Punkte für alle überhaupt wirksamen Reize, gleichgültig welcher Art, in specifischer Weise reagiren, kann nur als eine Bestätigung der ausgesprochenen Erwartung aufgefasst werden.

Die Haut als Sinnesfläche betrachtet ist gleichsam ein aus vier Arten von Sinnespunkten zusammengesetztes Mosaik. Die Steine des Mosaiks stehen nicht Kopf an Kopf, sondern haben relativ breite, für umschriebene Schwellenreize unempfindliche Kittleisten zwischen sich. Je mehr es gelingt, die Schwellenreize ihrer Wirkungsfläche nach einzuengen, desto kleiner werden die empfindlichen Felder; die vermutheten anatomischen Einrichtungen müssen daher mindestens so klein sein, wie die kleinstflächigen, bisher benutzten Schwellenreize. Eine Grenze in dieser Richtung ist höchstens für die Warmpunkte erreicht (s. u.).

Das Mosaik von Sinnespunkten ist ferner von sehr wechselnder Anordnung oder Zeichnung: es ändert sich von Ort zu Ort sowohl die Gesammtzahl der Sinnespunkte in der Flächeneinheit, wie auch die Betheiligung der einzelnen Gattungen. Im Allgemeinen finden sich innerhalb einer gegebenen Fläche am spärlichsten die Warmpunkte, weniger selten die Kaltpunkte, wesentlich dichter die Druckpunkte und am allerengsten zusammengedrängt die Schmerzpunkte.

Es gibt indessen, abgesehen von den mit der Beschränkung auf Sinnespunkte nothwendig sich einstellenden leeren Zwischenräumen oder Lücken, grössere nach ihrem Bau und ihren Verrichtungen selbständige Gebiete des Körpers, wo eine oder mehrere Arten von Sinnespunkten fehlen. Fasst man lediglich aus Gründen der Vereinfachung die Kalt- und Warmpunkte, welche (vielleicht mit Ausnahme der Conjunctiva und eines grösseren Abschnittes des Glans penis) überall vereint vorkommen, zusammen als die Orte eines Temperatursinnes mit

zwei Componenten auf, so bleiben zur Wahrnehmung von Temperatur, Druck und Schmerz drei elementare Sinne für eine gewählte Hautstelle zu vergeben.

Die Zahl der wiederholungsfreien Combinationen zwischen diesen drei Elementen beträgt sieben, nämlich drei Unionen, drei Binionen und ein Ternion. Von diesen möglichen Combinationen sind mir vier als wirklich vorhanden bisher bekannt und zwar:

I. Eine Union. Ausschliesslich Schmerz empfindende Orte, Schmerzgebiete.

Dahin gehören:

1. Die Cornea mit Ausnahme ihrer Randtheile (s. o.).
2. Die Zähne, genauer das Dentin und die Pulpa der Zähne.

Bekanntlich sind die Zähne ein wichtiges Tastorgan. Hierbei spielen sie aber, wie schon E. H. Weber bemerkt, lediglich die Rolle eines Uebertragungsorgans, etwa wie die Gehörknöchelchen beim Hören. Wird dagegen nach Entfernung des Schmelzes das Zahnbein selbst angegriffen, so wird Schmerz empfunden. Die Angabe von Weber[1]), dass der Zahnkeim mechanische, Wärme- und Kältereize nur schmerzhaft empfindet, ist von Dessoir[2]) für thermische Reize bestätigt worden. Es bedarf übrigens gar nicht der Eröffnung der Zahnhöhle, es genügt, dass das Zahnbein etwa durch Retraction des Zahnfleisches blossliegt, um zu constatiren, dass mechanische, thermische und chemische Reize stets nur Schmerz erregen. Das Gleiche gilt für elektrische Reize, zu deren Zuführung sich ausser den abgeschliffenen Flächen der Schneidezähne, welche ich bei einer früheren Untersuchung benutzte, vorzüglich metallische Plomben eignen.

II. Zwei Binionen.

A. Orte mit Schmerz- und Temperaturempfindung, Schmerz- und Temperaturgebiete.

Dahin gehören:

1. Der Randtheil der Cornea und die Conjunctiva vielleicht mit der Einschränkung, dass der Temperatursinn einseitig ist (s. o.).
2. Die Glans penis (s. o.).

---

1) R. Wagner's Handwörterb. d. Physiologie 3, II, S. 415.
2) Arch. f. Physiologie 1892, S. 278.

B. Orte mit Druck- und Temperatursinn, Druck- und Temperaturgebiete.

In diese Kategorie gehört die Mundhöhle, allerdings mit wesentlichen Einschränkungen. Als vollkommen schmerzfrei ist bis jetzt nur ein beschränktes Gebiet der Wangenschleimhaut nachgewiesen, von Kiesow [1]) für mechanische, von mir für elektrische Reizung. Dass die Schmerzlosigkeit auch für chemische Reizung gilt, lässt sich durch elektrolytische Anätzung der betreffenden Stelle constatiren. Schmerzunterempfindlich sind übrigens, mit Ausnahme der Zähne, alle Theile der Mundhöhle in mehr oder weniger hohem Grade. Man vergleiche hierüber meine zweite Mittheilung. Auf vielen dieser Flächen treten eine oder mehrere Componenten des Geschmacksinns hinzu.

III. Das einzig mögliche Ternion, Temperatur-, Druck- und Schmerzempfindung, findet sich, soviel bekannt, auf allen übrigen bisher nicht aufgezählten Gebieten der Körperoberfläche.

6. So unvollständig diese Aufzählung sein mag, so genügt sie doch, wie mir scheint, um, zusammengehalten mit gewissen anatomischen Erfahrungen, zu sehr bemerkenswerthen Folgerungen zu führen. Die auf der Oberfläche des menschlichen Körpers bisher nachgewiesenen sensiblen Nervenendigungen zeigen nämlich wie bekannt, gleichfalls eine nicht ebenmässige Vertheilung. Setzt man die Verbreitung der Nervenenden in Beziehung zur Verbreitung der Sinnesqualitäten, so ergiebt sich folgendes:

I. Ausschliesslich *freie Nervenendigungen* finden sich in der Cornea mit Ausnahme des Randtheils, Hoyer [2]), Cohnheim [3]). *Sie entsprechen der dort ausschliesslich vorhandenen Schmerzempfindung.* Die Nervenendigungen in den Zähnen sind noch nicht genau genug bekannt. Freie Nervenendigungen finden sich ferner im Epithel der Conjunctiva, der äusseren Haut und vieler Schleimhäute. Ob das Epithel der Mundhöhle entsprechend der im Allgemeinen geringen Schmerzhaftigkeit auch arm ist an freien intraepithelialen Nerven, wäre zu untersuchen. Dass die Schmerznerven der Haut sehr oberflächlich liegen, wird durch verschiedene Thatsachen nahe gelegt. An allen Körperflächen mit dünnem Epithel

1) Wundt's Philosoph. Studien, Bd. 9, S. 513.
2) Arch. f. Physiol. 1866, S. 180.
3) Virchow's Arch. Bd. 38, S. 343.

liegt, trotz der isolirenden Wirkung der Hornschicht, die elektrische Reizschwelle der Schmerzpunkte in der Regel niedriger als die aller anderen Sinnespunkte. Diese Umkehrung des Schwellenverhältnisses gegenüber der mechanischen Reizung kann nicht auf einer besonders niedrigen elektrischen Reizschwelle der Schmerznerven als solcher beruhen; denn bei galvanischer Reizung des Ulnaris sprechen die Nerven der Druckpunkte zuerst an (s. o.). Für die oberflächliche Lage der Schmerznerven spricht ferner die bekannte Thatsache, dass ätzende, auf die Haut gebrachte Stoffe Schmerz erregen ohne vorgängige andere Empfindung. Markirt man auf der Haut einzelne Sinnespunkte mit einer Lösung von Silbernitrat, so wird man, namentlich an Orten mit dünner Epidermis, häufig ein länger dauerndes schmerzhaftes Brennen verspüren. Selbst kleine Tröpfchen einer Lösung von übermangansaurem Kali wirken oft in gleicher, wenn auch schwächerer Weise. Es scheint mir ferner durchaus berechtigt, die starke Auftheilung und Verflechtung der intraepithelialen Nerven vor ihrem Eintritt in das Epithel mit der mangelhaften Localisation, die Schutzlosigkeit der marklosen Enden gegen chemische Einwirkungen jeder Art, auch solcher, welche aus dem Gewebe selbst kommen (z. B. Entzündung), mit der mangelhaften Projection des Schmerzes in Beziehung zu setzen. Ob die zu den Tastzellen Merkel's[1]) zugehörigen Nerven, die terminaisons hédériformes Ranvier's[2]), die Endplättchen und knopfförmigen Verdickungen Dogiel's[3]) in die Kategorie der frei endigenden Nerven gehören bezw. besondere Entwicklungsstadien derselben darstellen, ist gegenwärtig nicht zu entscheiden.

II. A. *Endkolben* sind von ihrem Entdecker W. Krause[4]) nachgewiesen in der Conjunctiva, verschiedenen Theilen der Mundhöhle, glans penis und clitoridis. Durch ihr Vorkommen in Conjunctiva und glans penis, wo die Druckempfindung fehlt, erweisen sich die Endkolben als Temperaturorgane. Durch Dogiel's[5]) schöne Untersuchungen ist bekannt, dass sie besonders dicht in dem Randtheil der Cornea zu finden sind. Gerade dort fehlt

1) Arch. f. mikr. Anat. Bd. 11, 1875, S. 636.
2) Compt. rend. t. 91, 1880, p. 1087.
3) Arch. f. mikr. Anat. Bd. 37, 1891, S. 602, Bd. 44, 1898, S. 585.
4) Die terminalen Körperchen der einfach sensiblen Nerven, Hannover 1860.
5) Arch. f. mikr. Anat. Bd. 37, 1891, S. 602.

aber die Warmempfindung: Die Endkolben sind daher *wahrscheinlich die Organe der Kaltempfindung.*

Dieser Annahme erwächst nun anscheinend eine ernstliche Schwierigkeit, weil die Fähigkeit, Kälte zu empfinden, nicht nur den aufgezählten Orten, sondern auch der äusseren Haut zukommt. Es fehlt übrigens nicht an Nachrichten, dass sich auch hier Endkolben vorfinden. Smirnow [1]) beobachtete sie in der Haut der Fusssohle, Ruffini [2]) bildet aus der Haut der Fingerbeeren Endkörperchen ab, welche er zwar mit den Sehnenkörperchen Golgi's vergleicht und danach benennt, welche aber mit gleichem Recht als Endkolben aufgefasst werden können. Dass sie hier tiefer liegen als an anderen Orten, kann um so weniger ein Einwand sein, als gerade die Fingerbeere auch ein eigenthümliches Verhalten gegenüber Kältereizen zeigt. Wie Herr Kiesow mir mittheilt und ich bestätigen kann, werden Berührungen mit der Spitze des kalten Metallconus an dieser Stelle nicht als thermischer Reiz wahrgenommen; es bedarf zur Auslösung der Kaltempfindung einer Berührung mit grösserer Fläche. Zwischen der tiefen Lage hier und der sehr oberflächlichen in Conjunctiva und Glans penis scheinen Zwischenstufen vorzukommen. In einem Vergoldungspräparat aus der Haut des Oberarms fand ich einen wohlcharakterisirten Endkolben 0.3 mm unter dem Epithel, etwa halbwegs zwischen den Knäueln der Schweissdrüsen und der Oberfläche. Ob die Zahl der Endkolben in der Haut ausreicht, die dort nachweisbaren Kaltpunkte zu decken, ist eine Frage, die noch zu entscheiden bleibt. Ich möchte indess bemerken, dass ich eine so dichte Vertheilung, wie sie Goldscheider für einzelne Theile der Haut darstellt, im Allgemeinen nicht habe bestätigen können. So fand ich z. B. auf einer grösseren Fläche des Unterschenkels, auf welcher mehrere Arten von Sinnespunkten genau mappirt wurden, im Mittel 2,4 Kaltpunkte pro cm^2. Es ist demnach begreiflich, dass das Auffinden von Endkolben in mikroskopischen Schnitten ein zufälliges Vorkommen sein wird.

II. B. *Nervenknäuel* sind in der Glans penis zuerst von Tomsa [3]), in der Glans clitoridis von W. Krause [4]) beobachtet worden.

---

1) Internat. Monatsschr. f. Anat. und Physiol. Bd. 10, 1893, S. 241.
2) Arch. ital. de biologie t. 21, p. 249.
3) Wiener Sitzungsber. Bd. 51, I, 1865, S. 83.
4) Zeitschr. f. rat. Med. Bd. 28, 1866, S. 86.

Letzterer bezeichnet sie als Genitalnerven- oder Wollustkörperchen. Nach ihrem Vorkommen in der Glans penis sind sie als Endigungen von Temperaturnerven in Betracht zu ziehen und es liegt nahe, sie als die noch fehlenden Organe des Wärmesinns in Anspruch zu nehmen. Ob ihre Vertheilung in Uebereinstimmung zu bringen ist mit der eigenthümlichen und gerade nicht sehr dichten Verbreitung des Wärmesinns an dem genannten Orte, bleibt zu untersuchen. Es muss ferner erwogen werden, ob die sogenannten Genitalnervenkörperchen überhaupt Gebilde einerlei Art darstellen und ob nicht ein Theil derselben als besonders mächtig entwickelte Endkolben, somit als Organe des Kältesinns, aufzufassen sind. Dogiel[1]), der genaueste Kenner dieser Gebilde, unterscheidet zwischen regelmässig kugel-, ei- oder birnförmig gestalteten und langausgezogenen, cylindrischen, bezw. zwischen einfachen und zusammengesetzten. Es ist fraglich, ob diese Verschiedenheiten rein äusserlicher Natur oder functionell begründet sind. Sehr wohl möglich wäre es, dass alle Genitalnervenkörperchen nur grosse Endkolben darstellen und dass die Organe des Wärmesinns an diesem Orte noch unbekannt sind.

Für die übrige Haut ist mir nur eine Nachricht bekannt, welche mir Erwähnung zu verdienen scheint. Ruffini beschreibt in der schon oben angezogenen Abhandlung aus der Haut der Fingerbeere neue Nervenenden von tiefer Lage, grossen Dimensionen und cylindrischer Gestalt. Dass die Organe des Wärmesinns grössere und tiefer liegende Gebilde darstellen als die übrigen Sinneswerkzeuge der Haut, möchte ich aus verschiedenen Gründen annehmen. Alle Beobachter stimmen darin überein, dass die genaue Lagebestimmung für die Warmpunkte viel schwerer ist, als für die Kaltpunkte. Mit möglichst umschriebenen Wärmereizen untersuchend findet man seltener scharf abgrenzbare Punkte als kleine Felder mit mehr oder weniger breiten Höfen von abnehmender Empfindlichkeit. Starke, umschriebene Wärmreize werden fast überall auf der Haut wahrgenommen, wenn auch mit verschiedener Deutlichkeit und verschiedener Schärfe der Localisation. Für grosse Dimensionen spricht ferner ihre im Verhältniss zu anderen Sinnespunkten geringe Zahl, denn es ist wohl anzunehmen, dass die Sinnesorgane ceteris paribus um so kleiner

1) Arch. f. mikr. Anat. Bd. 41, 1893, S. 585.

sind, je dichter sie beisammen stehen. Auf tiefe Lage deutet endlich die lange Reactionszeit der Warmpunkte, welche zuerst Herzen[1]) aufgefallen ist und seitdem vielfach bestätigt wurde.

Ruffini's Endigungen finden sich nun aber nicht allein in der Fingerhaut. Nach eigenen Untersuchungen ist ihr Vorkommen in der Haut des Oberarmes sowie des Augenlides sicher gestellt. Da nun gerade der letztere Ort durch lebhafte Wärmeempfindung ausgezeichnet ist, so scheint mir eine Beziehung der Endigungen Ruffini's zum Wärmesinn einigermassen wahrscheinlich.

III. Meissner's Körperchen sind von jeher als Organe des Tastsinns betrachtet worden. Dass sie als Apparate des Drucksinns zu den Haaren in stellvertretender Beziehung stehen, habe ich in meiner zweiten Mittheilung wahrscheinlich zu machen versucht. Bekanntlich hat Maurer[2]) die Haare der Säuger aufgefasst als Homologa gewisser Sinnesapparate in der Haut der Fische und Amphibien. Sollte sich eine Verwandtschaft dieser Gebilde mit den Meissner'schen Körperchen nachweisen lassen, so würde der Ansicht von Maurer eine physiologische Berechtigung nicht abzusprechen sein.

Ich verkenne natürlich nicht, dass der Versuch, anatomische und sinnesphysiologische Erfahrungen nach statistischer Methode mit einander in Beziehung zu setzen, nur Wahrscheinlichkeiten, keine sicheren Schlüsse zu Tage fördern kann. Die Forschungsergebnisse des einen wie des anderen Gebietes sind ohne Rücksicht auf einander gewonnen worden und zeigen bei grosser Genauigkeit in gewisser Richtung oft Lücken gerade dort, wo eine Beziehung zu Erfahrungen des anderen Gebietes möglich wäre. Eine Entscheidung kann nur von weiteren Untersuchungen erwartet werden, mit denen ich noch beschäftigt bin.

1) Arch. f. d. ges. Physiol. Bd. 38, S. 93.
2) Morphol. Jahrb. Bd. 18 u. 20.

C. Neumann, *Ueber einen Ersatz des Dirichlet'schen Princips für gewisse Fälle.*

Einleitung.

Dass für ein gegebenes System isolirter und elektrisch geladener Conductoren stets ein elektrischer Gleichgewichtszustand existirt, kann bewiesen werden entweder durch Anwendung der *Gauss'schen Variationsmethode*, oder aber durch Anwendung des berühmten *Dirichlet'schen Princips*, oder endlich auch (mit grösserer Strenge) durch Anwendung meiner *Methode des arithmetischen Mittels*, unter Hinzunahme gewisser combinatorischer Methoden.

Das gilt aber Alles nur so lange, als der Betrachtung das *Newton-Coulomb'sche Gesetz* zu Grunde gelegt wird. Nimmt man an, dass das gegenseitige Potential zweier elektrischer Theilchen μ_1 und μ_2 nicht $= \mu_1 \mu_2 r^{-1}$, sondern $= \mu_1 \mu_2 \varphi(r)$ sei, wo $\varphi(r)$ eine *beliebig* gegebene Function der Entfernung r vorstellt, so versagen all' jene Methoden; was um so unangenehmer ist, als die Existenz eines elektrischen Gleichgewichtszustandes, bei Zugrundelegung eines solchen beliebigen Gesetzes, sehr zweifelhaft[1]) erscheint, mithin eine nähere Untersuchung hierüber durchaus nothwendig ist.

Die bisherigen Mittel versagen also in diesem Fall; und wir sind also darauf hingewiesen, nach *neuen* Mitteln uns umzusehen.

Zu diesem Zwecke werde ich hier zuvörderst zwei sehr allgemeine und leicht zu beweisende Sätze aufstellen. Dieselben beziehen sich auf ein ganz beliebig gegebenes materielles System, welches der Einwirkung beliebig gegebener Kräfte unterworfen ist. Dabei soll dahin gestellt bleiben, ob diese Kräfte nur innere, oder aber theils innere, theils äussere sind.

---

1) In der That habe ich schon bei einer früheren Gelegenheit (diese Berichte, 1894, S. 281) darauf aufmerksam gemacht, dass für eine gewisse Gestalt der Function $\varphi(r)$ ein elektrischer Gleichgewichtszustand überhaupt nicht möglich ist.

Was nun die hier mitzutheilenden beiden Sätze betrifft, so lautet der erste derselben folgendermassen:

Erster allgemeiner Satz. — *Sind die gegebenen Kräfte der Art, dass unter ihrem Einfluss — und bei Annahme einer gewissen* R e i b u n g —, *allmählich ein Zustand dauernder Ruhe eintritt, so wird dieser Ruhezustand mit Bezug auf jene gegebenen Kräfte als ein* G l e i c h g e w i c h t s z u s t a n d *zu bezeichnen sein; so dass also in solchem Falle über die Existenz eines derartigen Gleichgewichtszustandes kein Zweifel stattfinden kann.*

Dabei soll die Reibung als eine ganz beliebige Kraft gedacht werden, nur der einen Bedingung unterworfen, dass sie in einem Augenblick, wo das materielle System zur Ruhe kommt, jedesmal $= 0$ *wird. Dieser Bedingung wird z. B. entsprochen werden, wenn die Reibung eines jeden materiellen Punktes proportional seiner augenblicklichen Geschwindigkeit gedacht wird.*

Solches festgesetzt, bedarf der Satz wohl kaum noch eines besondern Beweises. Kommt nämlich das betrachtete materielle System unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte und unter dem gleichzeitigen Einfluss jener Reibung zur *Ruhe*, so wird zur Zeit dieses Ruhezustandes jene Reibung $= 0$ sein. Folglich wirken zur Zeit dieses Ruhezustandes nur noch die eigentlich *gegebenen* Kräfte ein. Und es wird also dieser Ruhezustand mit Bezug auf jene gegebenen Kräfte ein Gleichgewichtszustand sein. — *Q. e. d.*

Bemerkung. — Gleichzeitig ergiebt sich aus dieser Beweisführung, dass unser Satz richtig bleibt, einerlei ob die Trägheit der betrachteten Materie gross oder klein ist, und dass der Satz also z. B. auch dann noch gelten wird, wenn man diese Trägheit (d. i. die trägen Massen der einzelnen materiellen Punkte) $= 0$ sich denkt.

Wir gehen über zur Aufstellung eines zweiten Satzes. Derselbe bildet eine gewisse Ergänzung des ersten, und lautet, falls wir an der für die Reibung festgesetzten Definition festhalten, folgendermassen:

Zweiter allgemeiner Satz. — *Tritt unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte, und trotz angenommener Reibung,* n i e m a l s *ein Zustand dauernder Ruhe ein, wie beschaffen der* A n f a n g s z u s t a n d *des gegebenen materiellen Systems auch immer gedacht werden mag —, so folgt hieraus, dass mit Bezug auf die gegebenen Kräfte ein Gleichgewichtszustand überhaupt* u n m ö g l i c h *ist.*

Existirte nämlich ein solcher *Gleichgewichtszustand*, so würde das System, falls man denselben zum Anfangszustand erwählt, und diesen Anfangszustand noch genauer dadurch determinirt, dass für ihn die Geschwindigkeiten der einzelnen materiellen Punkte alle = 0 sein sollen, offenbar *fortdauernd in Ruhe bleiben*; — was unserer Voraussetzung widerspricht, dass das System niemals zur Ruhe komme, wie beschaffen sein Anfangszustand auch gedacht werden mag. — *Q. e. d.*

Bemerkung. — Beim Princip der virtuellen Verrückungen handelt es sich um die Frage, ob ein gegebenes materielles System in einer gegebenen Lage unter dem Einfluss gegebener Kräfte im Gleichgewicht ist. Als ein Mittel zur Beantwortung dieser Frage werden dabei die sogenannten virtuellen Verrückungen, also gewisse nur *fingirte* Verrückungen eingeführt.

Einigermassen ähnlich liegen die Dinge bei unsern beiden allgemeinen Sätzen. Es handelt sich hier um die Frage, ob ein gegebenes materielles System unter dem Einfluss gegebener Kräfte einen Gleichgewichtszustand anzunehmen vermag. Und als Mittel zur Beantwortung dieser Frage werden hier die sogenannten Reibungskräfte, d. i. gewisse nur *fingirte* Kräfte in unsere Betrachtung mit hineingezogen. Es spielen also hier diese fingirten Kräfte nur eine *auxiliare* Rolle (ebenso wie dort die fingirten oder virtuellen Verrückungen).

Diese fingirten Reibungskräfte sind (wie schon betont wurde) ganz beliebig zu denken, nur der einen Restriction unterworfen, dass sie in einem Augenblick, wo das materielle System zur Ruhe kommt, jedesmal = 0 werden sollen. Es können mithin diese Reibungskräfte (wie schon bemerkt wurde) proportional den Geschwindigkeiten gedacht werden. Und dabei können diese Reibungskräfte der Art gedacht werden, dass sie, sobald das System in Bewegung ist, seiner augenblicklichen Bewegung *entgegen* wirken, eben so gut aber auch der Art, dass sie die augenblickliche Bewegung zu *verstärken* streben. Zur Unterscheidung könnte man sie im ersten Fall als *positive*, im letzten als *negative* Reibung bezeichnen.

Kurz, man sieht, wie wenig passend das Wort Reibung hier von mir angewendet ist. Zu meiner Entschuldigung mag dienen, dass irgend welche Umschreibungen zu langwierig, und die Herbeiziehung irgend eines neuen (etwa einer fremden Sprache ent-

nommenen) Wortes ebenfalls mit Unbequemlichkeit verknüpft sein dürfte.

Im Folgenden werde ich die soeben aufgestellten allgemeinen Sätze speciell auf die *Elektrostatik* in Anwendung bringen. Und zwar werde ich zuvörderst in § 1 einige Formeln zusammenstellen für die Bewegung der Elektricität in einem gegebenen Conductor, unter Annahme einer gewissen Reibung. Sodann aber werde ich jene beiden allgemeinen Sätze in Anwendung bringen auf die Frage der Existenz eines elektrischen Gleichgewichtszustandes, und zwar unter Zugrundelegung verschiedener Potentialfunctionen. So z. B. soll in § 2 die Potentialfunction $\varphi(r) = Cr^N$, sodann in § 3 die Newton'sche Potentialfunction $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ in Betracht gezogen werden. U. s. w.

§ 1.

Ueber die Bewegung der Elektricität in einem gegebenen Conductor.

Es sei gegeben ein isolirter und mit irgend welcher Elektricitätsmenge geladener Conductor. Diese Elektricität sei in Bewegung begriffen unter dem Einfluss derjenigen *Kräfte*, mit denen die einzelnen elektrischen Theilchen gegenseitig aufeinander einwirken, und unter dem gleichzeitigen Einfluss einer gewissen *Reibung*.

Was jene *Kräfte* betrifft, so mögen

$$(1) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

die Componenten derjenigen Kraft sein, mit welcher die im ganzen Conductor enthaltene Elektricität auf irgend einen Punkt (x, y, z) einwirken würde, falls man in diesem Punkt die Einheit der elektrischen Masse sich concentrirt vorstellen wollte. Es soll mithin V das *Potential* aller im Conductor enthaltenen Elektricität mit Bezug auf diesen Punkt (x, y, z) bezeichnen.

Was ferner die Reibung betrifft, so mögen

$$(2) \qquad -\varkappa u, \quad -\varkappa v, \quad -\varkappa w$$

die Componenten der an der Stelle (x, y, z) augenblicklich vorhandenen Reibungskraft sein. Dabei sollen u, v, w die augenblicklichen elektrischen *Strömungscomponenten* an der Stelle (x, y, z) bezeichnen, während $\varkappa$ eine *Constante* sein soll. Mit Hinblick auf die von uns hier verfolgten Zwecke können wir die

gegebene Constante $\varkappa$, ganz nach unserm Gutbefinden, als *positiv*, oder auch als *negativ* uns denken. [Vgl. die letzte Bemerkung der Einleitung].

Endlich mag, wie es fast allgemein üblich ist, die *Trägheit* der elektrischen Materie = 0 gedacht werden.

Alsdann gelten für die Bewegung der Elektricität innerhalb des gegebenen Conductors die Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} -\varkappa u + X &= 0\,, \\ -\varkappa v + Y &= 0\,, \\ -\varkappa w + Z &= 0\,; \end{aligned}$$

wofür man nach (1) auch schreiben kann:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \varkappa u + \frac{\partial V}{\partial x} &= 0\,, \\ \varkappa v + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0\,, \\ \varkappa w + \frac{\partial V}{\partial z} &= 0\,. \end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen sind, was die elektrischen Dichtigkeiten ε und η betrifft, noch die bekannten Relationen hinzuzufügen:

$$(5)\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\,d\tau = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)d\tau\,,$$

$$(6)\qquad \frac{\partial \eta}{\partial t}\,d\omega = -\,[u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)]\,d\omega\,,$$

wo t die *Zeit* bezeichnet. Von diesen beiden Relationen gilt die erste für jedes Volumelement $d\tau$ des Conductors, nämlich für die *räumliche Dichtigkeit* ε der in einem solchen Volumelement $d\tau\,(x, y, z)$ enthaltenen Elektricität. Andererseits gilt die zweite für jedwedes Oberflächenelement $d\omega$ des Conductors, nämlich für die *Flächendichtigkeit* η der auf $d\omega$ vorhandenen Elektricität; dabei bezeichnet n die auf $d\omega$ errichtete *innere* Normale.

Substituirt man in (5), (6) für u, v, w ihre aus (4) entspringenden Werthe, so erhält man:

$$(7)\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\,d\tau = \frac{1}{\varkappa}\,\Delta V\cdot d\tau\,,$$

$$(8)\qquad \frac{\partial \eta}{\partial t}\,d\tau = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{\partial V}{\partial n}\cdot d\omega\,.$$

Denkt man sich nun der ganzen Betrachtung nicht die NEWTON'sche Potentialfunction $\frac{1}{r}$, sondern irgend eine *beliebig gegebene* Potentialfunction $\varphi(r)$ zu Grunde gelegt, so wird offenbar das Potential V folgendermassen darstellbar sein:

$$(9) \qquad V = \int \varphi(r) \cdot \varepsilon_1 \, d\tau_1 + \int \varphi(r) \cdot \eta_1 \, d\omega_1 ,$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $d\tau_1$ des gegebenen Conductors, resp. über alle seine Oberflächenelemente $d\omega_1$. Dabei bezeichnen ε_1 und η_1 die zugehörigen elektrischen Dichtigkeiten, während unter r die Abstände der genannten Elemente vom sollicitirten Punkte (x, y, z) zu verstehen sind. Uebrigens können wir die Formel (9) etwas kürzer auch so schreiben:

$$(9\text{a.}) \qquad V = \int \varphi(r) \cdot E_1 \, dO_1 ,$$

falls wir nämlich dO_1 als *Collectivbezeichnung* für alle $d\tau_1$, $d\omega_1$, und ebenso E_1 als Collectivbezeichnung für alle ε_1, η_1 anwenden.

Von Wichtigkeit sind nun gewisse weitere Formeln, die aus den soeben zusammengestellten Formeln sich mit Leichtigkeit ableiten lassen. Zuvörderst ergiebt sich aus (4) durch Multiplication mit u, v, w und Addition:

$$\varkappa(u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w\right) d\tau ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\varkappa(u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau = V\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau$$
$$- \left(\frac{\partial (Vu)}{\partial x} + \frac{\partial (Vv)}{\partial y} + \frac{\partial (Vw)}{\partial z}\right) d\tau ,$$

oder, falls man über alle Volumelemente $d\tau$ des ganzen Conductors integrirt:

$$\varkappa \int (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau = \int V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau$$
$$+ \int V[u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)]\, d\omega ,$$

das letzte Integral hinerstreckt gedacht über alle Elemente $d\omega$ der Conductoroberfläche. Dabei bezeichnet n die auf $d\omega$ errichtete *innere Normale.*

Die letzte Formel gewinnt mit Hinblick auf (5), (6) die einfachere Gestalt:

$$(10)\quad \varkappa\int(u^2+v^2+w^2)\,d\tau = -\int V\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\,d\tau - \int V\frac{\partial\eta}{\partial t}\,d\omega\,,$$

d. i. die Gestalt:

$$(10\text{a.})\qquad \varkappa\int(u^2+v^2+w^2)\,d\tau = -\int V\frac{\partial E}{\partial t}\,dO\,,$$

wo [ähnlich wie in (9a.)] dO und E als Collectivbezeichnungen angewendet sind für die Elemente $d\tau$, $d\omega$, respective für die Dichtigkeiten ε, η.

Eine noch einfachere Gestalt erlangt übrigens diese Formel (10) oder (10a.) durch Einführung des *Ipsopotentials*, d. i. des Potentials aller im ganzen Conductor enthaltenen Elektricität auf sich selbst. Dieses Ipsopotential (oder Selbstpotential) hat bekanntlich folgenden Werth:

$$(11)\qquad \mathsf{P} = \frac{1}{2}\iint\varphi(r)\cdot E\,dO\cdot E_1\,dO_1\,.$$

Dabei sind die beiden Integrationen hinter einander ausgeführt zu denken, zuerst die *eine*, bei festgehaltenem dO, über sämmtliche dO_1, und sodann die *andere* über sämmtliche dO. Demgemäss kann man den Werth dieses Potentials auch so schreiben:

$$(12)\qquad \mathsf{P} = \frac{1}{2}\int\left\{\int\varphi(r)\cdot E_1\,dO_1\right\}E\,dO\,;$$

woraus mit Hinblick auf (9a.) sich ergiebt:

$$(13)\qquad \mathsf{P} = \frac{1}{2}\int VE\,dO\,.$$

Es seien nun, was die von uns betrachtete elektrische Bewegung betrifft, P und $\mathsf{P}+d\mathsf{P}$ die Werthe des in Rede stehenden Ipsopotentials in zwei aufeinanderfolgenden Zeitaugenblicken t und $t+dt$. Alsdann ist offenbar nach (11):

$$\frac{d\mathsf{P}}{dt} = \frac{1}{2}\iint\varphi(r)\left(E\frac{\partial E_1}{\partial t} + E_1\frac{\partial E}{\partial t}\right)dO\,dO_1\,.$$

Dieser Ausdruck aber kann, wie aus seiner Symmetrie sofort folgt, auch so geschrieben werden:

$$\frac{d\mathsf{P}}{dt} = \iint\varphi(r)\,E_1\frac{\partial E}{\partial t}\,dO\,dO_1\,,$$

mithin auch so:

$$\frac{d\mathsf{P}}{dt} = \int \left\{ \int \varphi(r) E_1 \, dO_1 \right\} \frac{\partial E}{\partial t} dO.$$

Hieraus aber folgt, mit Hinblick auf (9 a.), sofort:

$$(14) \qquad \frac{d\mathsf{P}}{dt} = \int V \frac{\partial E}{\partial t} dO.$$

Solches constatirt, können wir jetzt offenbar unserer vorhin in (10 a.) gefundenen Formel folgende einfachere Gestalt verleihen:

$$(15) \qquad \varkappa \int (u^2 + v^2 + w^2) \, d\tau = -\frac{d\mathsf{P}}{dt}.$$

Demgemäss hat also der Differentialquotient des Ipsopotentials P nach der Zeit den Werth:

$$(16) \qquad \frac{d\mathsf{P}}{dt} = -\varkappa \int (u^2 + v^2 + w^2) \, d\tau.$$

Hier repräsentirt [wie schon bei (2) bemerkt wurde] $\varkappa$ eine Constante, deren Vorzeichen *beliebig* gegeben zu denken ist. Betrachten wir $\varkappa$ als *positiv*, so wird das Ipsopotential P, zufolge (16), in beständigem *Abnehmen* begriffen sein. Und denken wir uns $\varkappa$ *negativ*, so wird dieses Potential P in fortdauerndem *Wachsen* sich befinden.

§ 2.

Untersuchung der Potentialfunction $\varphi(r) = Cr^N$, wo C eine gegebene Constante, und N eine gegebene Zahl aus der Reihe 2, 4, 6, 8, ... sein soll.

Wir machen zunächst $N = 2$, setzen also:

$$(\alpha.) \qquad \varphi(r) = Cr^2.$$

Alsdann ist nach (7) und (9):

$$(\beta.) \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\Delta V}{\varkappa}, \text{ und } V = C\int r^2 \cdot \varepsilon_1 \, d\tau_1 + C\int r^2 \cdot \eta_1 \, d\omega_1.$$

Nun ist allgemein $\Delta(r^n) = n(n+1) r^{n-2}$, mithin z. B. $\Delta(r^2) = 2 \cdot 3 = 6$. Somit folgt aus der letzten Formel sofort:

$$\Delta V = C\int \Delta(r^2) .\ \varepsilon_1\, d\tau_1 + C\int \Delta(r^2) .\ \eta_1\, d\omega_1\ ,$$

(γ.) $$\text{d. i. } \Delta V = 6\,C\int \varepsilon_1\, d\tau_1 + 6C\int \eta_1\, d\omega_1\ .$$

Bezeichnet man aber die *gegebene Elektricitätsmenge*, die in dem isolirten Conductor enthalten ist, mit M, so ist offenbar:

$$\int \varepsilon_1\, d\tau_1 + \int \eta_1\, d\omega_1 = M.$$

Somit ergiebt sich aus (γ.):

(δ.) $$\Delta V = 6\,C\,M\ .$$

Dies in (β.) substituirt giebt:

(ε.) $$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{6\,C\,M}{\varkappa}\ ;$$

woraus folgt:

(ζ.) $$\varepsilon = \varepsilon^0 + \frac{6CM}{\varkappa}\, t\ .$$

Hier repräsentirt ε^0 den Werth von ε zur Zeit $t = 0$; so dass also dieses ε^0 im Allgemeinen eine beliebig gegebene Function der Coordinaten sein wird.

Diese Formel (ζ.) sagt aus, dass die Dichtigkeit ε proportional der Zeit wächst, und zeigt also deutlich, dass die im Conductor enthaltene Elektricität niemals zur Ruhe kommen kann, wie beschaffen ihr Anfangszustand auch immer gedacht werden mag. Zufolge unseres (in der Einleitung aufgestellten) zweiten allgemeinen Satzes wird daher mit Bezug auf die durch die Potentialfunction (α.) repräsentirten Kräfte ein elektrischer Gleichgewichtszustand überhaupt *unmöglich* sein.

Wir wollen nun zweitens den speciellen Fall $N = 4$, also die Potentialfunction:

(a.) $$\varphi(r) = Cr^4$$

ins Auge fassen. Alsdann ist nach (7.) und (9.):

(b.) $$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\Delta V}{\varkappa}\ , \quad \text{und} \quad V = C\int r^4 .\ \varepsilon_1\, d\tau_1 + C\int {}^4 .\ \eta_1\, d\omega_1\ .$$

Aus der letzten Formel folgt successive:

$$\Delta V = 20\, C \int r^2 .\, \varepsilon_1\, d\tau_1 + 20\, C \int r^2 .\, \eta_1\, d\omega_1 \,,$$

$$\Delta\Delta V = 60\, C \int \varepsilon_1\, d\tau_1 + 60\, C \int \eta_1\, d\omega_1 \,,$$

d. i.

(c.) $$\Delta\Delta V = 60\, CM \,,$$

wo wiederum M die gegebene Gesammtmasse der im Conductor enthaltenen Elektricität repräsentirt.

Nun ist aber nach der *ersten* Formel (b.):

(d.) $$\frac{\partial \Delta \varepsilon}{\partial t} = \frac{\Delta\Delta V}{\varkappa} \,,$$

also, falls man für $\Delta\Delta V$ seinen Werth (c.) einsetzt:

(e.) $$\frac{\partial \Delta \varepsilon}{\partial t} = \frac{60\, CM}{\varkappa} \,;$$

woraus folgt:

(f.) $$\Delta \varepsilon = (\Delta \varepsilon)^0 + \frac{60\, CM}{\varkappa}\, t \,.$$

Hier bezeichnet $(\Delta \varepsilon)^0$ den Werth von $\Delta \varepsilon$ für $t = 0$; und es wird mithin dieses $(\Delta \varepsilon)^0$ im Allgemeinen eine beliebig gegebene Function der Coordinaten sein.

Die Formel (f.) zeigt, dass $\Delta \varepsilon$ proportional der Zeit wächst; und dass also *niemals* ein Ruhezustand eintreten kann. U. s. w. Kurz wir gelangen, unter Benutzung unseres zweiten allgemeinen Satzes, wiederum zu der Einsicht, dass die durch die Formel (a.) repräsentirten elektrischen Kräfte einen elektrischen Gleichgewichtszustand *nicht* zulassen.

Analoges wird sich offenbar in analoger Art für $N = 6, 8, 10, \ldots$ ergeben; sodass wir also zu folgendem Satz gelangen:

Satz. — *Bei Zugrundelegung der Potentialfunction*

$$\varphi(r) = Cr^N \,, \quad (N = 2, 4, 6, 8, \ldots) \,,$$

wird ein elektrischer Gleichgewichtszustand schlechterdings ***unmöglich*** *sein; — es sei denn, dass die dem Conductor zuertheilte Elektricitätsmenge $M = 0$ wäre.*

Denn für $M = 0$ würde in den Formeln (ζ.) und (f.) das der Zeit t proportionale Glied verschwinden.

§ 3.

Untersuchung der Newton'schen Potentialfunction $\varphi(r) = Cr^{-1}$.

Bei Zugrundelegung dieser Potentialfunction:

(A.) $$\varphi(r) = Cr^{-1} = \frac{C}{r},$$

lauten unsere Formeln (7) und (9) folgendermassen:

(B.) $$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\Delta V}{\varkappa}, \text{ und } V = C\int \frac{\varepsilon_1 \, d\tau_1}{r} + C\int \frac{\eta_1 \, d\omega_1}{r}.$$

Aus der letzten Formel folgt bekanntlich sofort:

$$\Delta V = - C \cdot 4\pi\varepsilon.$$

Dies in die *erste* Formel (B.) substituirt, giebt:

(C.) $$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - \frac{4\pi C}{\varkappa} \varepsilon;$$

woraus man durch Integration erhält:

(D.) $$\varepsilon = \varepsilon^0 e^{\frac{-4\pi C t}{\varkappa}}.$$

Hier bezeichnet ε^0 den Werth von ε für $t = 0$; und es wird also dieses ε^0 im Allgemeinen als eine beliebig gegebene Function der Coordinaten zu denken sein.

Nun können wir uns (worauf schon mehrfach aufmerksam gemacht wurde) die Constante $\varkappa$, und namentlich auch ihr Vorzeichen ganz nach unserem Belieben gegeben denken. Hiervon Gebrauch machend, wollen wir festsetzen, es solle $\varkappa$ einerlei Vorzeichen haben mit der im Gesetze (A.) enthaltenen Constanten C; sodass der Bruch

$$\frac{C}{\varkappa}$$

positiv ist. Alsdann folgt aus (D.), dass ε mit wachsender Zeit gegen 0 convergirt, und dass also[1]) nach Ablauf einer unendlich langen Zeit ein *Ruhezustand* eintreten muss. Zufolge unseres (in

1) Gegen diesen Schluss würde einzuwenden sein, dass, wenn auch ε zu Null wird, doch vielleicht η in fortdauernder Veränderung begriffen bleiben könnte. Im nächstfolgenden Paragraph werde ich eine *andere* Methode darlegen, die von solchem Bedenken frei ist.

der Einleitung aufgestellten) ersten allgemeinen Satzes wird also mit Bezug auf die durch die Potentialfunction (A.) repräsentirten elektrischen Kräfte ein *Gleichgewichtszustand* existiren, und zwar einerlei, ob die in (A.) enthaltene Constante C positiv oder negativ ist. Wir gelangen so zu bekannten Resultaten.

§ 4.

Weitere Betrachtung der Newton'schen Potentialfunction: $\varphi(r) = Cr^{-1}$, und zwar unter Anwendung einer anderen Methode. Uebergang zu einer viel allgemeineren Potentialfunction.

Die in einem isolirten Conductor enthaltene Elektricität sei, von einem beliebigen Anfangszustande aus, in Bewegung begriffen. Von Neuem wollen wir diese Bewegung untersuchen mittelst unserer in § 1 entwickelten Formeln, und unter Zugrundelegung der Newton'schen Potentialfunction:

$$\varphi(r) = \frac{C}{r}, \tag{1}$$

wo C eine beliebig gegebene Constante sein soll. Nach den Formeln (9), (13), (16) des § 1 ist alsdann:

$$V = C\int\frac{\varepsilon\,d\tau}{r} + C\int\frac{\eta\,d\omega}{r}, \tag{2}$$

$$2\mathrm{P} = \int V\varepsilon\,d\tau + \int V\eta\,d\omega, \tag{3}$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{dt} = -\varkappa\int(u^2 + v^2 + w^2)\,d\tau. \tag{4}$$

Aus (2) folgt sofort:

$$\Delta V = -C\cdot 4\pi\varepsilon. \tag{5}$$

Und zwar wird diese Differentialgleichung gelten für sämmtliche Punkte des ganzen unendlichen Raumes, nämlich sowohl für den Innenraum $\mathfrak{J}$ des gegebenen Conductors, wie auch für seinen Aussenraum $\mathfrak{A}$, falls man nur beachtet, dass die Dichtigkeit ε im Aussenraum $\mathfrak{A}$ (der von einem absolut isolirenden Medium erfüllt zu denken ist) überall $= 0$ ist. Wir bezeichnen den *ganzen unendlichen Raum* kurzweg mit $\mathfrak{T}$, setzen also

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{A} + \mathfrak{J}. \tag{6}$$

Multipliciren wir nun die Gleichung (5) mit $V d\tau$, und integriren wir sodann über sämmtliche Volumelemente $d\tau$ des Raumes $\mathfrak{T}$, so erhalten wir:

$$\int_{\mathfrak{T}} V \Delta V d\tau + 4\pi C \int_{\mathfrak{T}} V \varepsilon d\tau = 0 . \tag{7}$$

Nach bekannten GREEN'schen Formeln ist aber:

$$\int_{\mathfrak{J}} (V \Delta V + \Box V) d\tau = - \int V^j \frac{\partial V^j}{\partial n} d\omega , \tag{λ.}$$

$$\int_{\mathfrak{A}} (V \Delta V + \Box V) d\tau = + \int V^a \frac{\partial V^a}{\partial n} d\omega , \tag{μ.}$$

wo die Integrationen links über die betreffenden Räume $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$, und die Integrationen rechts über die Grenzfläche dieser beiden Räume, d. i. über die Oberfläche des gegebenen Conductors ausgedehnt zu denken sind. Dabei haben ΔV und $\Box V$ die bekannten Bedeutungen:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} ,$$

$$\Box V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 .$$

Ferner bezeichnet $d\omega$ ein Element der Conductoroberfläche, und n die auf $d\omega$ errichtete *innere* Normale. Endlich sind in jenen Formeln (λ.), (μ.) durch die Indices j und a die Werthe kenntlich gemacht, welche respective der *Innen*- und der *Aussen*seite des Elementes $d\omega$ angehören.

Durch Addition der beiden Gleichungen (λ.), (μ.) folgt sofort:

$$\int_{\mathfrak{T}} (V \Delta V + \Box V) d\tau = - \int V \left(\frac{\partial V^j}{\partial n} - \frac{\partial V^a}{\partial n} \right) d\omega , \tag{ν.}$$

denn es ist bekanntlich: $V^j = V^a$. Auch ist, wie man aus (2.) ersieht:

$$\frac{\partial V^j}{\partial n} - \frac{\partial V^a}{\partial n} = - C \cdot 4\pi\eta .$$

Somit geht die Gleichung (ν.) über in:

$$\int_{\mathfrak{T}} (V \Delta V + \Box V) d\tau = 4\pi C \int V \eta d\omega . \tag{ξ.}$$

Substituiren wir nun den aus dieser Gleichnng (ξ.) für das Integral

$$\int_{\mathfrak{T}} V\Delta V d\tau$$

entspringenden Werth in (7), so erhalten wir:

$$(8)\qquad -\int_{\mathfrak{T}} \Box V d\tau + 4\pi C\int V\eta d\omega + 4\pi C\int_{\mathfrak{T}} V\varepsilon d\tau = 0\,,$$

oder mit Rücksicht auf (3.):

$$(9)\qquad -\int_{\mathfrak{T}} \Box V d\tau + 8\pi C\mathsf{P} = 0\,.$$

Hieraus folgt, dass das Product $C\mathsf{P}$ *stets positiv ist.*

Geben wir also der Formel (4) die Gestalt:

$$(10)\qquad \frac{d(C\mathsf{P})}{dt} = -\,C\varkappa\int(u^2 + v^2 + w^2)d\tau\,,$$

und denken wir uns (ebenso wie im vorigen Paragraph) die auxiliare Constante $\varkappa$ positiv oder negativ, jenachdem die gegebene Constante C positiv oder negativ ist, so sind in dieser Formel (10) zwei Grössen

$$F = C\mathsf{P} \text{ und } f = C\varkappa\int(u^2 + v^2 + w^2)d\tau$$

miteinander verbunden, von denen jede *stets positiv* ist. Aus dieser Formel (10), d. i. aus der Formel

$$(10a)\qquad \frac{dF}{dt} = -f$$

folgt daher, dass F in fortdauerndem Sinken begriffen ist. Andererseits aber kann dieses F, weil es stets positiv bleibt, niemals unter 0 herabsinken. Folglich muss F mit wachsender Zeit gegen einen *festen* und zwar *positiven* Grenzwerth convergiren. Sobald F diesen Grenzwerth erreicht hat, muss f nothwendiger Weise $= 0$ geworden sein. Denn andernfalls würde F, der Formel (10a) zufolge, noch weiter sinken; was dem Begriff des festen Grenzwerthes widerspricht.

Wir sehen somit, dass (allerdings vielleicht erst nach Ablauf einer sehr langen Zeit) ein Augenblick eintreten muss, in welchem F zu sinken aufhört, und zugleich $f = 0$ geworden ist. In diesem Augenblicke aber, in welchem die Grösse

$$f = C\varkappa \int (u^2 + v^2 + w^2)\,d\tau$$

$= 0$ geworden ist, werden offenbar die u, v, w ebenfalls allenthalben $= 0$ sein. D. h. in diesem Augenblick wird in der betrachteten elektrischen Bewegung ein *Ruhezustand* eintreten. Hieraus aber folgt, auf Grund unseres (in der Einleitung angegebenen) ersten allgemeinen Satzes, dass für die durch die Potentialfunction (1) repräsentirten Kräfte ein *Gleichgewichtszustand* existirt.

Hiermit sind wir schliesslich zu demselben Resultat gelangt, wie im vorigen Paragraph.

Die gegenwärtige Methode aber hat den grossen Vorzug, dass sie ohne besondere Mühe auf viel allgemeinere Potentialfunctionen, und zugleich auch auf ein System von beliebig vielen Conductoren und Isolatoren anwendbar ist. So z. B. ergiebt sich mittelst dieser Methode, wie ich bei einer späteren Gelegenheit darzulegen gedenke, folgendes Theorem.

Erstes Theorem. — *Es sei gegeben ein System von beliebig vielen festaufgestellten Conductoren und Isolatoren. Jeder Isolator sei (theils in seinem Innern, theils an seiner Oberfläche) mit einer festen elektrischen Vertheilung versehen. Andererseits sei jeder Conductor entweder zur Erde abgeleitet, oder aber isolirt und mit einer gegebenen Elektricitätsmenge geladen.*

Alsdann wird für dieses System, unter Zugrundelegung der Potentialfunction:

$$\varphi(r) = \frac{Ae^{-\alpha r}}{r} + \frac{Be^{-\beta r}}{r} + \frac{Ce^{-\gamma r}}{r} + \cdots, \tag{11}$$

stets ein elektrischer Gleichgewichtszustand existiren, falls nur die Constanten α, β, γ, ... alle positiv, und überdies die Constanten A, B, C, ... alle von einerlei Vorzeichen sind.

Auch kann man, unter Anwendung der in diesem Aufsatz von mir angegebenen Hülfsmittel, mit ziemlicher Leichtigkeit zu folgendem zweiten Theorem gelangen:

Zweites Theorem. — *Man halte fest an den Vorstellungen des vorhergehenden Theorems.*

Alsdann wird für das betrachtete System, unter Zugrundelegung der Potentialfunction:

$$\varphi(r) = \frac{Ae^{-\alpha r}}{r} + \frac{Be^{-\beta r}}{r} + \frac{Ce^{-\gamma r}}{r} + \cdots, \tag{12}$$

stets nur ein einziger elektrischer Gleichgewichtszustand möglich sein, — wiederum vorausgesetzt, dass die Constanten α, β, γ, ... alle positiv, und die Constanten A, B, C, ... alle von einerlei Vorzeichen sind.

Diese beiden Theoreme bilden den eigentlichen Hauptgegenstand meiner Mittheilung. Und die vorangeschickten Expositionen dürften über den Weg, auf welchem man zu diesen Theoremen gelangen kann, eine ungefähre Vorstellung zu geben geeignet sein.

G. Scheffers, *Eine Abbildung der Geraden des Raumes in der Ebene.*

Uebertragungsprincipe, insbesondere Abbildungen, erweisen sich häufig als nützlich, wenn es sich darum handelt, aus schon bekannten Sätzen, die sich auf ein betimmtes Gebiet der Mathematik beziehen, neue Sätze abzuleiten, die sich auf ein anderes Gebiet beziehen, das gerade erforscht werden soll. Dass die Punkt- und Berührungstransformationen in dieser Weise eine äusserst wichtige Rolle spielen, ist namentlich aus den Untersuchungen Lie's, die zu vielen vorher unbekannten Beziehungen zwischen scheinbar ganz heterogenen Gebieten geführt haben, längst bekannt.

Man könnte selbstverständlich den Transformationsbegriff ohne weiteres verallgemeinern, man könnte anstelle der Punkt- und Berührungstransformationen solche Operationen betrachten, die irgend eine vorgelegte Mannigfaltigkeit von Objecten in eine andere Mannigfaltigkeit von Objecten überführen. Es wäre aber gewiss nicht angebracht, solche Operationen ganz willkürlich auszuwählen. Eine innere Berechtigung wird man ihnen vielmehr erst dann zugestehen, wenn ihre Anwendung aus verhältnissmässig einfachen Beziehungen zwischen den Objecten der einen Mannigfaltigkeit wiederum einfache Beziehungen zwischen den Objecten der anderen Mannigfaltigkeit liefert. In der That weist die Mathematik eine grosse Anzahl derartiger Uebertragungsprincipe auf, die gerade diese Bedingung erfüllen und sich infolge dessen nützlich gezeigt haben. Es soll aber hier nicht näher auf dieselben eingegangen werden.

Die soeben gemachten allgemeinen Bemerkungen sollen vielmehr nur dazu dienen, einer ganz speciellen Abbildungsmethode, die im Folgenden besprochen wird, ihre Daseinsberechtigung zu sichern. Diese Methode besteht darin, dass jeder Geraden im Raume in gewisser Weise ein Punktepaar und sodann in zweiter Linie ein Geradenpaar in der Ebene zugeordnet wird und umgekehrt. Eine solche Zuordnung würde keinen sonderlichen Werth haben, wenn sich nicht zeigte, dass sie in der That aus einfachen Beziehungen zwischen den Geraden des Raumes einfache Beziehungen zwischen den Geradenpaaren der Ebene abzuleiten gestattet. Die hier zu besprechende Abbildung ist, wie gesagt, sehr specieller Art. Es scheint aber, dass ihre Anwendung namentlich für die Theorie des tetraedralen Complexes Nutzen gewährt. Es zeigt sich nämlich, dass bei der Abbildung alle Geraden eines tetraedralen Complexes in solche Geradenpaare der Ebene übergehen, die einen constanten Winkel bilden.

Leider muss ich mich darauf beschränken, hier nur in aller Kürze diese Abbildung zu besprechen. Ich behalte mir vor, bei anderer Gelegenheit darauf zurückzukommen.

Eine Gerade im Raume ist durch vier wesentliche Coordinaten bestimmt. Dasselbe gilt von einem Punktepaar in der Ebene oder von einem Geradenpaar in der Ebene. Daraus folgt, dass sich die ∞^4 Geraden des Raumes ein-eindeutig auf die ∞^4 Punktepaare oder auch auf die ∞^4 Geradenpaare der Ebene beziehen lassen. Obgleich wir die späteren Ergebnisse auch bei Zugrundelegung allgemeinerer Abbildungsarten ableiten könnten, wollen wir doch diese Abbildungen in folgender specieller Weise bewirken:

Es seien x, y, z gewöhnliche rechtwinklige Punktcoordinaten. Eine beliebige Gerade

$$x = rz + \varrho, \quad y = sz + \sigma \tag{1}$$

schneidet die Ebene $z = 0$ im Punkte $x = \varrho$, $y = \sigma$ und die zu dieser Ebene parallele Ebene $z = 1$ im Punkte $x = r + \varrho$, $y = s + \sigma$. Projicieren wir letzteren Punkt auf die erstere Ebene $z = 0$, so haben wir also aus den Gleichungen (1) einer Geraden die Coordinaten zweier Punkte

$$(2) \qquad x = \varrho,\ y = \sigma \text{ und } x = r + \varrho,\ y = s + \sigma$$

in der Ebene $z = 0$ abgeleitet. Sind umgekehrt diese beiden Punkte gegeben, so ist damit auch die Gerade (1) völlig bestimmt, wie man sowohl analytisch wie geometrisch sofort erkennt.

Wir haben somit eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Geraden (1) *des Raumes und den Punktepaaren* (2) *der Ebene hergestellt.* Diese Beziehung ist natürlich nicht neu, sie wird z. B. in der darstellenden Geometrie gelegentlich benutzt.

Wollen wir nun aber die Gerade (1) ein-eindeutig auf die Geradenpaare der Ebene $z = 0$ beziehen, so können wir dies erreichen, wenn wir nachträglich in der Ebene $z = 0$ eine Dualität ausüben, also etwa jedem Punkt seine Polare hinsichtlich eines gegebenen Kegelschnittes zuordnen, so dass das Punktepaar (2) in ein Geradenpaar übergeht. Diese Transformation durch reciproke Polaren wählen wir so, dass bei ihr die x-Axe und die y-Axe in die imaginären unendlich fernen Kreispunkte der Ebene $z = 0$ übergehen, indem wir den Kegelschnitt

$$(3) \qquad x^2 + 2ixy + y^2 = 1$$

zu Grunde legen. Die beiden Punkte (2) haben in Bezug auf diesen Kegelschnitt die Polaren

$$(\varrho + i\sigma)\,x + (i\varrho + \sigma)\,y = 1,$$

$$(r + \varrho + i(s + \sigma))x + (i(r + \varrho) + s + \sigma)y = 1.$$

Wenn wir nun in der Ebene $z = 0$ unter u, v die Liniencoordinaten der Geraden

$$ux + vy + 1 = 0$$

verstehen, so sehen wir, dass das Punktepaar (2) bei der Transformation durch reciproke Polaren in das Geradenpaar übergeht:

$$(4) \qquad \begin{cases} u = -\varrho - i\sigma, \quad v = -i\varrho - \sigma \qquad \text{und} \\ u = -r - \varrho - i(s + \sigma), \quad v = -i(r + \varrho) - s - \sigma. \end{cases}$$

Somit ist jetzt jeder Geraden (1) *des Raumes ein Geradenpaar* (4) *in der Ebene* $z = 0$ *zugeordnet, und diese Zuordnung ist ein-eindeutig.*

Im Folgenden sollen, wenn g eine Gerade (1) des Raumes darstellt, die Punkte des Punktepaares (2) mit G_1, G_2 und die Geraden des Geradenpaares (4) mit $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ bezeichnet werden. Es ist zu beachten, dass bei den beiden Abbildungen die Reihenfolge der beiden Punkte bezw. Geraden wesentlich ist. Wir unterscheiden daher jedesmal einen *Anfangs- und Endpunkt bezw. eine Anfangs- und Endgerade des Paares.* Es ist ferner zu beachten, dass die unendlich ferne Gerade der Ebene $z = 0$ bei der angewandten Transformation durch reciproke Polaren in den Anfangspunkt O übergeht. Als *Scheitel eines Geradenpaares* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ bezeichnen wir den Schnittpunkt von $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$.

Eine erste Frage ist nun die, wie die Bilder zweier Geraden beschaffen sind, wenn die Geraden einander schneiden. Wenn zwei Geraden g, h im Raume einander schneiden, so liegen die Punktepaare G_1, G_2 und H_1, H_2 offenbar so, dass $G_1 H_1 \parallel G_2 H_2$ ist. Bei der angewandten Dualität gehen G_1, G_2, H_1, H_2 in $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ über, die Gerade $G_1 H_1$ wird zum Schnittpunkt von $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{h}_1$ und die Gerade $G_2 H_2$ zum Schnittpunkt von $\mathfrak{g}_2$ und $\mathfrak{h}_2$. Da die beiden Geraden $G_1 H_1$ und $G_2 H_2$ einen unendlich fernen Punkt gemein haben sollen, aber die unendlich ferne Gerade in O übergeht, so ergiebt sich, dass für das Schneiden zweier Graden im Raume das folgende Kriterium bei der Abbildung als Geradenpaare gilt:

Zwei Geraden g, h im Raume schneiden sich dann und nur dann, wenn ihre Bild-Geraden $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$; $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ so liegen, dass der Schnittpunkt der beiden Anfangsgeraden $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}_1$ mit dem Schnittpunkt der beiden Endgeraden $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{h}_2$ auf einer Geraden durch O liegt.

Fassen wir ferner alle Geraden in einer Ebene des Raumes ins Auge, so finden wir:

Allen Geraden einer Ebene entsprechen alle die Geradenpaare in der Bildebene, deren Anfangsgeraden durch einen bestimmten Punkt gehen, und deren Endgeraden ebenfalls durch einen bestimmten Punkt gehen. Diese beiden Punkte sind nur der einen Beschränkung unterworfen, dass ihre verbindende Gerade durch O gehen muss.

Wir können also sagen: *Das Bild einer Ebene ist ein Punktepaar, das auf einer Geraden durch O liegt.*

Ferner ergiebt sich:

Allen Geraden durch einen Punkt des Raumes entsprechen

alle die Geradenpaare $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ *in der Ebene, die zwei parallele feste Geraden jedesmal in Punkten* P_1, P_2 *derart schneiden, dass* $OP_1 \parallel \mathfrak{g}_2$ *und* $OP_2 \parallel \mathfrak{g}_1$ *ist.*

Das Bild eines Punktes des Raumes ist mithin ein Paar von Parallelgeraden.

Eine Schar von ∞^1 Geraden des Raumes, also eine Regelfläche, stellt sich dar als eine Schar von ∞^1 Geradenpaaren in der Ebene. Soll die Fläche insbesondere eine abwickelbare sein, so müssen je zwei unendlich benachbarte Geradenpaare der Schar die oben aufgestellte Bedingung des Schneidens erfüllen. Ist dies der Fall, so stellen sie zugleich das Bild einer Raumcurve, der Rückkehrcurve der abwickelbaren Fläche, dar. Da die Anfangsgeraden der ∞^1 Geradenpaare eine Curve umhüllen werden und ebenso die Endgeraden, so folgt also:

Allen Tangenten einer Raumcurve entsprechen alle diejenigen Tangentenpaare $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ *an ein Curvenpaar* c_1, c_2 *in der Ebene, die in Punkten berühren, die jedesmal auf einer Geraden durch O liegen.*

Eine Raumcurve wird also im Allgemeinen eindeutig als Curvenpaar in der Ebene abgebildet. Ist die Raumcurve in einer Ebene gelegen, so reduciren sich nach dem Obigen die beiden Curven c_1, c_2 auf Punkte und es folgt:

Allen Tangenten einer im Raume gelegenen ebenen Curve entsprechen ∞^1 *Geradenpaare, deren Anfangsgeraden durch einen bestimmten Punkt* P_1 *gehen und deren Endgeraden ebenfalls durch einen bestimmten Punkt* P_2 *gehen. Diese beiden Punkte sind nur der einen Beschränkung unterworfen, dass ihre Verbindende durch O gehen muss.*

Jedes Geradenpaar $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ hat einen Schnittpunkt, den wir oben als Scheitel bezeichnet haben. Bei der soeben besprochenen Abbildung der Tangenten einer ebenen Curve liegen ∞^1 solche Schnittpunkte vor. Sie werden eine Curve C bilden. Also können wir auch sagen:

Jede im Raume gelegene ebene Curve wird eindeutig abgebildet durch den Inbegriff einer Curve C und zweier Punkte P_1, P_2, *die mit O auf einer Geraden liegen.*

Uebrigens ist es nicht schwer zu beweisen, dass hierbei *die Curve C von* m^{ter} *Ordnung und* n^{ter} *Classe ist, sobald die gegebene Curve von* n^{ter} *Ordnung und* m^{ter} *Classe ist.* Insbesondere folgt also:

Jeder im Raume gelegene Kegelschnitt wird eindeutig abgebildet als der Inbegriff eines Kegelschnittes und eines solchen Punktepaares, das mit O auf einer Geraden liegt. In der Ebene giebt es ∞^5 Kegelschnitte und ∞^3 derartige Punktepaare, also ∞^8 Kegelschnitte, verknüpft mit solchen Punktepaaren. Damit steht im Einklang, dass es im Raume ∞^8 Kegelschnitte giebt.

Ein Liniencomplex wird durch ∞^3 Geradenpaare abgebildet. Soll der Complex vom n^{ten} Grade sein, so müssen die Geraden des Complexes, die in einer beliebigen Ebene liegen, eine Curve n^{ter} Classe umhüllen. Nach dem Vorhergehenden ergiebt sich also:

Ein Liniencomplex n^{ten} Grades wird derart abgebildet als eine Schar von ∞^3 Geradenpaaren, dass der Ort der Scheitel derjenigen Geradenpaare, die durch zwei mit O auf gerader Linie gelegene Punkte gehen, stets eine Curve n^{ter} Ordnung ist.

Jeder lineare Complex wird also durch ∞^3 Geradenpaare repräsentirt, die so liegen, dass die Scheitel der Geradenpaare, die durch zwei mit O auf gerader Linie gelegene Punkte gehen, stets eine Gerade bilden.

Betrachten wir insbesondere einen *tetraedralen Liniencomplex.* Ein solcher besteht bekanntlich aus allen ∞^3 Geraden, die ein gegebenes Tetraeder in constantem Doppelverhältniss schneiden, und zu jedem Tetraeder gehören mithin ∞^1 tetraedrale Complexe. Das Tetraeder können wir in bestimmter Weise wählen. Aus den Complexen, die diesem Tetraeder zugehören, lassen sich ja alle tetraedrale Complexe durch projective Transformation ableiten. Wir wählen als die Ebenen des Tetraeders die Ebenen $z = 0$ und $z = 1$ sowie die Ebenen $x = 0$ und $y = 0$. Das Doppelverhältniss der vier Punkte, in denen eine beliebige Gerade g die Tetraederebenen schneidet, ist gleich dem Doppelverhältniss der vier Punkte, die durch Projection dieser Punkte auf die Ebene $z = 0$ hervorgehen. Zwei dieser Punkte sind die Punkte G_1, G_2, die beiden anderen die Schnittpunkte der Geraden $G_1 G_2$ mit den Coordinatenaxen in der Ebene $z = 0$. Bei der Dualität gehen nun diese Coordinatenaxen in die imaginären unendlich fernen Kreispunkte über, während das Punktepaar G_1, G_2 in ein Geradenpaar $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ verwandelt wird. Das Doppelverhältniss wird also gleich dem Doppelverhältniss der Geraden $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ und der beiden Minimalgeraden, die durch den Scheitel von $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ gehen. Dieses

Doppelverhältniss ist aber bekanntlich eine Function des Winkels der Geraden $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$. Daraus folgt:

Jeder der ∞^1 *tetraedralen Complexe, die zu dem gewählten Tetraeder gehören, bildet sich ab als die Gesammtheit aller der Geradenpaare* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ *der Ebene, die einen constanten Winkel bilden.*

Insbesondere ergeben sich rechte Winkel, wenn das Doppelverhältniss harmonisch ist. Aus dem dem Obigen folgt ferner:

Der Kegelschnitt, den die Geraden eines tetraedralen Complexes in einer Ebene umhüllen, bildet sich ab als ein Kreis mit einem darauf markirten Punktepaar P_1, P_2, *das mit* O *auf einer Geraden liegt.* Die Complexgeraden in der gewählten Ebene bilden sich nämlich ab als die Geradenpaare, deren Scheitel auf diesem Kreise liegen und die durch P_1, P_2 gehen.

Es giebt bekannntlich eine dreigliedrige projective Gruppe, die das gewählte Tetraeder invariant lässt und mithin auch jeden der ∞^1 tetraedralen Complexe in sich überführt. Es fragt sich, was für eine Gruppe von Transformationen dieser Gruppe bei der Abbildung in der Ebene entspricht. Dabei ist zu beachten, dass diese Transformationen in der Bildebene nicht nothwendig Punkt- oder Geraden- oder Berührungs-Transformationen sein werden. Da nämlich die projectiven Transformationen des Raumes jede Gerade in eine Gerade überführen, so führen die entsprechenden Transformationen in der Bildebene jedes Geradenpaar in ein Geradenpaar über. Diese Transformationen sind also nur insofern Transformationen in der Bildebene, als man die ∞^4 Geradenpaare der Ebene als die Elemente der Ebene auffasst. Da nun eine projective Transformation des Raumes definirt werden kann als eine Transformation, die jede Gerade in eine Gerade und einander schneidende Geraden in ebensolche verwandelt, so folgt:

Einer projectiven Transformation des Raumes entspricht eine solche Transformation der Geradenpaare in der Ebene, der gegenüber das oben, S. 204, aufgestellte Kriterium des Schneidens invariant ist.

Eine projective Transformation des Raumes, die das gewählte Tetraeder invariant lässt, stellt sich im Bilde als eine solche Transformation der soeben erwähnten Art dar, die jedes Geradenpaar in ein derartiges Geradenpaar verwandelt, das denselben Winkel hat wie das ursprüngliche. Man findet, dass

der allgemeinsten projectiven Transformation des Raumes, die das Tetraeder invariant lässt, in der Bildebene folgende Transformation entspricht:

Von O aus werden die Anfangsgeraden aller Paare vermöge einer Streckung der Ebene (Aehnlichkeitstransformation, bei der O festbleibt) in parallele Geraden verschoben. Dasselbe geschieht mit den Endgeraden aller Paare, aber hier kann die Streckung eine andere sein. Schliesslich werden die transformirten Geradenpaare einer beliebigen Rotation um O unterworfen.

Betrachten wir ferner eine Curve eines unserer tetraedralen Complexe. Nach dem Früheren ergiebt sich:

Eine Curve eines unserer tetraedralen Complexe bildet sich als ein Curvenpaar c_1, c_2 von der Beschaffenheit ab, dass die Curventangenten in den Punkten, in denen ein Strahl von O aus die Curven trifft, einen constanten Winkel einschliessen.

Wir brechen hiermit diese gedrängte Uebersicht über die Beziehungen zwischen dem Raume und der Ebene bei der vorliegenden Abbildung ab, indem wir nur andeuten, dass z. B. den Transformationen der Ebene, die jeden Winkel in einen Winkel derselben Grösse überführen, interessante Transformationen der Geraden des Raumes entsprechen, die jeden unserer tetraedralen Complexe in sich verwandeln. Wie man weiss, steht der tetraedrale Complex in naher Beziehung zu einem System confocaler Flächen zweiten Grades, indem er nämlich aus allen Normalen dieser Flächen besteht. Da jede Fläche zweiten Grades zwei Scharen von ebenen Erzeugenden enthält, und da letztere durch unsere Abbildung als Geradenpaare dargestellt werden können, so fragt es sich, welche Scharen von Geradenpaaren jenen Flächen zweiten Grades entsprechen. Man findet, dass sich diese Flächen gewissermassen als Paare von gleichseitigen Hyperbeln abbilden, von denen die Hyperbeln jedes Paares gemeinsame Asymptoten durch O haben, aber um einen Rechten gegen einander gedreht erscheinen.

Doch würde auf diese und andere Punkte bei anderer Gelegenheit genauer einzugehen sein.

Sophus Lie, *Bestimmung aller Flächen, die eine continuirliche Schaar von projectiven Transformationen gestatten.*

Es ist eine altbekannte Thatsache, dass eine allgemeine Fläche zweiten Grades des gewöhnlichen Raumes ∞^6 projective Transformationen gestattet, die in zwei Schaaren zerfallen; ebenso dass jeder Kegel zweiten Grades ∞^7 derartige Transformationen zulässt. Es ist ferner längst bekannt, dass es noch weitere Flächen giebt, die unendlich viele projective Transformationen gestatten. Dies ist ja insbesondere der Fall mit der Ebene, der Developpablen einer gewundenen Curve dritter Ordnung, endlich auch mit allen Regelflächen.

Nachdem ich in den Jahren 1869—70 die allgemeinen Begriffe infinitesimale Transformation und eingliedrige Gruppe entwickelt hatte, war die Bestimmung aller Flächen, die unendlich viele Transformationen einer gegebenen continuirlichen Gruppe G gestatten, implicite geleistet. Denn jede derartige Fläche gestattet eo ipso alle Transformationen einer gewissen eingliedrigen Untergruppe g und ist somit von den zugehörigen Bahncurven erzeugt.

Mit dieser Bemerkung war die Bestimmung aller Flächen geleistet, die ∞^1 Transformationen der betreffenden Gruppe G gestattet. Wünscht man nun unter ihnen, insbesondere alle herauszugreifen, die mehr als ∞^1 etwa ∞^q Transformationen der Gruppe G gestatten, so ist es von vornherein klar, dass die betreffenden ∞^q Transformationen eine q-gliedrige Untergruppe g_q bilden, und dass somit das neue Problem sich unmittelbar erledigen lässt, sobald alle q-gliedrigen Untergruppen g_q der vorgelegten Gruppe G gefunden sind. Nun aber gab ich schon in meinen ersten Publicationen [1]) über die allgemeine Theorie der

1) Gött. Nachr. Decbr. 1874; Archiv for Math. Bd. I, 1876, Christiania.

endlichen continuirlichen Gruppen die allgemeingültige Bestimmung aller continuirlichen Untergruppen jeder endlichen continuirlichen Gruppe. Hiermit war eo ipso auch die Bestimmung aller Mannigfaltigkeiten des Raumes, die eine continuirliche Schaar von Transformationen einer gegebenen endlichen continuirlichen Gruppe gestatten, *principiell* erledigt.

Will man diese allgemeine Theorie für eine bestimmte Gruppe G im Einzelnen durchführen, so muss man gewisse Rechnungen ausführen, die oft recht umständlich sein können, wenn sie auch immer »*ausführbar*« sind, sobald die *endlichen* Transformationen der gewählten Gruppe G von vornherein bekannt sind.

Ganz besonders wichtig ist nun die Bestimmung aller Flächen im Raume $x\,y\,z$, die eine continuirliche Schaar von *projectiven* Transformationen gestatten. Dieses allgemeine Problem erledigte ich im Jahre 1882 in einer Abhandlung, die im Norwegischen Archiv erschien; der Inhalt dieser Arbeit ist sodann ohne wesentliche Aenderung reproducirt im dritten Abschnitt meiner Theorie der Transformationsgruppen. An diesen beiden Stellen zählte ich alle Flächen auf, die mehr als ∞^2 projective Transformationen gestatten. Ich zeigte ferner, dass bei der Bestimmung aller Flächen mit ∞^2 projectiven Transformationen *vier* verschiedene Fälle denkbar sind, dass aber zwei unter diesen Fällen nur solche Flächen liefern, die mehr als ∞^2 projective Transformationen gestatten.

Ich fand es bei jener Gelegenheit nicht nothwendig, meine Erledigung der beiden übrigen Fälle *im Detail* zu veröffentlichen. Ich beschränkte mich auf die Bemerkung, dass man die betreffenden Flächen findet, indem man alle *transitiven zweigliedrigen* linearen Gruppen

$$X_1 f = \sum_{i,k}^{1,2,3} a_{ik}\, x_i\, p_k + A p_1 + B p_2 + C p_3$$

$$X_2 f = \sum_{i,k}^{1,2,3} b_{ik}\, x_i\, p_k + L p_1 + M p_2 + N p_3$$

aufstellt und die Lösung des vollständigen Systems

$$X_1 f = 0\,, \quad X_2 f = 0$$

gleich einer willkürlichen Constanten setzt.

Ich fügte hierzu die Bemerkung, dass die linearen *homogenen* Transformationen

$$\overline{X}_1 f = \sum_{i,k}^{1,2,3} a_{ik}\, x_i\, p_k\,, \quad \overline{X}_2 f = \sum_{i,k}^{1,2,3} b_{ik}\, x_i\, p_k$$

eine zweigliedrige Gruppe bestimmen und zeigte andererseits, dass alle derartigen Gruppen $X_1 f\ \overline{X}_2 f$ auf *vierzehn* von mir bestimmte kanonische Formen gebracht werden können.

Hiermit war also die Bestimmung der nicht hingeschriebenen Flächen mit gerade ∞^2 projectiven Transformationen von mir auf die Integration gewisser vollständiger Systeme mit zwei *linearen* Gleichungen

$$X_1 f = 0\,, \quad X_2 f = 0$$

zurückgeführt.

Ich glaubte damals, dass eine mehr detaillirte Ausführung dieser Theorie von meiner Seite unnothwendig sei. *Denn was noch übrig blieb, waren elementare Rechnungen, die jeder tüchtige Student im fünften Semester durchführen konnte*[1]. Da ich nun aber in Erfahrung bringe, dass schon mehrere Mathematiker ohne Erfolg versucht haben, die fehlenden Rechnungen durchzuführen, da es auf der anderen Seite bei der Behandlung vieler Probleme nothwendig oder jedenfalls nützlich ist, alle Flächen mit unendlich vielen projectiven Transformationen zu kennen, so sehe ich mich jetzt dazu veranlasst, meine Bestimmung aller derartigen Flächen in extenso zu veröffentlichen.

Ich versuche dabei die Rechnungen in solcher Weise zu arrangiren, dass solche Leser, die mit der bisherigen Theorie der Differentialgleichungen wenig vertraut sind, meine Rechnungen verstehen resp. *controlliren* können. Denn das möchte ich ein für alle mal betonen, dass für mich die Entwickelung neuer Methoden und Theorien die Hauptsache ist. Wenn ich

---

1) Zu einigen kritischen Bemerkungen des Herrn F. MEYER muss ich antworten, dass bei der Abfassung meiner Werke u. a. die Voraussetzung vorlag, dass meine Leser jedenfalls D'ALEMBERT's Integration von gewöhnlichen *linearen* Differentialgleichungen *erster* Ordnung mit *constanten* Coefficienten kennen. Eine Popularisirung meiner Theorien, die auf Leser berechnet ist, die nicht einmal derartige elementare Kenntnisse besitzen, erscheint mir unberechtigt.

gelegentlich zeige, dass Probleme, die früher jedenfalls nicht ganz einfach waren, bei der Verwerthung meiner Methoden sich leicht erledigen lassen, so ist es immer mein Hauptzweck, die Tragweite meiner Theorien klar zu stellen. Dabei kann es wohl vorkommen, dass ich, nachdem ich gezeigt habe, dass es bei der Erledigung eines Problems zweckmässig ist, etwa *fünfzig* verschiedene Unterfälle für sich zu behandeln, hinterher vergesse, einen unter diesen Fällen durchzunehmen. Will man absolut sicher sein, alle Möglichkeiten berücksichtigt zu haben, so muss man eine unverhältnissmässig grosse Zeit verwenden, die ich glaube besser anwenden zu können.

Dies als eine allgemeine persönliche Bemerkung, die insbesondere erklären soll, warum ich mich im Allgemeinen auf die Darstellung meiner *allgemeinen* Theorien beschränke. Im vorliegenden Falle glaube ich allerdings garantiren zu können, nicht allein dass die angewandten Methoden richtig und zweckmässig sind, sondern auch, dass alle Fälle berücksichtigt sind.

Ich resumire zuerst meine an den angegebenen Stellen veröffentlichte Bestimmung aller Flächen mit mehr als ∞^2 projectiven Transformationen.

Sodann bestimme ich in Kapitel 1 alle Flächen mit gerade ∞^2 projectiven Transformationen, die nicht alle paarweise vertauschbar sind. Ich finde *sieben* derartige Flächentypen, unter denen vier gar keine willkürliche Constante enthalten, während in den drei anderen Fällen jedesmal eine willkürliche Constante auftritt.

In Kapitel 2 bestimme ich die noch fehlenden Flächen mit gerade ∞^2 projectiven Transformationen; diese Flächen lassen sich in einfachster Weise dadurch charakterisiren, dass sie eine *mehrgliedrige* continuirliche projective Gruppe gestatten, und dass dabei diese Gruppe *nur* solche Transformationen enthält, die paarweise vertauschbar sind. Es gilt nämlich, wie schon meine ersten hierher gehörigen Untersuchungen zeigen, der beachtenswerthe Satz, dass, wenn eine Fläche nur solche projective Transformationen gestattet, die paarweise vertauschbar sind, dass dann die Anzahl dieser Transformationen nie ∞^2 übersteigt. Dabei ist selbstredend zu beachten, dass wir voraussetzen, dass die betreffenden Transformationen keine *discontinuirliche* Gruppe bilden. Man kann ja z. B. Flächen con-

struiren, die eine discontinuirliche Gruppe von ∞^6 Translationen gestatten[1]).

Endlich bringe ich *der Vollständigkeit wegen* im Kapitel 3 alle infinitesimalen projectiven Transformationen auf kanonische Formen und bestimme gleichzeitig die zugehörigen Bahncurven, sowie die zugehörigen invarianten Flächen.

Wenn eine Fläche des Raumes xyz mehr als ∞^2 projective Transformationen gestattet, so ist sie, wie wir gezeigt haben, immer eine *Regelfläche* und zwar

entweder eine allgemeine *Fläche zweiten Grades* mit ∞^6 projectiven Transformationen (die in zwei getrennte Schaaren zerfallen),

oder eine *Cayley'sche Regelfläche dritten Grades* mit ∞^3 projectiven Transformationen,

oder die *Developpable einer gewundenen Curve dritter Ordnung* mit ∞^3 projectiven Transformationen,

oder ein *Kegel zweiten Grades* mit ∞^7 projectiven Transformationen,

oder ein *Kegel*, dessen dualistische Figur eine ebene Curve ist, die durch die beiden Gleichungen $z = 0$, $y = Ax^m$, oder durch die Gleichungen $z = 0$, $y = Ae^x$ dargestellt werden kann. Ein solcher Kegel gestattet ∞^5 projective Transformationen,

oder ein *Kegel*, der von den schon genannten Kegeln verschieden ist, und somit nur ∞^4 projective Transformationen gestattet,

oder endlich eine Ebene mit ∞^{12} projectiven Transformationen.

In dieser Arbeit bestimmen wir zunächst alle Flächen, die gerade ∞^2 projective infinitesimale Transformationen gestatten.

---

1) Sind etwa $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$ $\varphi_3(x)$ drei unabhängige Abel'sche Integrale erster Gattung, die zu einer allgemeinen Curve *vierter* Ordnung gehören, so bestimmen drei Gleichungen von der Form:

$$\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x_1) + \varphi_k(x_2) + \varphi_k(x_3)$$

eine Punkttransformation zwischen den Räumen $x_1\, x_2\, x_3$ und $\mathfrak{x}_1\, \mathfrak{x}_2\, \mathfrak{x}_3$, die für die Theorie der Abel'schen Functionen wichtig ist. In meinen Vorlesungen über Translationsflächen beschäftigte ich mich eingehend mit dieser Transformation, sowie den entsprechenden Beziehungen im Raume $x_1\, x_2 \ldots x_n$.

Diese Transformationen bilden eo ipso eine zweigliedrige Gruppe mit zwei unabhängigen infinitesimalen Transformationen

$$X_1 f \text{ und } X_2 f,$$

die entweder die Relation

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = X_1 f$$

oder aber die Relation

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = 0$$

erfüllen. Da in beiden Fällen (mindestens) eine Ebene invariant bleibt, die wir ins Unendliche verlegen können, so dürfen wir annehmen, dass $X_1 f$ und $X_2 f$ *linear* sind. Wir müssen dabei erinnern, dass weder $X_1 f$ noch $X_2 f$ die Form

$$a(xp + yq + zr) + bp + cq + dr$$

besitzen kann; sonst wäre nämlich die betreffende Fläche ein Kegel oder Cylinder und gestattete in Folge dessen mindestens ∞^4 projective Transformationen.

Kapitel I.

Bestimmung aller Flächen mit ∞^2 projectiven Transformationen, die nicht sämmtlich paarweise vertauschbar sind.

Wir bestimmen in diesem Kapitel alle Flächen, die zwei und nur zwei infinitesimale projective Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ gestatten, die die Bedingungsgleichung:

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = X_1 f$$

erfüllen. Nach dem Vorhergehenden können wir dabei ohne Beschränkung annehmen, dass $X_1 f$ und $X_2 f$ *linear* sind.

Besitzen $X_1 f$ und $X_2 f$ die Form

$$X_k f = (a_{k1} x + b_{k1} y + c_{k1} z) p + (a_{k2} x + b_{k2} y + c_{k2} z) q + (a_{k3} x + b_{k3} y + c_{k3} z) r + a_k p + b_k q + c_k r,$$

so erfüllen die entsprechenden linearen *homogenen* Transformationen

$$\overline{X}_k f = (a_{k1} x + b_{k1} y + c_{k1} z) p + (a_{k2} x + b_{k2} y + c_{k2} z) q + (a_{k3} x + b_{k3} y + c_{k3} z) r$$

eo ipso die Relation

$$\overline{X_1}\,\overline{X_2}f - \overline{X_2}\,\overline{X_1}f = \overline{X_1}f$$

und erzeugen somit ihrerseits eine Gruppe, die unter den gemachten Voraussetzungen sicher *zweigliedrig* ist. In älteren Arbeiten habe ich nun gezeigt, dass alle zweigliedrige lineare homogene Gruppen $\overline{X_1}f\,\overline{X_2}f$ auf eine unter den *vier* folgenden *kanonischen Formen* gebracht werden können:

$$zp + xq, \quad yq - zr + \alpha U$$

$$zq, \quad xp + (x + y)q + \alpha U$$

$$zq, \quad zp + yq + \alpha U$$

$$zq, \quad \alpha xp + (\gamma + 1)yq + \gamma zr$$

wo zur Abkürzung U statt $xp + yq + zr$ gesetzt ist.

Wir ertheilen also $\overline{X_1}f$ und $\overline{X_2}f$ nach und nach die hier aufgestellten Formen und addiren jedesmal zu $\overline{X_1}f$ resp. $\overline{X_2}f$ einen Ausdruck nullter Ordnung

$$Lp + Mq + Nr.$$

Sodann versuchen wir, die hierdurch erhaltenen infinitesimalen Transformationen X_1f und X_2f durch passende Coordinatenwahl auf möglichst einfache Formen zu bringen. Nachdem in dieser Weise unsere linearen Gruppen X_1f, X_2f auf kanonische Formen gebracht sind, bestimmen wir die zugehörigen invarianten Flächen, und schliessen selbstverständlich unter ihnen alle aus, die mehr als ∞^2 projective Transformationen gestatten.

§ 1.

Wir ertheilen X_1f und X_2f die Form

$$X_1f = zp + xq + Ap + Bq + Cr$$
$$X_2f = yq - zr + \alpha U + Lp + Mq + Nr;$$

indem wir sodann $z + A$ als neues z und $x + B$ als neues x einführen, sehen wir, dass wir ohne Beschränkung

$$A = 0, \quad B = 0$$

und dementsprechend

$$X_1 f = zp + xq + Cr$$
$$X_2 f = yq - zr + \alpha U + Lp + Mq + Nr$$

setzen können. Sodann bilden wir die Relation:

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = X_1 f,$$

oder durch Ausführung:

$$zp + xq + C(\alpha - 1)r - Np - Lq = zp + xq + Cr.$$

Diese Relation zerlegt sich in die drei Gleichungen

$$(1) \qquad N = 0\,, \quad L = 0\,, \quad C(\alpha - 2) = 0\,,$$

die uns zeigen, dass es naturgemäss ist, die beiden Annahmen: $C \neq 0$ und $C = 0$ gesondert zu behandeln.

Der Fall: $C \neq 0$.

Wenn wir zunächst annehmen, dass C von Null verschieden und in Folge dessen $\alpha = 2$ ist, können wir ohne Beschränkung $C = 1$ setzen. Es leuchtet ferner ein, dass wir M den Werth Null ertheilen können, sodass $X_1 f$ und $X_2 f$ die Form erhalten:

$$X_1 f = r + zp + xq$$
$$X_2 f = zr + 2xp + 3yq\,.$$

Suchen wir nun alle Flächen, die diese zweigliedrige Gruppe gestatten, so überzeugen wir uns zunächst bei Bildung der Matrix

$$\begin{vmatrix} 1 & z & x \\ z & 2x & 3y \end{vmatrix}$$

davon, dass die zweireihigen Determinanten nur für alle Punkte der gewundenen Curve dritter Ordnung

$$2x - z^2 = 0\,, \quad 3y - xz = 0$$

verschwinden. Es giebt in Folge dessen keine (im Endlichen gelegene) invariante Fläche, deren Punkte sämmtlich in Ruhe bleiben oder aber nur Curven beschreiben. Nach meinen allmeinen Regeln finden wir daher alle im Endlichen gelegenen invarianten Flächen, indem wir die Lösung des vollständigen Systems:

$$\frac{\partial f}{\partial z} + z\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = 0 = X_1 f$$

$$z\frac{\partial f}{\partial z} + 2x\frac{\partial f}{\partial x} + 3y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 = X_2 f$$

gleich einer willkürlichen Constanten setzen. Die Gleichung $X_1 f = 0$ besitzt die beiden Lösungen:

$$u = 2x - z^2, \quad v = y - xz + \tfrac{1}{3}z^3;$$

daher ist die gesuchte Lösung unseres vollständigen Systems diejenige Function $F(uv)$, die die Gleichung

$$X_2 F = 0 = X_2 u\frac{\partial F}{\partial u} + X_2 v\frac{\partial F}{\partial v}$$

oder aber die äquivalente Gleichung

$$2u\frac{\partial F}{\partial u} + 3v\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

erfüllt. Es ergiebt sich also, dass

$$F = \frac{v^2}{u^3} = \frac{(y - xz + \frac{1}{3}z^3)^2}{(2x - z^2)^3}$$

ist und dass dementsprechend alle (im Endlichen gelegenen) invarianten Flächen durch die Gleichung sechsten Grades:

$$\text{(I)} \qquad a(y - xz + \tfrac{1}{3}z^3)^2 + b(2x - z^2)^3 = 0$$

dargestellt werden. Unter diesen Flächen findet sich ein Kegel zweiten Grades

$$2x - z^2 = 0,$$

eine Cayley'sche Regelfläche dritten Grades

$$y - xz + \tfrac{1}{3}z^3 = 0$$

und eine Fläche vierten Grades

$$y^2 - 2xyz + \tfrac{2}{3}yz^3 + \tfrac{8}{9}x^3 - \tfrac{1}{3}x^2z^2 = 0,$$

nämlich die Developpable der gewundenen Curve dritter Ordnung:

$$2x - z^2, \quad 3y - xz = 0,$$

die bei $X_1 f$ und $X_2 f$ invariant bleiben. Diese drei letztgenannten Flächen gestatten mehr als zwei unabhängige infinitesimale projective Transformationen[1]) und kommen also hier nicht weiter in Betracht. Die übrigen Flächen des Büschels (I) sind wirklich Flächen sechster Ordnung, deren jede gerade ∞^2 projective Transformationen gestattet.

Ehe wir diese Gruppe verlassen, geben wir eine selbstständige Erledigung einer naheliegenden Frage. Wir fragen, ob die unendlich ferne Ebene die einzige bei unserer Gruppe invariante Ebene ist. Eine einfache synthetische Betrachtung wird uns zeigen, dass es keine andere invariante Ebene giebt. In der That, wir wissen, dass unsere Gruppe eine gewundene Curve dritter Ordnung sowie die unendlich ferne Ebene invariant lässt. Nun aber gestattet unsere Curve dritter Ordnung gerade ∞^3 projective Transformationen, bei denen gar kein Punkt oder Ebene des Raumes in Ruhe bleiben. Diese dreigliedrige Gruppe transformirt sowohl die Punkte wie die Ebenen des Raumes einfach transitiv. Wird ein Punkt der zugehörigen Developpable (oder aber eine Tangentialebene der Curve) festgehalten, so giebt es jedesmal ∞^1 Transformationen der Gruppe, die diese Bedingung erfüllen. Wird aber ein Punkt der Curve (und gleichzeitig die zugehörige Osculationsebene) festgehalten, so giebt es ∞^2 Transformationen, die diese Bedingung erfüllen.

Aus dem hiermit constatirten Umstande, dass *die unendlich ferne Ebene die einzige bei der Gruppe*

$$(G_1) \qquad r + zp + xq\,, \quad zr + 2xp + 3yq$$

invariante Ebene ist, können wir schliessen, dass die bei dieser Gruppe invarianten Flächen

$$(I) \qquad a(y - xz + \tfrac{1}{3}z^3)^2 + b(2x - z^2)^3 = 0$$

bei unserer fortgesetzten Discussion nicht noch einmal als invariante Flächen auftreten können.

---

1) Die CAYLEY'sche Regelfläche

$$y - xz + \tfrac{1}{3}z^3 = 0$$

gestattet die dreigliedrige Gruppe

$$p + zq\,, \quad r + zp + xq$$
$$zr + 2xp + 3yq\,.$$

Eine jede unter den ∞^1 krummen Haupttangentencurven gestattet eo ipso eine zweigliedrige Untergruppe und ist somit eine Curve 3. O.

Der Fall $C = 0$.

Wir setzen sodann voraus, dass die in den Formeln (1) auftretende Constante C gleich Null ist, und dass $X_1 f$ und $X_2 f$ in Folge dessen die Formen

$$X_1 f = zp + xq,$$
$$X_2 f = yq - zr + aU + Mq$$

besitzen. Wünschen wir zu wissen, ob invariante Flächen vorhanden sind, deren Punkte entweder sämmtlich in Ruhe bleiben, oder aber jedenfalls nur nach Curven laufen, so bilden wir die Matrix

$$\begin{vmatrix} z & x & 0 \\ ax & (a+1)y + M & (a-1)z \end{vmatrix}$$

und setzen ihre zweireihigen Determinanten gleich Null. Da diese Determinanten ganze Functionen zweiten Grades sind, die jedenfalls nicht sämmtlich identisch verschwinden, so schliessen wir ohne Weiteres, dass etwa vorhandene invariante Flächen, deren Punkte nicht transitiv transformirt würden, entweder Flächen zweiten Grades oder Ebenen sein müssten. Daher brauchen wir diese Möglichkeit nicht weiter zu discutiren. Wir fügen hinzu, dass genau derselbe Schluss immer gezogen werden kann, wenn eine beliebige *lineare* zweigliedrige Gruppe vorliegt,

$$X_1 f = \xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r$$
$$X_2 f = \xi_2 p + \eta_2 q + \zeta_2 r,$$

für welche die zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}$$

nicht sämmtlich *identisch* verschwinden. *Diese Bemerkung gestattet uns, die Behandlung der folgenden Fälle abzukürzen.*

In dem jetzt vorliegenden Falle werden daher alle invarianten Flächen dadurch gefunden, dass man die Lösung F des vollständigen Systems:

$$(2)\quad \begin{cases} X_1 f = 0 = z\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] X_2 f = 0 = ax\dfrac{\partial f}{\partial x} + [(a+1)y + M]\dfrac{\partial f}{\partial y} + (a-1)z\dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

gleich einer willkürlichen Constanten setzt. Die Gleichung $X_1 f = 0$ besitzt zwei Lösungen, nämlich

$$z \text{ und } v = 2zy - x^2 .$$

Daher ist die gesuchte Grösse F eine Function von z und v, die durch die Gleichung

$$X_2 z \frac{\partial F}{\partial z} + X_2 v \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

oder die äquivalente:

$$(\alpha - 1)\, z \frac{\partial F}{\partial z} + (2\alpha v + 2Mz) \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

bestimmt wird.

Ehe wir nun weiter gehen, bemerken wir, dass die Constante M gleich Null gesetzt werden kann, sobald $\alpha + 1$ von Null verschieden ist, sowie dass die Annahme

$$\alpha(\alpha - 1) = 0$$

keine anderen invarianten Flächen als Ebenen oder aber Flächen zweiten Grades liefert.

Wir können uns daher darauf beschränken, die beiden Fälle

$$\alpha(\alpha - 1) \neq 0 , \quad M = 0$$

und

$$M \neq 0 , \quad \alpha + 1 = 0$$

zu discutiren.

Der Fall: $C = 0, \ \alpha(\alpha - 1) \neq 0, \ M = 0$.

In dem jetzt vorliegenden Falle haben unsere infinitesimalen Transformationen die Form

$$(\mathrm{G}_2) \qquad \begin{aligned} X_1 f &= z \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \\ X_2 f &= \alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + (\alpha + 1)\, y \frac{\partial f}{\partial y} + (\alpha - 1)\, z \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

$$(\alpha(\alpha - 1) \neq 0)$$

und die zugehörigen invarianten Flächen $F =$ Const. sind nach dem Früheren bestimmt durch die Gleichung

$$(\alpha - 1)\, z \frac{\partial F}{\partial z} + 2\alpha v \frac{\partial F}{\partial v} = 0 ,$$

sodass ihre Gleichung ist:

$$F = \frac{(2zy - x^2)^{\alpha-1}}{z^{2\alpha}} = K = \text{Const.}$$

Die hierdurch gefundenen Flächen

$$\text{(II)} \qquad 2zy - x^2 - Kz^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} = 0$$

mit den beiden willkürlichen Constanten α und K sind im Allgemeinen *transcendent*; unter ihnen finden sich aber unendlich viele algebraische Flächen. Charakteristisch für alle diese Flächen ist es, dass sie sämmtlich von ∞^1 Kegelschnitten erzeugt sind, die in den Ebenen $z =$ Const. liegen. Zu bemerken ist ferner, dass die Constante K ohne Beschränkung gleich 1 gesetzt werden kann, während α, die schon in $X_2 f$ vorkommt, eine wesentliche Constante ist.

Man übersieht ohne weiteres, dass der Coordinatenanfang bei unserer Gruppe invariant bleibt. Hieraus liesse sich ohne weiteres schliessen, dass eine invariante Ebene vorhanden sein muss, die den Coordinatenanfang enthält. Wir ziehen es aber vor, durch eine directe Methode auf einmal *alle* im Endlichen gelegenen invarianten Ebenen zu bestimmen. Hierzu führt uns die folgende Ueberlegung.

Jede invariante Ebene muss die unendlich ferne Ebene nach einer invarianten Geraden schneiden. Da nun aber die unendlich ferne Ebene nur *eine* invariante Gerade enthält, nämlich die Axe des Ebenenbüschels $z =$ Const., so schliessen wir, dass jede (im Endlichen) gelegene invariante Ebene diesem Büschel angehören muss. Unter diesen Ebenen sind aber offenbar $z = 0$ und $z = \infty$ die einzigen, die bei allen Transformationen unserer Gruppe ihre Lage behalten. Die Ebene $z = \infty$ enthält einen invarianten Kegelschnitt, eine invariante Gerade, die den Kegelschnitt berührt, und einen invarianten Punkt, nämlich den Berührungspunkt der invarianten Geraden mit dem Kegelschnitte; die Punkte des Kegelschnitts sowie die Punkte der Ebene $z = \infty$ werden durch eine zweigliedrige Gruppe transformirt.

Wenden wir uns jetzt zu der Ebene $z = 0$, deren Punkte von der zweigliedrigen Gruppe

$$xq, \quad \alpha xp + (\alpha + 1) yq$$

transformirt werden. In dieser Ebene liegen zwei invariante Geraden, nämlich

$$z = 0, \quad x = 0 \qquad \text{und} \qquad z = 0, \quad x = \infty$$

und *zwei invariante* Punkte: der unendlich ferne Schnittpunkt jener Geraden und der im *Endlichen* gelegene Punkt:

$$x = y = z = 0.$$

Daher müssen wir den Flächen (II) in der folgenden Discussion noch einmal begegnen.

Der Fall: $C = 0$, $\alpha + 1 = 0$, $M \neq 0$.

In dem jetzt vorliegenden Falle: $\alpha + 1 = 0$, $M \neq 0$ können wir ohne Beschränkung $M = 1$ setzen, sodass $X_1 f$ und $X_2 f$ die Form:

$$(\mathrm{G}_3) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_1 f &= z \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \\ X_2 f &= -x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} - 2z \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

erhalten. Die zugehörigen invarianten Flächen $F = a$ sind bestimmt durch die Gleichungen

$$2z \frac{\partial F}{\partial z} + 2(v - z) \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

$$v = 2zy - x^2$$

und besitzen daher die Form

$$(\mathrm{III}) \qquad 2y - \frac{x^2}{z} + \log z = \mathrm{Const.}$$

Diese Flächen sind sämmtlich transcendent und unter einander congruent; überdies heben wir hervor, dass jede Fläche der Schaar ∞^1 Kegelschnitte enthält, die in den Ebenen $z = c$ gelegen sind.

Indem wir genau wie im vorigen Falle verfahren, erkennen wir, dass es zwei und nur zwei Ebenen giebt, nämlich

$$z = 0 \qquad \text{und} \qquad z = \infty,$$

die bei allen Transformationen unserer Gruppe in Ruhe bleiben.

Dabei werden die Punkte der invarianten Ebene $z = 0$ von den beiden Transformationen

$$xq, \quad xp - q$$

unter sich vertauscht.

Bei dieser zweigliedrigen Gruppe bleiben zwei Geraden invariant, nämlich:

$$z = 0, \ x = 0 \quad \text{und} \quad z = 0, \ x = \infty$$

und ein Punkt, nämlich der Schnittpunkt der invarianten Geraden.

Aus alledem geht hervor, dass die Flächen (III) von den Flächen (I) und (II) wesentlich verschieden sind, gleichzeitig aber dass wir den Flächen (III) bei unserer fortgesetzten Discussion noch einmal begegnen müssen.

Hiermit kennen wir alle Flächen mit *gerade zwei* projectiven Transformationen, die einen Kegelschnitt invariant lassen. Verlegen wir diesen Kegelschnitt in den imaginären Kugelkreis, so erhalten unsere Flächen beachtenswerthe metrische Eigenschaften.

In jedem unter den drei Fällen (I), (II) und (III) werden dann die Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ Aehnlichkeitstransformationen und es ist insbesondere $X_1 f$ sicher eine infinitesimale Bewegung. Es sind daher unsere Flächen in allen drei Fällen sowohl Spiralflächen wie Schraubenflächen (oder insbesondere Rotationsflächen). Es gehören somit alle diese Flächen zu den von mir betrachteten Flächen, deren geodätische Linien *zwei* infinitesimale conforme Transformationen gestatten. Unsere Flächen, die allerdings immer *imaginär* sind, lassen sich daher jedesmal auf einer Fläche abwickeln, die selbst Centralfläche für eine Fläche ist, deren Krümmungsradien R_1 und R_2 in constantem Verhältnisse stehen.

Hieraus lassen sich curiöse Schlüsse ziehen. Wir beschränken uns auf die Bemerkung, dass die Krümmungslinien Minimalcurven, und Haupttangentencurven unsrer Flächen jedesmal eine infinitesimale Spiraltransformation gestatten, und somit Spiralcurven sind.

§ 2.

Wir wenden uns jetzt zu dem zweiten Hauptfalle und ertheilen also $\overline{X}_1 f$ und $\overline{X}_2 f$ die Form

$$\overline{X}_1 f = zq, \quad \overline{X}_2 f = xp + (x + y) q + \alpha U.$$

Dementsprechend müssen wir

$$X_1 f = z\frac{\partial f}{\partial y} + A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial f}{\partial y} + L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z} + \alpha U$$

setzen, so dass

$$X_1X_2f - X_2X_1f$$
$$= z\frac{\partial f}{\partial y} + A(1+\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + (A + B + B\alpha - N)\frac{\partial f}{\partial y} + C\alpha\frac{\partial f}{\partial z}$$

wird. Nun aber soll

$$X_1X_2f - X_2X_1f = X_1f$$

sein, also kommt

$$z\frac{\partial f}{\partial y} + A(1+\alpha)\frac{\partial f}{\partial x} + (A + B + B\alpha - N)\frac{\partial f}{\partial y} + C\alpha\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$= z\frac{\partial f}{\partial y} + A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z},$$

und schliesslich

$$A\alpha = 0, \quad A + B\alpha - N = 0, \quad C(\alpha - 1) = 0,$$

oder wenn wir, wie wir können, $B = 0$ setzen,

(2) $$A\alpha = 0, \quad A - N = 0, \quad C(\alpha - 1) = 0.$$

Wäre nun

$$\alpha(\alpha - 1) \neq 0,$$

so besässe $X_1 f$ die Form zq und die zugehörigen invarianten Flächen wären Cylinderflächen, die eo ipso mindestens ∞^4 projective Transformationen gestatteten. Wir können also ohne weiteres annehmen, dass $\alpha(\alpha - 1) = 0$ ist.

Der Fall: $\alpha = 0$.

Ist $\alpha = 0$, so können wir

$$X_1 f = z\frac{\partial f}{\partial y} + A\frac{\partial f}{\partial x}$$

und, weil wir von den Cylinderflächen absehen:

$$A = 1$$

setzen; es ist überdies gestattet, den Constanten L und M die Werthe Null zu ertheilen. Unsere infinitesimalen Transformationen erhalten somit die Form:

$$(G_4) \qquad \begin{cases} X_1 f = z\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ X_2 f = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + (x+y)\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,. \end{cases}$$

Die zugehörigen invarianten Flächen $F =$ Const. finden wir, indem wir die Lösung F des vollständigen Systems

$$z\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 = X_1 f$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 = X_2 f$$

suchen. Bezeichnen wir die Lösungen der Gleichung $X_1 f = 0$ mit

$$u \equiv z \quad \text{und} \quad w \equiv y - xz\,,$$

so erfüllt F als Function von u und w die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial u} + w\frac{\partial f}{\partial w} = 0$$

und besitzt somit die Form:

$$we^{-u} \equiv (y - xz)e^{-z}\,.$$

Die bei der Gruppe G_4 invarianten Flächen besitzen somit die Gleichung

$$\text{(IV)} \qquad y - xz = Ke^{z}$$

und sind in Folge dessen Regelflächen, deren Geraden in den Ebenen $z =$ Const. gelegen sind. Diese Regelflächen sind überdies unter einander projectiv, sodass $K = 1$ gesetzt werden kann.

Da die unendlich entfernte Ebene zwei und nur zwei invariante Gerade enthält, nämlich die Axen der beiden Ebenenbüschel $z =$ Const. und $x =$ Const., so muss jede invariante Ebene einem unter diesen beiden Büscheln angehören; man übersieht in dieser Weise unmittelbar, dass *die unendlich ferne*

Ebene die einzige Ebene ist, die bei unserer Gruppe G_4 *invariant* bleibt. Hieraus lässt sich ohne weiteres schliessen, dass die Flächen (IV) und die zugehörige Gruppe (G_4) von den früheren gefundenen Flächen (I), (II), (III) und ihren Gruppen G_1, G_2, G_3 wesentlich verschieden sind.

Bei den Gruppen G_2 und G_3 treten je zwei invariante Ebenen auf; bei der Gruppe G_1 tritt allerdings nur eine invariante Ebene auf; in ihr liegen aber ein invarianter Kegelschnitt und eine invariante Gerade, während in der bei der Gruppe G_4 vorhandenen invarianten Ebene zwar zwei invariante Gerade, dagegen kein invarianter Kegelschnitt gelegen sind. Hieraus folgt, dass die *Gruppe* G_4 von den Gruppen G_1, G_2 und G_3 wesentlich verschieden ist; dass auch die *Flächen* (IV) von den Flächen (I), (II), (III) wesentlich verschieden sind, folgt daraus, dass eine jede Fläche allgemeiner Lage, die zu einer unter diesen Schaaren gehört, nicht mehr als ∞^2 projective Transformationen gestattet.

Daraus, dass die unendlich ferne Ebene die einzige Ebene ist, die bei der Gruppe G_4 invariant bleibt, können wir auch noch den Schluss ziehen, dass wir den Flächen (IV), die gerade ∞^2 projective Transformationen gestatten, bei unserer fortgesetzten Discussion nicht nochmals begegnen werden.

Der Fall: $\alpha = 1$.

Setzen wir in den Formeln (2) Seite 224: $\alpha = 1$, so wird

$$A = 0\,, \quad N = 0\,;$$

dabei können wir, wenn wir, wie immer, von den Cylinderflächen absehen und überdies $x + \frac{L}{2}$ resp. $y + \frac{M}{2} - \frac{L}{4}$ als neues x resp. y einführen, den Constanten C, L und M die Werthe

$$C = 1\,, \quad L = 0\,, \quad M = 0$$

ertheilen. Hierdurch erhalten X_1f und X_2f die Form

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} X_1 f = z\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,, \\ X_2 f = 2x\dfrac{\partial f}{\partial x} + (2y + x)\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z}\,. \end{cases}$$

Es ist aber leicht zu sehen, dass dieser Fall uns nichts Neues giebt. Die Ebene $x = 0$ bleibt nämlich invariant und ihre Punkte werden transformirt von der zweigliedrigen Gruppe

$$z\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}, \quad 2y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z},$$

die offenbar den Kegelschnitt

$$z^2 - 2y = 0$$

in Ruhe lässt. Hieraus folgt unmittelbar, dass dieser Fall uns nur solche Flächen geben wird, die wir schon in § 1 gefunden haben. Zum Ueberfluss wollen wir diese Thatsache durch Rechnung bestätigen. Indem wir, wie in den früheren Fällen verfahren, erkennen wir, dass die im vorliegenden Falle invarianten Flächen durch die Gleichung

$$(\Phi) \qquad \frac{2y - z^2}{x} - \log x = K$$

dargestellt werden und somit die Ebenen $x = \text{Const.}$ nach Kegelschnitten schneiden. Beziehen wir nun die Punkte $x\,y\,z$ des Raumes *projectiv* auf die Punkte $x_1\,y_1\,z_1$ durch die Gleichungen

$$x_1 = \frac{z}{x}, \quad y_1 = \frac{y}{x}, \quad z_1 = \frac{1}{x},$$

so sehen wir, dass unsere Flächen (Φ) mit den früher gefundenen Flächen

$$(\text{III}) \qquad 2y_1 - \frac{x_1^2}{z_1} + \log z_1 = \text{Const.}$$

projectiv sind.

Es liefern daher die Flächen (Φ) wirklich keinen neuen Typus.

§ 3.

Wir kommen jetzt zu dem Falle

$$\bar{X}_1 f = z\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \bar{X}_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \alpha U$$

und setzen also

$$X_1 f = z\frac{\partial f}{\partial y} + A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \alpha U + L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z},$$

und finden dementsprechend, dass

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = z\frac{\partial f}{\partial y} + (A\alpha + C)\frac{\partial f}{\partial x} + (B + B\alpha - N)\frac{\partial f}{\partial y} + C\alpha r$$

ist. Nun aber soll

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = X_1 f$$

das heisst

$$z\frac{\partial f}{\partial y} + (A\alpha + C)\frac{\partial f}{\partial x} + (B + B\alpha - N)\frac{\partial f}{\partial y} + C\alpha\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= z\frac{\partial f}{\partial y} + A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z}$$

sein; daher erhalten wir die Bedingungsgleichungen

$$A(\alpha - 1) + C = 0, \quad B\alpha - N = 0, \quad C(\alpha - 1) = 0,$$

die wir dadurch vereinfachen, dass wir $z + B$ als neues z einführen und dementsprechend in unsern Formeln $B = 0$ setzen.

Wir können nun von dem Fall $\alpha \neq 1$, der nur Cylinderflächen liefert, ohne weiteres absehen. Wir setzen daher

$$B = 0, \quad C = 0, \quad A = 1$$

und führen gleichzeitig $x + L$ als neues x und $y + \frac{1}{2}M$ als neues y ein. Hierdurch erhalten unsere Transformationen die Form

$$(G_5) \quad \begin{cases} X_1 f = z\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ X_2 f = (x + z)\dfrac{\partial f}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z}. \end{cases}$$

Um nun die zugehörigen invarianten Flächen $F =$ Const. zu finden, bilden wir wie in den früheren Fällen das vollständige System:

$$X_1 f = 0 = z\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$X_2 f = 0 = (x + z)\frac{\partial f}{\partial x} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z},$$

führen sodann die Lösungen

$$z \quad \text{und} \quad v = y - xz$$

der ersten Gleichung $X_1 f = 0$ in die zweite Gleichung $X_2 f = 0$ ein und erkennen somit, dass F als Lösung der Gleichung

$$z\frac{\partial F}{\partial z} + (2v - z^2)\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

die Form

$$\frac{v}{z^2} + \log z \equiv \frac{y - xz}{z^2} + \log z$$

besitzt. Es ist daher

$$\text{(V)} \qquad \frac{y - xz}{z^2} + \log z = K$$

die allgemeine Gleichung der bei unsrer Gruppe G_5 invarianten Flächen, die offenbar Regelflächen sind, deren erzeugende Geraden in den Ebenen $z = \text{Const.}$ liegen.

Die unendlich ferne Ebene enthält nur eine invariante Gerade, nämlich die Axe des Büschels $z = \text{Const.}$ Ausgehend von dieser Thatsache erkennen wir leicht, *dass die Ebenen*

$$z = 0 \quad \text{und} \quad z = \infty$$

die einzigen sind, die bei der Gruppe invariant bleiben. Die Punkte der invarianten Ebene $z = 0$ werden transformirt von der zweigliedrigen Gruppe:

$$p, \; xp + 2yq$$

und dabei treten zwei invariante Gerade

$$z = 0, \; y = 0 \quad \text{und} \quad z = 0, \; y = \infty,$$

dagegen kein invarianter Kegelschnitt auf. In der unendlich fernen Ebene $z = \infty$ liegt auch kein invarianter Kegelschnitt. Hieraus folgt sogleich, dass unsere Gruppe G_5 von den früher gefundenen Gruppen G_1, G_2 und G_3 wesentlich verschieden ist. Da andrerseits bei der Gruppe G_5 zwei invariante Ebenen auftreten, bei der Gruppe G_4 dagegen nur eine invariante Ebene, so schliessen wir, dass auch die Gruppen G_4 und G_5 wesentlich verschieden sind und dass *somit G_5 für uns eine neue Gruppe ist.*

Da andrerseits die Flächen (V) transcendent sind, und sicher keine Regelflächen sind, so können sie nicht mehr als ∞^2 projective Transformationen gestatten.

Daher sind die Flächen (V) *ein neuer Typus von Flächen mit ∞^2 projectiven Transformationen in sich.*

Wir bemerken ausdrücklich, dass bei der Gruppe G_8 *zwei und nur zwei Geraden ihre Lage behalten.*

Wir erkennen später, dass die Gleichung (V) eine noch einfachere Gestalt erhalten kann. Vorläufig beschränken wir uns auf die Bemerkung, dass die ∞^1 *Flächen* (V) *unter einander projectiv* sind, und dass dementsprechend $K = 1$ gesetzt werden kann.

§ 4.

Endlich müssen wir

$$\overline{X}_1 f = zq, \quad \overline{X}_2 f = \alpha xp + (\gamma + 1) yq + \gamma zr$$

und dementsprechend

$$X_1 f = z\frac{\partial f}{\partial y} + A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_2 f = \alpha x\frac{\partial f}{\partial x} + (\gamma + 1) y\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma z\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$+ L\frac{\partial f}{\partial x} + M\frac{\partial f}{\partial y} + N\frac{\partial f}{\partial z}$$

setzen. Es erhält daher die Bedingungsgleichung

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = X_1 f$$

die Form:

$$z\frac{\partial f}{\partial y} + A\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + (B(\gamma + 1) - N)\frac{\partial f}{\partial y} + C\gamma\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$= z\frac{\partial f}{\partial y} + A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z},$$

woraus

$$A(\alpha - 1) = 0, \quad B\gamma - N = 0, \quad C(\gamma - 1) = 0,$$

oder, wenn wir $z + B$ als neues z einführen und dementsprechend $B = 0$ setzen:

$$A(\alpha - 1) = 0, \quad C(\gamma - 1) = 0, \quad N = 0.$$

Wäre nun

$$(\alpha - 1)(\gamma - 1) \neq 0,$$

so käme $X_1 f = zq$, und es wären somit die zugehörigen invarianten Flächen Cylinderflächen mit mindestens ∞^4 projectiven Transformationen. Wir setzen daher

$$(\alpha - 1)(\gamma - 1) = 0$$

und müssen somit zwei Fälle nach einander erledigen.

Der Fall $\gamma \neq 1$, $\alpha = 1$.

Ist $\gamma \neq 1$, und in Folge dessen $\alpha = 1$, $C = 0$, so können wir $A = 1$, $L = 0$ setzen. Dementsprechend erhalten $X_1 f$ und $X_2 f$ die Form:

$$X_1 f = z \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$X_2 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + (\gamma + 1) y \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma z \frac{\partial f}{\partial z} + M \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Zur Bestimmung der zugehörigen invarianten Flächen $F = \text{Const.}$ bilden wir das vollständige System:

$$X_1 f \equiv z \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$X_2 f \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} + (\gamma + 1) y \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma z \frac{\partial f}{\partial z} + M \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

und suchen seine Lösung F.

Nun aber sind

$$z \text{ und } v = y - xz$$

Lösungen von $X_1 f = 0$ und F ist bestimmt als Function von z und v durch die Gleichung

$$\gamma z \frac{\partial f}{\partial z} + ((\gamma + 1) v + M) \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \tag{3}$$

bei deren Integration verschiedene Möglichkeiten berücksichtigt werden müssen. Dabei können wir von dem Falle $\gamma = 0$, der nur invariante Ebenen liefert, absehen.

Setzen wir zunächst voraus, dass

$$\gamma (\gamma - 1)(\gamma + 1) \neq 0$$

ist, so können wir ohne weiteres

$$M = 0$$

setzen. Unsere infinitesimalen Transformationen haben dann die Form:

$$(G_6) \qquad \begin{cases} X_1 f = z \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ X_2 f = x \dfrac{\partial f}{\partial x} + (\gamma + 1) y \dfrac{\partial f}{\partial y} + \gamma z \dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

die zugehörigen invarianten Flächen werden dargestellt durch die Gleichung:

$$\text{(VI)} \qquad \frac{v}{z^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}} = \text{Const.} = \frac{y - xz}{z^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}$$

und sind somit Regelflächen, deren erzeugende Geraden in den Ebenen $z = \text{Const.}$ liegen.

Jetzt giebt es zwei und nur zwei Ebenen, die bei unserer Gruppe invariant bleiben, nämlich

$$z = 0 \quad \text{und} \quad z = \infty.$$

Die Ebene $z = 0$ wird transformirt durch die Gruppe

$$p \quad xp + (\gamma + 1) yq.$$

Diese Ebene enthält daher zwei invariante Geraden

$$z = 0, \; y = 0 \quad \text{und} \quad z = 0, \; y = \infty,$$

dagegen keinen invarianten Kegelschnitt. Die unendlich ferne Ebene wird transformirt von der Gruppe

$$zq \quad xp + (\gamma + 1) yq + \gamma z r$$

und enthält somit die beiden invarianten Geraden

$$z = 0, \; \infty = 0 \quad \text{und} \quad x = 0, \; \infty = 0.$$

Hieraus können wir schliessen, dass die Gruppe G_6 von den früher gefundenen wesentlich verschieden ist. Denn bei den Gruppen G_1, G_2 und G_3 bleibt jedesmal ein Kegelschnitt in Ruhe; bei der Gruppe G_4 bleibt nur eine Ebene invariant; bei der Gruppe G_5 endlich bleiben allerdings zwei Ebenen, dagegen

nur zwei Geraden in Ruhe, während bei unserer jetzigen Gruppe G_4 drei verschiedene Gerade invariant bleiben.

Hieraus schliessen wir, dass *die transcendenten Regelflächen* (VI) *einen neuen Typus von Flächen mit* ∞^2 *projectiven Transformationen liefern.*

Wir fügen hinzu, dass *die* ∞^1 *Flächen* (VI) *unter einander projectiv sind.*

Nehmen wir jetzt an, dass

$$\gamma + 1 = 0$$

ist. Dann haben $X_1 f$ und $X_2 f$ die Form

$$(G_5) \qquad \begin{cases} X_1 f = z \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] X_2 f = x \dfrac{\partial f}{\partial x} + M \dfrac{\partial f}{\partial y} - z \dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

und die zugehörigen invarianten Flächen $F =$ Const. sind bestimmt durch die Gleichung (3)

$$-z \frac{\partial F}{\partial z} + M \frac{\partial F}{\partial v} = 0,$$

die durch Integration giebt:

$$v + M \log z \equiv y - xz + M \log z = K.$$

Da wir nun von Flächen zweiten Grades absehen, können wir $M = 1$ setzen. Die hierdurch hervorgehenden Flächen

$$\text{(V)} \qquad y - xz + \log z = K,$$

die offenbar unter einander *congruent* sind, gehen aber bei der projectiven Transformation:

$$\mathfrak{x} = \frac{y}{z}, \quad \mathfrak{y} = \frac{x}{z}, \quad \mathfrak{z} = \frac{1}{z}$$

in die Flächen

$$\frac{\mathfrak{y} - \mathfrak{x}\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}^2} + \log \mathfrak{z} = \text{Const.},$$

das heisst in unsere früher gefundenen Flächen (V) über.

Der Fall: $\gamma = 1$, $\alpha \neq 1$.

Jetzt können wir $X_1 f$ und $X_2 f$ die Form

$$X_1 f = z \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_2 f = \alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + 2y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + L \frac{\partial f}{\partial x}$$

ertheilen. Die zugehörigen invarianten Flächen $F =$ Const. sind bestimmt durch die Gleichung

$$(\alpha x + L) \frac{\partial f}{\partial x} + 2v \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

in den Veränderlichen

$$x \quad \text{und} \quad v = 2y - z^2 .$$

Ist nun $\alpha \neq 0$, so können wir $L = 0$ setzen. Bei der betreffenden Gruppe

$$zq + r , \quad \alpha xp + 2yq + zr$$

bleibt die Ebene $x = 0$ invariant, und diese Ebene, deren Punkte durch die zweigliedrige Gruppe

$$zq + r , \quad 2yq + zr$$

transformirt werden, enthält einen invarianten Kegelschnitt:

$$x = 0 , \quad z^2 - 2y = 0 .$$

Daher giebt die Annahme $\alpha \neq 0$ uns nur eine schon in § 1 gefundene Gruppe.

Wir setzen daher $\alpha = 0$ und erhalten somit die Gruppe

$$(\mathrm{G}_7) \qquad \begin{cases} X_1 f = z \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} \\[2ex] X_2 f = 2y \dfrac{\partial f}{\partial y} + z \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial x} \end{cases}$$

und die ∞^1 zugehörigen invarianten Flächen

$$(\mathrm{VII}) \qquad 2y - z^2 - Ke^{2x} = 0 ,$$

die offenbar unter einander congruent sind, indem jede Fläche der Schaar von einer passenden Translation längs der x-Axe in jede

andere Fläche der Schaar übergeführt werden kann. Dass diese transcendenten Flächen von den früher gefundenen wesentlich verschieden sind, folgt daraus, dass es keine im Endlichen gelegene Ebene giebt, die bei der Gruppe G_7 invariant bleibt.

Der Fall $\alpha = \gamma = 1$.

Jetzt haben unsere infinitesimalen Transformationen die Form

$$X_1 f = z \frac{\partial f}{\partial y} + A \frac{\partial f}{\partial x} + C \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_2 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + 2y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}$$

und dabei dürfen wir annehmen, dass A und B nicht beide verschwinden. Ist nun C von Null verschieden, so können wir $C = 1$ setzen und erhalten die Flächen

$$2y - z^2 - K(x - Az)^2 = 0,$$

die vom zweiten Grade sind. Ist andererseits $C = 0$, so können wir $A = 1$ setzen und finden die Flächen

$$y - xz - Kz^2 = 0,$$

die wiederum vom zweiten Grade sind. Die Annahme $\alpha = \gamma = 1$ giebt somit nichts Neues.

Es giebt daher s i e b e n *verschiedene Flächentypen mit* g r a d e ∞^2 *projectiven Transformationen, die nicht sämmtlich paarweise vertauschbar sind. Wir stellen die betreffenden Flächen mit ihren Gruppen zusammen.*

(I) $$a(y - xz + \tfrac{1}{3}z^3)^2 + b(2x - z^2)^3 = 0$$

(G_1) $$\boxed{r + zp + xq, \quad zr + 2xp + 3yq}$$

(II) $$2zy - x^2 - z^{\frac{2\alpha}{\alpha - 1}} = 0$$

(G_2) $$\boxed{zp + xq, \quad \alpha xp + (\alpha + 1)yq + (\alpha - 1)zr}$$

(III) $$2y - \frac{x^2}{z} + \log z = 0$$

(G₃) $$\boxed{zp + xq, \quad -xp + q - 2zr}$$

(IV) $$y - xz - e^z = 0$$

(G₄) $$\boxed{zq + p, \quad xp + (x + y)q + r}$$

(V) $$y - xz + \log z = 0$$

(G₅) $$\boxed{zq + p, \quad xp + q - zr}$$

(VI) $$y - xz + z^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} = 0$$

(G₆) $$\boxed{zq + p, \quad xp + (\gamma + 1)yq + \gamma zr}$$

(VII) $$2y - z^2 - e^{2x} = 0$$

(G₇) $$\boxed{zq + r, \quad 2yq + zr + p}$$

Kapitel II.

Bestimmung aller Flächen mit ∞^2 paarweise vertauschbaren projectiven Transformationen.

Wir suchen jetzt alle Flächen, die zwei und nur zwei infinitesimale *projective* Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ gestatten, die in der Beziehung

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = 0$$

stehen. Bei dieser Fragestellung sind wiederum die Flächen zweiten Grades sowie die Kegel (bez. Cylinder) von vornherein ausgeschlossen. Da immer mindestens eine Ebene vorhanden ist, die bei $X_1 f$ und $X_2 f$ ihre Lage behält, so können wir ohne Beschränkung annehmen, dass $X_1 f$ und $X_2 f$ *linear* sind.

Bezeichnen wir nun, wie im vorigen Kapitel, mit $\overline{X}_1 f$ und $\overline{X}_2 f$ die linearen homogenen Transformationen, die die unendlich

ferne Ebene in derselben Weise wie $X_1 f$ und $X_2 f$ transformiren, so dürfen wir schliessen, dass auch die Gleichung

$$\overline{X}_1 \overline{X}_2 f - \overline{X}_2 \overline{X}_1 f = 0$$

besteht.

Es erzeugen daher $\overline{X}_1 f$ und $\overline{X}_2 f$ sicher eine *zweigliedrige* lineare und homogene Gruppe mit vertauschbaren linearen und homogenen Transformationen. Nun aber haben wir alle derartigen Gruppen schon längst bestimmt und auf kanonische Formen gebracht. Wir ertheilen daher $\overline{X}_1 f$ und $\overline{X}_2 f$ nach und nach diese kanonischen Formen, bringen sodann die zugehörigen Ausdrücke $X_1 f$ und $X_2 f$ durch lineare Transformationen auf möglichst einfache Form und stellen endlich die zugehörigen invarianten Flächen auf. Dabei sehen wir, wie schon gesagt, von Ebenen, Flächen zweiten Grades, Kegeln (und Cylindern) ab.

Da die erforderlichen Rechnungen ausserordentlich einfach sind, und die angewandten Methoden sich von den früher benutzten nicht unterscheiden, so führen wir die Rechnungen nur so weit aus, dass es dem Leser keine Mühe kosten wird, die Richtigkeit unserer Entwickelungen zu controlliren.

§ 1.

Wir setzen zunächst

$$\overline{X}_1 f = zp, \qquad \overline{X}_2 f = zq$$

und dementsprechend

$$X_1 f = zp + Ap + Bq + Cr,$$
$$X_2 f = zq + Lp + Mq + Nr,$$

woraus

$$X_1 X_2 f - X_2 X_1 f = 0 = Cq - Np.$$

Es besitzen daher $X_1 f$ und $X_2 f$ die Form

$$X_1 f = (z + A)\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_2 f = L\frac{\partial f}{\partial x} + (z + M)\frac{\partial f}{\partial y};$$

die zugehörigen invarianten Flächen sind *eben*, und kommen somit nicht weiter in Betracht.

§ 2.

Wir setzen sodann

$$\overline{X}_1 f = zp\,, \qquad \overline{X}_2 f = zq + U$$

und dementsprechend:

$$X_1 f = zp + Ap + Bq + Cr\,,$$
$$X_2 f = zq + U + Lp + Mq + Nr\,,$$

woraus

$$0 = Cq + Ap + Bq + Cr - Np$$

und

$$A = N\,, \qquad B = -C = 0\,.$$

Es hat somit $X_1 f$ die Form

$$X_1 f = (z + A)\frac{\partial f}{\partial x}$$

und es sind daher die bei unsrer zweigliedrigen Gruppe invarianten Flächen Cylinder, die mindestens ∞^4 projective Transformationen gestatten und somit hier nicht in Betracht kommen.

§ 3.

Wir setzen sodann

$$\overline{X}_1 f = zq\,, \qquad \overline{X}_2 f = xq$$

und dementsprechend

$$X_1 f = zq + Ap + Bq + Cr$$
$$X_2 f = xq + Lp + Mq + Nr\,,$$

woraus

$$0 = Aq - Nq \quad \text{und} \quad A - N = 0\,.$$

Da wir nun ohne Beschränkung $B = 0$, $M = 0$ setzen können, wird

$$X_1 f = zq + Ap + Cr$$
$$X_2 f = xq + Lp + Ar\,.$$

Ist nun, wie wir zunächst annehmen, $A = 0$, so können wir $C = 1$ setzen, es sind dann die zugehörigen invarianten Flächen

$$x^2 - L(2y - z^2) = \text{Const.}$$

vom zweiten Grade und kommen somit nicht weiter in Betracht.

Ist dagegen $A \neq 0$, so können wir $A = 1$ setzen. Die zugehörigen invarianten Flächen

$$(z - Cx)^2 + (1 - CL)(2Cy - z^2) = \text{Const.}$$

sind wiederum trivial.

§ 4.

Wir setzen sodann:

$$\overline{X}_1 f = zq\,, \quad \overline{X}_2 f = xq + U$$

und dementsprechend:

$$X_1 f = zq + Ap + Bq + Cr\,,$$
$$X_2 f = xq + U + Lp + Mq + Nr\,,$$

woraus

$$0 = Aq + Ap + Bq + Cr - Nq$$

und

$$A = 0\,, \quad C = 0\,, \quad B = N\,.$$

Es besitzt daher $X_1 f$ die Form $(z + B)q$; die bei unsrer zweigliedrigen Gruppe invarianten Flächen sind Cylinder und somit trivial.

§ 5.

Jetzt setzen wir:

$$\overline{X}_1 f = zq\,, \quad \overline{X}_2 f = zp + xq$$

und dementsprechend

$$X_1 f = zq + Ap + Bq + Cr\,,$$
$$X_2 f = zp + xq + Lp + Mq + Nr\,,$$

woraus

$$0 = Cp + Aq - Nq$$

und

$$C = 0\,, \quad A = N\,.$$

Wir können überdies ohne Beschränkung

$$B = 0\,, \quad A = 1\,, \quad M = 0$$

setzen, sodass die invarianten Flächen $F = \text{Const.}$ durch die Gleichungen

$$z\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial x}=0\,,$$

$$z\frac{\partial F}{\partial x}+x\frac{\partial F}{\partial y}+L\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

bestimmt sind und daher die Form

$$y-xz+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{2}Lz^2=K$$

besitzen. Die gefundenen Flächen sind ∞^1 Cayley'sche Regelflächen dritten Grades, die unter einander congruent sind. Diese Flächen gestatten aber ∞^3 *projective* Transformationen und kommen somit *hier* nicht weiter in Betracht.

§ 6.

Wir setzen jetzt

$$\overline{X}_1f=zq+U\,,\quad \overline{X}_2f=zp+xq+\alpha U$$

und dementsprechend

$$X_1f=zq+U+Ap+Bq+Cr$$
$$X_2f=zp+xq+\alpha U+Lp+Mq+Nr\,,$$

woraus

$$0=Cp+Aq+\alpha(Ap+Bq+Cr)-Nq-(Lp+Mq+Nr)$$

und

$$C+\alpha A-L=0\,,$$
$$A+\alpha B-N-M=0\,,$$
$$C\alpha-N=0\,.$$

Nun können wir aber ohne Beschränkung

$$A=B=C=0$$

setzen, und also wird:

$$L=M=N=0$$

und

$$X_1f=zq+U\,,$$
$$X_2f=zp+xq+\alpha U\,,$$

sodass die gesuchten invarianten Flächen durch die Gleichung

$$\frac{y}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{z}-\alpha\right)^2-\log z=K$$

dargestellt sind.

Wir schalten hier die Bemerkung ein, dass man die Constante a von vornherein gleich Null setzen kann. Führen wir nämlich die Veränderlichen

$$x_1 = x - az, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z$$

ein, so kommt

$$X_1 f = z_1 q_1 + U_1$$
$$X_2 f - a X_1 f = z_1 p_1 + x_1 q_1 .$$

Es ist in der That ein Fehler in meiner früheren Aufzählung der *kanonischen* Formen aller linearen homogenen Gruppen $x\,y\,z$, die Form

$$zq + U, \quad zp + xq + aU$$

anstatt der einfacheren Form:

$$zq + U, \quad zp + xq$$

aufgestellt zu haben.

Unsere Flächen erhalten übrigens eine noch einfachere Gestalt durch die projective Transformation

$$\mathfrak{y} = \frac{y}{z} - K, \quad \mathfrak{x} = \frac{x}{z}, \quad \mathfrak{z} = \frac{1}{z} .$$

In dieser Weise erkennen wir, dass *die transcendente Fläche*

(Γ) $$y - \tfrac{1}{2} x^2 + \log z = 0$$

die zweigliedrige Gruppe

(Γ_1) $$q - zr, \quad p + xq$$

gestattet [1]).

§ 6.

Wir setzen jetzt

$$\overline{X}_1 f = zq, \quad \overline{X}_2 f = zp + xq + U$$

und dementsprechend

$$X_1 f = zq + Ap + Bq + Cr,$$
$$X_2 f = zp + xq + U + Lp + Mq + Nr,$$

1) Wir bemerken, dass die beiden infinitesimalen Transformationen $q - zr$, $p + xq$ mit q zusammen eine *einfach transitive Gruppe von projectiven vertauschbaren Transformationen* erzeugen.

woraus

$$0 = Cp + Aq + Ap + Bq + Cr - Nq$$

und

$$C + A = 0, \quad A + B - N = 0, \quad C = 0.$$

Nun aber können wir ohne Beschränkung

$$L = M = N = 0$$

setzen; also folgt

$$A = B = C = 0$$

und

$$X_1 f = zq,$$

sodass wir nur Cylinderflächen finden, die hier nicht weiter in Betracht kommen.

§ 7.

Wir setzen jetzt:

$$\overline{X}_1 f = zq, \quad \overline{X}_2 f = xp + \alpha U$$

und dementsprechend

$$X_1 f = zq + Ap + Bq + Cr,$$
$$X_2 f = xp + \alpha U + Lp + Mq + Nr,$$

woraus

$$A(1 + \alpha)p + B\alpha q + C\alpha r - Nq = 0$$

und

$$A(1 + \alpha) = 0, \quad B\alpha - N = 0, \quad C\alpha = 0.$$

Da wir ohne Beschränkung $B = 0$ und dementsprechend $N = 0$ setzen können, wird

$$X_1 f = zq + Ap + Cr,$$
$$X_2 f = xp + \alpha U + Lp + Mq$$

und

$$A(1 + \alpha) = 0, \quad C\alpha = 0.$$

Wir wollen zunächst annehmen, dass C von Null verschieden ist und somit gleich 1 gesetzt werden kann. Alsdann ist

$$\alpha = 0, \quad A = 0$$

und, wenn $L = 0$ gesetzt wird:

$$X_1 f = zq + r, \quad X_2 f = xp + Mq.$$

Die zugehörigen invarianten Flächen:

$$2y - z^2 - 2M \log x = K$$

sind unter einander congruent, indem ihre Schaar bei jeder Translation längs der y-Axe invariant bleibt. Wir können daher $K = 0$ und überdies $M = -1$ setzen; die entsprechende transcendente Fläche

$$y - \tfrac{1}{2} z^2 + \log x = 0$$

ist aber offenbar projectiv mit der früher gefundenen Fläche (I').

Wenden wir uns jetzt zu dem Falle $C = 0$; dann können wir $A = 1$ und dementsprechend $\alpha = -1$ sowie

$$X_1 f = zq + p, \quad X_2 f = yq + zr - Lp$$

setzen. Die zugehörigen invarianten Flächen

$$\frac{y - xz}{z} + L \log z = K$$

interessiren uns nur, wenn $L \neq 0$ ist; alsdann kann L offenbar gleich 1 gesetzt werden. Die ∞^1 Flächen unsrer Schaar sind unter einander congruent, und es kann daher $K = 0$ gesetzt werden. Die hierdurch gefundene Fläche

$$x - \frac{y}{z} - \log z = 0$$

gestattet die Gruppe

$$(\Gamma_1) \qquad p + zq, \quad yq + zr + p.$$

Es fragt sich, ob die beiden Gruppen Γ_1 und Γ_2 mit einander projectiv sind. Zur Entscheidung dieser Frage bemerken wir, dass sowohl bei Γ_1 wie bei Γ_2 zwei und nur zwei Ebenen invariant bleiben, nämlich in beiden Fällen die Ebenen $z = 0$ und $z = \infty$. Wären nun diese beiden Gruppen mit einander projectiv, so müsste bei der Ueberführung von Γ_2 in Γ_1 das Ebenenbüschel $z =$ Const. in sich transformirt werden. Nun aber schneiden die Ebenen $z =$ Const. die bei Γ_1 invarianten Flächen:

$$y - \tfrac{1}{2} x^2 + \log z = \text{Const.}$$

nach Kegelschnitten, und die bei der Gruppe Γ_2 invarianten Flächen:

$$x - \frac{y}{z} - \log z = \text{Const.}$$

nach Geraden. Also sind die Gruppen Γ_1 und Γ_2 wesentlich verschieden; dementsprechend ist die Fläche

$$\text{(II}') \qquad x - \frac{y}{z} - \log z = 0$$

ein neuer Typus von Flächen mit gerade ∞^2 projectiven vertauschbaren Transformationen:

$$(\Gamma_2) \qquad p + zq\,, \quad p + yq + zr\,.$$ [1])

§ 8.

Wir setzen jetzt

$$\bar{X}_1 f = zq + U, \quad \bar{X}_2 f = xp + \alpha U$$

und dementsprechend:

$$X_1 f = zq + U + Ap + Bq + Cr\,,$$
$$X_2 f = xp + \alpha U + Lp + Mq + Nr\,,$$

woraus

$$0 = A(1 + \alpha)p + B\alpha q + C\alpha r - Lp - Mq - Nq - Nr$$

und

$$A(1 + \alpha) - L = 0\,, \quad B\alpha - M - N = 0\,, \quad C\alpha - N = 0\,,$$

oder, da wir $A = B = C = 0$ setzen dürfen:

$$L = M = N = 0\,.$$

Es wird daher

$$X_1 f = zq + U$$
$$X_2 f = xp + \alpha U\,.$$

Die zugehörigen invarianten Flächen

$$\frac{y}{z} - \log z + \alpha \log \frac{x}{z} = K$$

---

1) Die Transformationen $p + zq$, $p + yq + zr$ bilden eine Untergruppe der einfach transitiven Gruppe

$$p,\ zq,\ yq + zr$$

mit vertauschbaren projectiven Transformationen.

bilden einen neuen Typus von Flächen mit ∞^2 projectiven vertauschbaren Transformationen. Dies folgt daraus, dass es *drei* Ebenen giebt, die bei der Gruppe $zq + U$, $xp + \alpha U$ invariant bleiben, nämlich die Ebenen

$$x = 0\,, \quad z = 0\,, \quad z = \infty\,.$$

Wir bringen unsre Flächen auf eine einfachere Form, indem wir

$$\mathfrak{x} = \frac{x}{z}\,, \quad \mathfrak{y} = \frac{y}{z}\,, \quad \mathfrak{z} = \frac{1}{z}$$

als neue Veränderliche einführen. Dann erhalten unsere ∞^1 Flächen die Gestalt

$$\mathfrak{y} + \alpha \log \mathfrak{x} + \log \mathfrak{z} = K$$

und sind somit unter einander congruent. Wir können daher die einzige Fläche

$$\text{(III}'\text{)} \qquad \mathfrak{y} + \alpha \log \mathfrak{x} + \log \mathfrak{z} = 0$$

als Repräsentant des gefundenen Flächentypus betrachten. Die zugehörige Gruppe[1]) besitzt die Form:

$$(\Gamma_3) \qquad \mathfrak{q} - \mathfrak{z}\mathfrak{r}\,, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{p} - \alpha\mathfrak{z}\mathfrak{r}\,.$$

§ 9.

Wir setzen jetzt

$$\overline{X}_1 f = xp + \alpha U\,, \quad \overline{X}_2 f = yq + \beta U$$

und dementsprechend

$$(4) \qquad \begin{cases} X_1 f = xp + \alpha U + Ap + Bq + Cr\,, \\ X_2 f = yq + \beta U + Lp + Mq + N\alpha\,, \end{cases}$$

woraus

$$0 = A\beta p + B(\beta + 1)\, q + C\beta r - L(\alpha + 1)\, p - M\alpha q - N\alpha r$$

und

$$\begin{aligned} A\beta - L(\alpha + 1) &= 0\,, \\ B(\beta + 1) - M\alpha &= 0\,, \\ C\beta - N\alpha &= 0\,. \end{aligned}$$

---

1) Die Gruppe Γ_3 gehört als Untergruppe der einfach transitiven Gruppe mit vertauschbaren projectiven Transformationen: $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{z}\mathfrak{r}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{p}$ an.

Eine ausführliche Discussion dieser Bedingungsgleichungen ersparen wir durch die folgenden Betrachtungen. Bei den vorliegenden Gruppen bleiben sicher *drei* getrennte Punkte in Ruhe, die sich in der unendlich fernen Ebene befinden; dementsprechend bleiben sicher *drei* Ebenen invariant. Existirten nun nicht mehr als jene drei invarianten Punkte, so könnten wir eine solche invariante Ebene ins Unendliche verlegen, die nur zwei invariante Punkte enthielte. Wir brauchen daher unter den Gruppen (4) nur diejenigen in Betracht zu ziehen, bei denen ein im Endlichen gelegener Punkt, etwa der Coordinatenanfang, in Ruhe bleibt; diese Gruppen besitzen aber die Form

$$X_1 f = xp + \alpha U\,, \qquad X_2 f = yq + \beta U\,.$$

Dabei können wir von dem Falle: $\alpha\beta = 0$, der nur Kegel liefert, absehen, ebenfalls von dem Falle: $\alpha = \beta = -1$, der nur Flächen zweiten Grades liefert. Da andererseits α und β gleichberechtigt sind, brauchen wir nur den Fall

$$\alpha(\alpha + 1)\beta \neq 0$$

zu discutiren. Die entsprechenden Flächen

$$\text{(IV')} \qquad x^\alpha y^\beta - K z^{\alpha+\beta+1} = 0\,,$$

die offenbar unter einander projectiv sind, gestatten die Gruppe

$$(\Gamma_4) \qquad \boxed{\begin{matrix} xp + \alpha U, & yq + \beta U \\ & \alpha\beta \neq 0 \end{matrix}}$$

Diese Gruppe ist enthalten in der Gruppe

$$xp,\ yq,\ zr,$$

die unsre Flächenschaar invariant lässt.

Offenbar können wir die Gleichung unsrer Flächen auf die symmetrische Form

$$x^\mu y^\nu z^\varrho = K$$

bringen.

Alle Flächen, die nur solche projective Transformationen gestatten, die paarweise vertauschbar sind, können, wenn diese Transformationen eine continuirliche Gruppe mit mehr als einem Parameter bilden, auf eine unter den vier folgenden Formen gebracht werden:

(I') $$y - \tfrac{1}{2}x^2 + \log z = 0$$

$$\boxed{q - zr,\quad p + xq}$$

(II') $$x - \frac{y}{z} - \log z$$

$$\boxed{p + zq,\quad p + yq + zr}$$

(III') $$y + \log(x^\alpha z) = 0$$

$$\boxed{q - zr,\quad xp - \alpha zr}$$

(IV') $$x^\alpha y^\beta - z^{\alpha+\beta+1} = 0$$

$$\boxed{xp + \alpha U,\quad yq + \beta U}$$

Diese Flächen besitzen viele merkwürdige Eigenschaften, mit denen ich mich bei verschiedenen Gelegenheiten beschäftigt habe.

Kapitel III.

Flächen, die ∞^1 projective Transformationen gestatten.

Will man alle Flächen mit ∞^1 projectiven Transformationen bestimmen und ihre Gleichungen auf kanonische Formen bringen, so muss man nach meinen allgemeinen Theorien zuerst alle infinitesimalen projectiven Transformationen auf kanonische *lineare* Formen bringen und sodann die zugehörigen Bahncurven bestimmen. Factisch sind die hierzu erforderlichen Rechnungen schon längst von d'Alembert, Cauchy und ihren Nachfolgern ausgeführt, während allerdings die *gruppentheoretische Auffassung und Verwerthung* dieser Rechnungen von mir herrührt. Ganz besonders darf ich daran erinnern, dass ich schon im Jahre 1871 zeigte, dass die Haupttangentencurven auf allen diesen Flächen durch eine einzige Quadratur gefunden werden können.

Stellt man sich die Aufgabe, für einen bestimmten n-fach ausgedehnten Raum entweder alle *eingliedrigen* projectiven Gruppen oder aber *alle* projectiven Gruppen dieses Raumes auf kanonische Formen zu bringen, so ist es, wie ich bei vielen Ge-

legenheiten gezeigt habe, praktisch zweckmässig, Schritt für Schritt vorwärts zu gehen. Man erledigt zuerst das betreffende Problem für $n = 1$, sodann dasselbe Problem für $n = 2$, indem man sich auf *lineare homogene* Transformationen beschränkt; hernach erledigt man das allgemeine Problem für $n = 2$, sodann dasselbe Problem für $n = 3$, indem man sich auf lineare homogene Transformationen beschränkt u. s. w.

Um in einfachster Weise die Zweckmässigkeit dieses successiven Verfahrens zu illustriren, stelle ich mich auf den Standpunkt, dass ich meine Bestimmung aller *linearen homogenen* infinitesimalen Transformationen in *drei* Veränderlichen als bekannt voraussetze; ausgehend von dieser Bestimmung zeige ich sodann, wie man in einfachster Weise alle infinitesimalen *projectiven* Transformationen des Raumes $x\,y\,z$ auf kanonische Formen bringen kann.

Eine infinitesimale lineare und homogene Transformation in $x\,y\,z$ lässt sich auf eine unter den folgenden kanonischen Formen bringen:

(1) $\alpha xp + \beta yq + \gamma zr \qquad (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$,

(2) $zp + yq + \alpha(xp + yq + zr)$,

(3) $zp + xq + (xp + yq + zr)$,

(4) $zp + xq$,

(5) $yq + \alpha(xp + yq + zr)$,

(6) yq,

(7) $zq + xp + yq + zr$,

(8) zq,

(9) $xp + yq + zr$,

(10) 0.

Da nun jede infinitesimale *projective* Transformation mindestens eine Ebene in Ruhe lässt, die wir ins Unendliche verlegen können, so erhalten wir *alle* infinitesimalen projectiven Transformationen, wenn wir zu den obenstehenden *zehn* linearen homogenen Transformationen einen Ausdruck von der Form

$$Ap + Bq + Cr$$

addiren. Will man sodann die gefundenen infinitesimalen *projectiven* Transformationen auf kanonische Formen bringen, so muss man einerseits die Constanten A, B und C soweit möglich particularisiren, anderseits unter allen in dieser Weise gefundenen *projectiven* Transformationen die überzähligen ausschliessen, sodass nur solche Formen bewahrt werden, die unter *projectiven* Gesichtspunkten wesentlich verschieden sind.

Ist die infinitesimale lineare Transformation

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 z) p + (a_2 x + b_2 y + c_2 z) q + (a_3 x + b_3 y + c_3 z) r \\ + Ap + Bq + Cr = Wf$$

eine unter den *zehn* oben besprochenen Transformationen, die wir aus einer kanonischen linearen homogenen Transformation durch Addition des Ausdrucks $Ap + Bq + Cr$ ableiteten, so versuchen wir in jedem einzelnen Falle durch Einführung der neuen Veränderlichen

$$x_1 = x + L\,, \quad y_1 = y + M\,, \quad z_1 = z + N$$

die Glieder *nullter* Ordnung zu particularisiren. In diesen neuen Veränderlichen erhält Wf die Form

$$\delta x_1 : \delta t = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 - (a_1 L + b_1 M + c_1 N) + A\,,$$
$$\delta y_1 : \delta t = a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 - (a_2 L + b_2 M + c_2 N) + B\,,$$
$$\delta z_1 : \delta t = a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3 z_3 - (a_3 L + b_3 M + c_3 N) + C\,.$$

Ist nun insbesondere die Determinante

$$|\, a_1 \; b_2 \; c_3 \,|$$

von Null verschieden, so lassen sich die Constanten L, M und N so wählen, dass die Gleichungen

$$a_1 L + b_1 M + c_1 N = A\,,$$
$$a_2 L + b_2 M + c_2 N = B\,,$$
$$a_3 L + b_3 M + c_3 N = C$$

bestehen. In diesem Falle ist es somit gestattet, in Wf die Constanten A, B, C ohne weiteres gleich Null zu setzen. Ist die Determinante $|\, a_1 \; b_2 \; c_3 \,|$ nicht gleich Null, so particularisirt man die Constanten A, B, C in jedem einzelnen Falle so viel wie möglich.

Nachdem wir in dieser Weise die *neuen* Transformationen Wf auf möglichst einfache Formen gebracht haben, die unter einander *innerhalb der allgemeinen linearen Gruppe* wesentlich verschieden sind, stellen wir die Frage, welche unter allen diesen Formen *innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe* wesentlich verschieden sind. Die Erledigung dieser Frage wird dadurch wesentlich vereinfacht, dass wir in jedem einzelnen Falle die bei der betreffenden Transformation Wf invarianten Punkte und Ebenen bestimmen. Zu diesem Zwecke führen wir homogene Coordinaten x, y, z, u ein, indem wir Wf die Form

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 z + Au)\, p + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + Bu)\, q \\ + (a_3 x + b_3 y + c_3 z + Cu)\, r$$

ertheilen und sodann die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + Au &= \varrho x\,, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + Bu &= \varrho y\,, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z + Cu &= \varrho z\,, \\ 0 &= \varrho u \end{aligned}$$

bilden. Die verschiedenen Wurzeln der Gleichung vierten Grades

$$\begin{vmatrix} a_1 - \varrho & b_1 & c_1 & A \\ a_2 & b_2 - \varrho & c_2 & B \\ a_3 & b_3 & c_3 - \varrho & C \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = 0$$

liefern sodann in bekannter Weise die invarianten Punkte, die je nach dem Verhalten der Unterdeterminanten, die zu den mehrfachen Wurzeln gehören, entweder isolirt sind, oder aber Gerade resp. Ebenen ausfüllen.

Wollen wir sodann die invarianten Ebenen bestimmen, so suchen wir zuerst die invarianten Geraden der unendlich fernen Ebene, und bestimmen sodann alle invarianten Ebenen derjenigen Ebenenbüschel, deren Axen die soeben besprochenen invarianten Geraden sind.

Indem wir diese Rechnungen für alle zehn Fälle durchführen, gelingt es ohne weiteres, alle infinitesimalen *projectiven* Transformationen auf kanonische Formen zu bringen.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen können wir unsre Discussion der *zehn Fälle* in knapper Form entwickeln.

§ 1.

Wir betrachten zuerst die infinitesimale Transformation:

$$\alpha x p + \beta y q + \gamma z r + A p + B q + C r$$
$$(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0 .$$

Fügen wir nun zunächst die weitere Forderung

$$\alpha \beta \gamma \neq 0$$

hinzu, so können wir $A = B = C = 0$ setzen. Zur Bestimmung der invarianten Punkte bilden wir die Gleichung vierten Grades

$$\begin{vmatrix} \alpha - \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta - \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma - \varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = 0 = -(\alpha - \varrho)(\beta - \varrho)(\gamma - \varrho)\varrho$$

mit vier verschiedenen Wurzeln, deren jede einen isolirten invarianten Punkt liefert. In diesem Falle liefern die *Ecken und Ebenen des Tetraeders*

$$x \cdot y \cdot z \cdot \infty = 0$$

vier isolirte invariante Punkte und *vier isolirte invariante Ebenen*; weitere invariante Punkte, resp. Ebenen giebt es nicht. Hiermit haben wir die infinitesimale projective Transformation

(I″) $$\alpha x p + \beta y q + \gamma z r$$
$$((\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)\alpha\beta\gamma \neq 0) ,$$

deren ∞^2 Bahncurven durch die Gleichungen

$$\frac{x^{\frac{1}{\alpha}}}{A} = \frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{B} = \frac{z^{\frac{1}{\gamma}}}{C}$$

gegeben sind. Diese Curven sind transcendent, ausgenommen wenn die beiden Verhältnisse $\alpha : \beta : \gamma$ rational sind. Ich darf daran erinnern, dass ich gezeigt habe, dass diese Curven nicht allein ∞^1 projective Transformationen, sondern auch ∞^1 dualistische Transformationen, sowie eine Reihe anderer Berührungstransformationen gestatten. Diese Bemerkung bezieht sich übrigens auch auf die folgenden Fälle.

Wir wollen sodann annehmen, dass unter den drei Constanten α, β, γ, die fortwährend verschieden sein sollen, eine etwa γ gleich Null ist. Aus dem Ausdrucke:

$$\alpha x p + \beta y q + A p + B y + C r$$
$$(\alpha - \beta)\,\alpha\beta \neq 0$$

lassen sich jetzt zwar A und B, nicht aber C wegschaffen, wir müssen daher die beiden Fälle $C \neq 0$ und $C = 0$ für sich behandeln.

Der Fall $\gamma = 0$, $C \neq 0$.

In diesem Falle können wir $C = 1$ und

(II″)
$$Wf = xp + \beta y q + r$$
$$(1 - \beta)\beta \neq 0$$

setzen. Jetzt werden die invarianten Punkte bestimmt durch die Gleichung vierten Grades:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta - \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} \equiv (1 - \varrho)(\beta - \varrho)\,\varrho^2 .$$

Die beiden einfachen Wurzeln 1 und β geben zwei isolirte invariante Punkte, die Doppelwurzel $\varrho = 0$ giebt ebenfalls, da die zugehörigen dreireihigen Unterdeterminanten nicht alle verschwinden, einen isolirten aber doppelt zählenden invarianten Punkt. Es giebt dementsprechend auch drei invariante Ebenen $x = 0$, $y = 0$ und die unendlich ferne Ebene, unter denen die letzte doppelt zählt.

Die Bahncurven von Wf sind transcendent und bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{x}{L} = \frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{M} = \frac{e^z}{N} .$$

Der Fall $\gamma = 0$, $C = 0$.

In diesem Falle können wir

(III″)
$$Wf = \alpha x p + \beta y q$$
$$(\alpha - \beta)\cdot\alpha\cdot\beta \neq 0$$

setzen. Die zugehörige Gleichung vierten Grades

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha-\varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = (\alpha-\varrho)(\beta-\varrho)\varrho^2$$

hat eine Doppelwurzel, für welche die zugehörigen dreireihigen Unterdeterminanten verschwinden. Die Doppelwurzel giebt daher eine Reihe von ∞^1 invarianten Punkten, die auf der Geraden $x = y = 0$ gelegen sind; die beiden einfachen Wurzeln geben zwei isolirte invariante Punkte; dementsprechend giebt es ein Büschel von invarianten Ebenen: $z =$ Const. und zwei isolirte invariante Ebenen $x = 0$ und $y = 0$.

Die zugehörigen Bahncurven

$$z = N, \quad \frac{x^{\frac{1}{\alpha}}}{L} = \frac{y^{\frac{1}{\beta}}}{M}$$

sind im Allgemeinen transcendent und eben. Für rationale Werthe des Verhältnisses $\alpha : \beta$ sind diese Curven *algebraisch*.

Hierher gehört insbesondere die infinitesimale *Rotation*.

§ 2.

Wir betrachten jetzt die Transformationen

$$zp + yq + \alpha(xp + yq + zr) + Ap + Bq + Cr$$

und bestimmen die zugehörigen kanonischen Formen dieser Transformation innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe. Nach unseren früheren Entwickelungen können die Constanten A, B und C gleich Null gesetzt werden, sobald wir annehmen, dass

$$\alpha(\alpha + 1) \neq 0$$

ist. Unsre infinitesimale Transformation erhält unter dieser Voraussetzung die Form

$$(\alpha x + z)p + (\alpha + 1)yq + \alpha z r\,.$$

Die zugehörige Gleichung vierten Grades

$$0=\begin{vmatrix} \alpha-\varrho & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha+1-\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = (\alpha-\varrho)^2(\alpha+1-\varrho)\varrho$$

hat zwei einfache Wurzeln und eine Doppelwurzel, für welche die zugehörigen dreireihigen Determinanten nicht alle verschwinden. Unsre Gleichung vierten Grades verhält sich also genau wie in dem zweiten Falle des vorigen Paragraphen. Daraus lässt sich nun allerdings nicht ohne weiteres schliessen, dass diese beiden Fälle identisch sind. Setzen wir aber

$$x_1=\frac{z}{y}, \quad y_1=\frac{x}{y}, \quad z_1=\frac{1}{y},$$

so besteht identisch die Gleichung

$$r+xp+wyq=z_1p_1+y_1q_1-w(x_1p_1+y_1q_1+z_1r_1)$$

und also liefert unsere Annahme $\alpha(\alpha+1)\neq 0$ wirklich nur solche Transformationen, die mit den früher gefundenen innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt sind.

Der Fall $\alpha+1=0$.

In der infinitesimalen Transformation

$$(x-z)p+zr+Ap+Bq+Cr$$

können wir A und C gleich Null, B gleich 1 oder Null setzen. Von der Annahme $B=0$ können wir aber absehen, da bei der Transformation

$$(x-z)p+zr$$

zwei unendlich ferne Punkte und alle Punkte der Geraden: $x=0$, $z=0$ invariant bleiben. Es leuchtet nämlich ein, dass wir diese Transformation bei der Discussion der Fälle (5) oder (6) wiederfinden müssen.

Wir können daher im vorliegenden Falle

$$\text{(IV'')} \qquad Wf=(x-z)p+q+zr$$

setzen. Da es von vornherein bekannt ist, dass bei dieser Transformation zwei isolirte unendlich ferne Punkte invariant sind,

und es andererseits unmittelbar klar ist, dass kein endlicher Punkt seine Lage behält, so können wir ohne weiteres behaupten, dass unsre Transformation von den früher gefundenen, deren jede mindestens drei Punkte in Ruhe lässt, wesentlich verschieden ist. Zum Ueberfluss notiren wir, dass die zugehörige Gleichung vierten Grades

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\varrho & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\varrho & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = (1-\varrho)^2 \varrho^2$$

zwei Doppelwurzeln besitzt, und dass für beide Wurzeln die zugehörigen dreireihigen Unterdeterminanten nicht alle verschwinden. Es existiren daher zwei isolirte doppeltzählende invariante Punkte

$$x = z = u = 0 \quad \text{und} \quad y = z = u = 0$$

und zwei doppeltzählende invariante Ebenen

$$z = 0 \quad \text{und} \quad z = \infty .$$

Die zugehörigen Bahncurven

$$\frac{x}{z} + \log z = a$$
$$y - \log z = b$$

sind transcendent, liegen aber auf den Flächen zweiten Grades

$$\frac{x}{z} + y = c .$$

Der Fall $\alpha = 0$.

Hat Wf die Form

$$Wf = zp + yq + Ap + Bq + Cr ,$$

so können A und B gleich Null gesetzt werden. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $C = 0$ oder $C \neq 0$ ist.

Wir wollen zunächst annehmen, dass C von Null verschieden ist, und können dann $C = 1$ und

(V″) $$Wf = zp + yq + r$$

setzen. Die Form dieser Transformation zeigt unmittelbar, dass kein im Endlichen gelegener Punkt invariant bleibt; in der unendlich fernen Ebene liegen andererseits bekanntlich zwei invariante Punkte. Bilden wir nun die Gleichung vierten Grades

$$0 = \begin{vmatrix} -\varrho & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} \equiv -\varrho^3(1-\varrho),$$

so sehen wir, dass der eine unter diesen invarianten Punkten, nämlich der unendlich ferne Punkt der x-Axe dreifach zählt, während der andere invariante Punkt nur einfach zählt. Dementsprechend existiren zwei invariante Ebenen, nämlich $u = 0$ und $y = 0$.

Die Transformation

$$zp + yq + r$$

ist daher von den früher gefundenen wesentlich verschieden.

Die zugehörigen Bahncurven, deren Gleichungen sind

$$2x - z^2 = a, \quad z - \log y = b,$$

sind transcendent, liegen aber jedesmal auf einer Fläche zweiten Grades.

Wir müssen endlich den Fall $\alpha = C = 0$ untersuchen. In diesem Falle hat unsre Transformation die Form

(VI″) $$zp + yq.$$

Die zugehörige Gleichung vierten Grades

$$0 = \begin{vmatrix} -\varrho & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} \equiv -\varrho^3(1-\varrho)$$

hat eine einfache Wurzel, die einen isolirten invarianten Punkt $x = z = u = 0$ liefert, und eine dreifache Wurzel, die eine invariante Punktreihe $z = 0$, $y = 0$ liefert. Dementsprechend bleibt eine isolirte Ebene $y = 0$ und alle Ebenen des Büschels $z = C$ invariant. Die Transformation $zp + yq$ ist daher wesentlich verschieden von den früher gefundenen.

Die zugehörigen Bahncurven

$$z = a\,, \quad \frac{x}{z} - \log y = b$$

sind transcendente ebene Curven.

§ 3.

Wir kommen jetzt zu den Transformationen

$$zp + xq + \alpha(xp + yq + zr) + Ap + Bq + Cr$$

und brauchen dabei nur die Fälle $\alpha = 1$, und $\alpha = 0$ zu berücksichtigen.

Der Fall $\alpha = 1$.

Ist $\alpha = 1$, so können wir

$$A = B = C = 0$$

setzen. Die Punkte der unendlich fernen Ebene beschreiben Kegelschnitte

$$u = 0\,, \quad 2yz - x^2 = cz^2\,,$$

die einander in einem gemeinsamen Punkte (dem unendlich fernen Punkt der y-Axe) berühren. Denken wir uns insbesondere, dass einer unter diesen Kegelschnitten grade der imaginäre Kegelkreis, so ist unsre Transformation eine infinitesimale Spiraltransformation.

Die bei der Transformation

$$zp + xq + xp + yq + zr$$

invarianten Punkte sind bestimmt durch die algebraische Gleichung vierten Grades

$$\begin{vmatrix} 1-\varrho & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = (\varrho - 1)^3 \varrho\,,$$

deren einfache Wurzel $\varrho = 0$ den isolirten invarianten Punkt $x = y = z = 0$ liefert; die dreifache Wurzel $\varrho = 1$, für welche die zugehörigen dreireihigen Determinanten nicht sämmtlich

verschwinden, liefern ebenfalls einen isolirten invarianten Punkt, der aber dreifach zählt. Dementsprechend existiren zwei invariante Ebenen:

$$z = 0 \quad \text{und} \quad z = \infty,$$

unter denen die eine dreifach zählt.

Die Bahncurven werden bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{x}{z} - \log z = a$$

$$\frac{y}{z} + \frac{1}{2}(\log z)^2 - \frac{x}{z}\log z = b$$

und sind somit transcendente Curven. Es ist bemerkenswerth, dass eine jede unter diesen Curven auf einer gewissen Fläche zweiten Grades liegt, deren Gleichung ist:

$$\frac{y}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{z}\right)^2 = b.$$

Nach dem Verhalten der Determinante $\Delta(\varrho)$ und ihrer Unterdeterminanten liegt es nahe zu vermuthen, dass unsre Transformation

$$zp + xq + xp + yq + zr$$

mit der früher gefundenen Transformation

$$r_1 + z_1 p_1 + y_1 q_1$$

innerhalb der allgemeinen projectiven Gruppe gleichberechtigt ist. So ist auch wirklich der Fall. Setzen wir in der That

$$x_1 = \frac{y}{z}, \quad y_1 = \frac{1}{z}, \quad z_1 = -\frac{x}{z},$$

so besteht die Gleichung

$$(x+z)\frac{\partial f}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = -\left(z_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial z_1}\right)$$

identisch für jedes f.

Der hier vorliegende Fall giebt uns also keine neue infinitesimale projective Transformation.

Der Fall $\alpha = 0$.

Indem wir jetzt die Transformationen:

$$zp + xq + Ap + Bq + Cr$$

untersuchen wollen, bemerken wir zunächst, dass wir unter allen Umständen

$$A = B = 0$$

setzen können, während die beiden Fälle $C \neq 0$ und $C = 0$ für sich behandelt werden müssen.

Ist $C \neq 0$, so können wir $C = 1$ setzen und erhalten somit die Transformation

$$zp + xq + r.$$

Zur Bestimmung der zugehörigen invarianten Punkte bilden wir die Gleichung

$$\Delta(\varrho) = 0 = \begin{vmatrix} -\varrho & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = \varrho^4,$$

die eine vierfache Wurzel besitzt, für welche eine dreireihige Unterdeterminante nicht verschwindet. Es bleibt daher ein und *nur ein Punkt*, nämlich der unendlich ferne Punkt der y-Axe *in Ruhe*; dementsprechend ist die unendlich ferne Ebene die einzige invariante Ebene.

Es geht hieraus hervor, dass die infinitesimale Transformation

(VII'') $$r + zp + xq$$

von den früher gefundenen wesentlich verschieden ist.

Die zugehörigen *Bahncurven* werden bestimmt durch die beiden Gleichungen:

$$x - \tfrac{1}{2} z^2 = a$$
$$y - xz + \tfrac{1}{3} z^3 = b$$

und sind daher *Curven dritter Ordnung*, die einander in einem Punkte hyperosculiren.

Es erübrigt, den Fall

$$\alpha = 0, \quad C = 0$$

zu discutiren. Wollen wir die bei der Transformation

(VIII'') $$zp + xq$$

invarianten Punkte bestimmen, so bilden wir wie gewöhnlich die Gleichung

$$0 = \Delta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} -\varrho & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = \varrho^4,$$

deren vierfache Wurzel $\varrho = 0$ ∞^1 invariante Punkte bestimmt, die die Geraden $z = 0$, $x = 0$ ausfüllen. Dies folgt daraus, dass für $\varrho = 0$ alle zweireihigen Determinanten ausgenommen eine verschwinden. Es bleiben andererseits ∞^1 Ebenen in Ruhe, nämlich alle Ebenen des Büschels $z =$ Const.

Die zugehörigen Bahncurven

$$z = a, \quad 2zy - x^2 = b$$

sind ∞^2 Kegelschnitte, die ein Linienelement gemein haben. Verlegen wir einen unter diesen Kegelschnitten in den imaginären Kugelkreis, so wird unsre Transformation eine imaginäre Rotation, deren Axe den Kugelkreis schneidet.

Wir halten es für überflüssig, die noch übrigen Fälle zu discutiren.

SITZUNG VOM 11. APRIL 1895.

Vorgetragen in der Sitzung vom 5. Februar 1894, eingeliefert am 11. April 1895.

Sophus Lie, *Verwerthung des Gruppenbegriffes für Differentialgleichungen.* **I.**

(Die Theorien dieser Abhandlung theilte ich der Kgl. Sächs. Ges. d. W. in der Sitzung vom 5. Februar 1894 mit. In meinen Vorlesungen im Wintersemester 1893—1894 entwickelte ich sie ausführlich und zeigte überdies ihre Tragweite durch mehrere Anwendungen, die in dieser Abhandlung nicht Platz finden konnten. Im Uebrigen erlaube ich mir hervorzuheben, dass alle diese Theorien *in knapper oder specieller Form* im norwegischen Archiv und den Verh. d. Ges. d. W. zu Christiania 1882—1884 skizzirt sind. In der Fortsetzung dieser Arbeit werde ich u. A. beweisen, dass meine aus den Jahren 1872—1874 herrührende Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen wirklich, wie oft von mir angekündigt (vgl. z. B. Math. Ann. Bd. XI), das Integrationsgeschäft auf Hülfsgleichungen zurückführt, deren Ordnung sich nicht erniedrigen lässt.. Einen Theil dieses Beweises findet man übrigens schon in Math. Ann. Bd. XXV. Die neueren Untersuchungen über die Zusammensetzung der endlichen Gruppen haben mir gestattet, wie ich in meinen Vorlesungen schon öfter hervorgehoben habe, meine ursprünglichen Resultate in einem Punkte zu vervollständigen.

In unserem Jahrhundert treten die Begriffe Substitution und Substitutionsgruppe, Transformation und Transformationsgruppe, Operation und Operationsgruppe, Invariante, Differentialvariante und Differentialparameter immer deutlicher als die wichtigsten Begriffe der Mathematik hervor. Während seit Descartes die *Curve*, als Bild der Function *einer* Veränderlichen, in fast zweihundert Jahren das wichtigste Object für die Untersuchungen der Mathematiker darbot, während andrerseits in unserem Jahrhundert der Begriff Transformation zunächst als Hülfsmittel bei dem Studium der Curven und Flächen hervortrat, entwickelt sich in späteren Decennien nach und nach eine *allgemeine Trans-*

formationstheorie, deren Element die Transformation selbst darstellt, während die Transformationsschaaren, insbesondere die Transformationsgruppen, das Object liefern.

Die allgemeine Transformationstheorie ist in *dem* Sinne eine *analytische* Disciplin, dass sie durch rein analytische Hülfsmittel entwickelt werden kann. Sie hat aber mit der Geometrie das wesentliche Merkmal gemein, dass sie sich in grosser Ausdehnung einer nicht allein *begrifflichen* sondern geradezu *anschaulichen* Auffassung darbietet.

Setzen wir den Unterschied zwischen der analytischen und der synthetischen Methode darin, dass der Synthetiker *mit den Begriffen räsonnirt*, der Analytiker *nach festen Regeln rechnet*, so können wir eine wesentliche Eigenschaft der Transformationstheorie darin sehen, dass sich ihre Sätze ebensowohl *analytisch elegant* wie *begrifflich* ja *anschaulich klar* entwickeln lassen. Hierauf beruht es, dass die Transformationstheorie wesentlich einfacher als die Substitutionstheorie ist.

Wir unterlassen nicht ausdrücklich hervorzuheben, auf der einen Seite, dass verschiedene mathematische Disciplinen zur Entwickelung [1]) der Transformationstheorie beigetragen haben, auf der andern Seite, dass schon jetzt viele Gebiete der Mathematik von der Transformationstheorie wesentliche Förderung erhalten haben.

Unter allen Disciplinen der Mathematik ist *die Theorie der Differentialgleichungen* die wichtigste. Alle Zweige der Physik stellen uns Probleme, die auf die Integration von Differentialgleichungen herauskommen. Es giebt ja überhaupt die Theorie der Differentialgleichungen den Weg zur Erklärung aller elementaren Naturphänomene, die Zeit brauchen. Hat somit die Theorie der Differentialgleichungen eine unendliche *praktische* Bedeutung, so hat sie auf der andern Seite darin eine entsprechende *theoretische* Wichtigkeit, dass sie in rationeller Weise zum Studium neuer wichtiger Functionen, bez. Functionsclassen leitet.

---

1) Beispielsweise nenne ich, dass die Potentialtheorie mich seinerseits zur Entdeckung des Zusammenhanges zwischen dem EULER'schen und JACOBI'schen Multiplicator und dem Begriffe: infinitesimale Transformation, indirect also zur Entdeckung des Hauptsatzes meiner Gruppentheorie führte.

Nachdem ich seinerzeit bemerkt hatte, dass die älteren classischen Integrationstheorien sich entweder direct auf solche Differentialgleichungen beziehen, die gegebene Schaaren von Transformationen gestatten oder aber unter anderen Gesichtspunkten in elementarer Weise mit den Begriffen Transformation und Gruppe in Verbindung gebracht werden können, stellte ich mir die Aufgabe, überhaupt den Begriff der Transformation für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen zu verwerthen. Zu diesem Zwecke begründete ich in den Jahren 1870—1873 einerseits meine allgemeine Theorie der Berührungstransformationen, deren Wichtigkeit durch fundamentale geometrische Anwendungen illustrirt wurde, andrerseits meine allgemeine Theorie der Transformationsgruppen, die zu einer Reihe merkwürdiger Integrationstheorien führte. Die Publication meiner Vorlesungen und meines dreibändigen Werkes über Transformationsgruppen sowie die Vorbereitung mehrerer grösserer geometrischer Werke[1]) hat mir in den letzten zehn Jahren nicht gestattet, meine Ideen über die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen mit voller Kraft zu entwickeln. Unter diesen Umständen erschien es zweckmässig, nach und nach in knapper Form einzelne Abschnitte meiner allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen zu veröffentlichen. Dabei liegt es allerdings in der Natur der Sache, dass es mir unmöglich gewesen ist, in diesen kurzgefassten Mittheilungen alle sich darbietenden Fragen in erschöpfender Weise zu behandeln. Hoffentlich wird es mir aber einmal möglich werden, auch meine Untersuchungen über Differentialgleichungen *in ausführlicher und systematischer Darstellung* den Mathematikern vorzulegen.

Der Schwerpunkt der folgenden Arbeit liegt in den Theorien, die in den beiden ersten Kapiteln entwickelt werden. Die Anwendungen, die in den folgenden Kapiteln gegeben werden, sollen zur Illustration dieser Theorien dienen. Es liegt in der Natur der Sache, dass die Zahl der Anwendungen unbegrenzt ist. Ich habe solche Anwendungen gewählt, die nach meiner Ansicht für die meisten Leser besonders lehrreich sein werden.

---

1) Unter dem Titel: *Geometrie der Berührungstransformationen* werde ich, unterstützt von Herrn Dr. Scheffers, ein mehrbändiges Werk veröffentlichen, das eine ausführliche und systematische Darstellung und Verwerthung meiner ältesten geometrischen Ideen geben soll. Zwei ähnliche geometrische Werke sollen meiner Theorie der *Translationsflächen* und der *Verwerthung der Gruppentheorie für Geometrie* gewidmet werden.

Kapitel 1.

Reduction der allgemeinen infinitesimalen Transformation einer unendlichen Gruppe auf eine gegebene kanonische Form.

In früheren Publicationen zeigte ich, dass die Integration einer vorgelegten linearen partiellen Differentialgleichung

$$0 = Af \equiv \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

immer dann geleistet werden kann, wenn diejenige infinitesimale Transformation, deren Symbol Af ist, einer endlichen continuirlichen Gruppe: $X_1 f \ldots X_r f$ mit bekannten endlichen Transformationen

$$x_k' = f_k(x_1 \ldots x_n\, a_1 \ldots a_r)$$
$$(k = 1, 2 \ldots n)$$

angehört.

Da dieser Satz eine hervorragende Wichtigkeit besitzt, lag es nahe sich die Frage vorzulegen, ob er auch dann gültig bleibt, wenn die infinitesimale Transformation Af einer *unendlichen* Gruppe angehört, deren infinitesimale oder endliche Transformationen entweder bekannt oder aber durch Differentialgleichungen definirt sind.

Unter den hiermit angedeuteten Problemen greifen wir zunächst das folgende heraus:

Problem I. *Es wird vorausgesetzt, dass man sowohl die Definitionsgleichungen*

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1}, \cdots\right) = B_k(x_1 \cdots x_n)$$

einer unendlichen Gruppe Γ wie die allgemeine infinitesimale Transformation

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

derselben Gruppe kennt. Es wird verlangt, die Integration der allgemeinen Gleichung $Xf = 0$ auf die einfachsten Hülfsgleichungen zurückzuführen.

Ehe wir dieses allgemeine Problem in Angriff nehmen, wollen wir zeigen einerseits, dass mehrere besonders wichtige Fälle dieses Problems schon längst von berühmten Mathematikern

behandelt worden sind, andrerseits, dass andere nicht minder wichtige Fälle in meinen älteren Arbeiten erledigt worden sind.

Die bisherige Theorie der partiellen Differentialgleichungen *erster* Ordnung ist weiter nichts als ein specieller Fall des aufgestellten Problems. Ist nämlich etwa

$$\varphi\,(x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n) = a$$

eine vorgelegte partielle Differentialgleichung erster Ordnung, so deckt sich nach PFAFF und CAUCHY die Integration der Gleichung $\varphi = a$ mit derjenigen der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(\varphi f) = 0$$

in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$. Nun aber ist nach meinen Untersuchungen (φf) das Symbol einer infinitesimalen Berührungstransformation und dabei bilden alle endlichen Berührungstransformationen:

$$x_k' = X_k(x,\, p)\,, \quad p_k' = P_k(x,\, p)$$

eine unendliche Gruppe, deren Definitionsgleichungen, wie ich längst gezeigt habe, gerade die bekannten Gleichungen

$$0 = (X_i\, X_k) = (X_i\, P_k) = (P_i\, P_k) = (P_i\, X_i) - 1$$

sind. Gerade diese Auffassung war seinerzeit die Grundlage für *meine Discussion*[1]) *der Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* $\varphi(x,\, p) = 0$.

Ein anderes, ebenfalls classisches Beispiel meines allgemeinen Problems liefert JACOBI's Theorie des *letzten Multiplicators*, die wir in einem folgenden Kapitel (Kap. 3) unter Zugrundelegung einer gruppentheoretischen Auffassung entwickeln werden. Factisch besteht JACOBI's Theorie darin, dass bei der Integration einer Gleichung

$$(1)\qquad Af = 0 = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\,,$$

die die Bedingung

$$(2)\qquad \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} = 0$$

---

1) Ges. d. W. zu Christiania, Januar 1875; Math. Ann. Bd. XI, S. 529 u. ff.

erfüllt, die Auffindung der *letzten Lösung* durch eine *Quadratur* geleistet wird.

Nun aber ist der allgemeine Ausdruck Af, der die Gleichung (1) erfüllt, gerade das allgemeine Symbol einer infinitesimalen Transformation derjenigen unendlichen Gruppe, deren Transformationen

$$\mathfrak{x}_k = X_k(x_1 \dots x_n)$$

die Bedingung

$$\sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = 1$$

erfüllen und somit alle Volumina des Raumes $x_1 \dots x_n$ invariant lassen. Es definirt ja die infinitesimale Transformation Af, unter der gemachten Annahme, die allgemeinste *stationäre Strömung eines incompressiblen Fluidums* des n-dimensionalen Raumes $x_1 \dots x_n$.

Indem wir die Integration der allgemeinen Gleichung $Af = 0$, die die Bedingung (2) erfüllt, als einen speciellen Fall unseres Problems auffassen, finden wir das JACOBI'sche Resultat wieder. Unsere Behandlung dürfte aber tiefer als die JACOBI'sche in das Wesen der Sache hineinführen. Wir werden nämlich nicht allein erkennen, worauf die betreffende Integrationsvereinfachung beruht, sondern zugleich beweisen, dass eine weitergehende Integrationserniedrigung nicht erreicht werden kann.

In Kap. 4 beschäftigen wir uns mit allen Gleichungen

$$Xf = 0 = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

die die n Bedingungen

$$(3) \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}\right) = 0$$

$$(k = 1, 2 \dots n)$$

erfüllen. Die hierdurch definirten Ausdrücke Xf sind die allgemeinsten infinitesimalen Transformationen einer gewissen unendlichen Gruppe, deren endliche Transformationen dadurch charakterisirt sind, dass sie alle Volumina nach demselben Verhältniss ändern.

1) Wenn Xf die Bedingungen (3) erfüllt, so lässt sich die zugehörige eingliedrige Gruppe als *allgemeiner analytischer Ausdruck einer stationären Strömung eines gasartigen Fluidums auffassen.*

Ein weiteres Beispiel leistet *meine allgemeine Integrationstheorie solcher simultanen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, die Fundamentallösungen besitzen.* Im Jahre 1882 betrachtete ich überhaupt lineare partielle Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{\partial f}{\partial u} + \sum_1^r {}^k \, U_k(u) X_k f = 0 \, ,$$

indem ich die Annahme hinzufügte, dass die r infinitesimalen Transformationen

$$X_k f = \sum_1^n {}^i \, \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

eine r-gliedrige Gruppe erzeugen. Für derartige lineare partielle Differentialgleichungen entwickelte ich eine schöne Integrationstheorie, indem ich das Integrationsproblem auf die Integration eines vollständigen Systems mit einer bekannten Gruppe zurückführte. Bei dieser Gelegenheit richtete ich die Aufmerksamkeit darauf, dass *der Ausdruck*

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial u} + \sum_1^r {}^k \, U_k(u) \, X_k f$$

sich auffassen lässt als die allgemeine infinitesimale Transformation einer unendlichen Gruppe in den $n+1$ Veränderlichen

$$x_1 \ldots x_n , \; u \, .$$

Unter den Transformationen dieser Gruppe findet sich insbesondere die infinitesimale Translation $\frac{\partial f}{\partial u}$. Sind nun

$$x_k' = f_k(x_1 \ldots x_n \, a_1 \ldots a_r)$$

die endlichen Gleichungen der *r-gliedrigen* Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$, so sind die Relationen

$$x_k' = f_k(x_1 \ldots x_n \, A_1(u) \ldots A_r(u))$$
$$u' = u + c \, ,$$

mit den willkürlichen Functionen $A_1(u) \ldots A_r(u)$ von u die endlichen Gleichungen der unendlichen Gruppe (1). Factisch war auch der Ausgangspunkt meiner alten Behandlung des vorliegen-

den Integrationsproblems die Bemerkung, dass jede infinitesimale Transformation

$$\frac{\partial f}{\partial u} + U_1 X_1 f + \cdots + U_r X_r f$$

durch passend gewählte Transformationen

$$x_k' = f_k(x_1 \ldots x_n A_1(u) \ldots A_r(u))$$
$$u' = u$$

auf die Form

$$\frac{\partial f}{\partial u}$$

gebracht werden kann. Hiermit ist nachgewiesen, dass diese meine alte Integrationstheorie wirklich einen speciellen, besonders interessanten Fall meines oben aufgestellten allgemeinen Problems I erledigt.

Ein Beispiel liefert endlich auch meine Integrationstheorie einer linearen partiellen Differentialgleichung

$$Af = 0 = \sum \alpha_k (x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

die r bekannte infinitesimale Transformationen gestattet, die Relationen von der Form

$$X_i X_k f - X_k X_i f = \sum c_{iks} X_s f + \varrho_{ik}(x) Af$$

erfüllen. Durch eine Umformung konnte ich nämlich erreichen, dass Relationen von der einfacheren Form

$$(X_k A) = 0\,, \quad (X_i X_k) = \sum c_{iks} X_s f$$

bestehen; nach dieser Umformung erzeugen aber die $r + 1$ infinitesimalen Transformationen

$$Af,\ X_1 f \ldots X_r f$$

eine $(r + 1)$-gliedrige Gruppe, unter deren Transformationen sich insbesondere Af findet. Doch muss berücksichtigt werden, dass dieses letzte Problem insofern einen ganz anderen Charakter hat, als *die betreffende Gruppe endlich* ist. Hierüber mehr später.

Indem wir jetzt unserem oben aufgestellten Probleme näher treten, finden wir es zweckmässig ihm zuerst eine neue Form

zu geben; dadurch wird es factisch *präciser* und *einer exacten Behandlung zugänglich.*

Wir erinnern dann zuerst daran, dass *wir immer Integrationsprobleme, die sich auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung beziehen, als Transformationsprobleme auffassen.* Handelt es sich insbesondere darum, die allgemeine *Gleichung*:

$$Xf = 0 = \sum^{i} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

zu integriren, so hebe ich immer hervor, dass sich dieses Problem damit deckt: die infinitesimale Transformation Xf auf die Form

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n} \equiv Xf$$

in den neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ zu bringen. Es sind ja $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-1}$ weiter nichts als ein System Lösungen der Gleichung $Xf = 0$, während $\mathfrak{x}_n$ als eine beliebige Lösung der Gleichung $Xf = 1$ durch *Quadratur* gefunden wird, sobald $Xf = 0$ integrirt ist.

Die Sache steht daher so, dass die Reduction der infinitesimalen Transformation Xf auf die Normalform $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ mit der Integration der Gleichung $Xf = 0$ zusammen mit einer Quadratur sich deckt. Betrachtet man daher eine Quadratur als eine ausführbare Operation, so kann man, und das thun wir im Allgemeinen, *das Problem, die allgemeine Gleichung $Xf = 0$ zu integriren, durch ein Transformationsproblem ersetzen, nämlich das Problem Xf auf die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}$ zu bringen.*

Dieses neue Problem ist insofern *präciser* als das urspüngliche, wie alle Gleichungen von der Form $\varrho Xf = 0$ aequivalent sind, während zwei unabhängige Transformationen von der Form ϱXf zwar immer *dieselben Bahncurven* haben, doch aber *verschiedene eingliedrige Gruppen* erzeugen.

Liegt nun eine beliebige unendliche Gruppe Γ vor, deren infinitesimale Transformationen Xf bekannt sind, und soll man eine allgemeine Integrationsmethode für die allgemeine Gleichung $Xf = 0$ entwickeln, so können wir ohne wesentliche Beschränkung annehmen, dass wir von vornherein eine infinitesimale

Transformation $\overline{X}f$ unserer Gruppe kennen, die innerhalb der Gruppe Γ mit der vorliegenden Transformation Xf *gleichberechtigt* ist. Ja wir können sogar annehmen, dass unsere unendliche Gruppe schon in einer solchen Form vorliegt, dass sie die infinitesimale Transformation $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ enthält und dass überdies Xf mit $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ innerhalb der Gruppe *gleichberechtigt* ist.

Auf die Frage, ob die beiden hier gemachten Annahmen wirklich keine wesentliche Beschränkung unseres Problems involviren, wollen wir hier gar nicht eingehen. Dagegen wollen wir auf Gesichtspunkte aufmerksam machen, die bei tieferen gruppentheoretischen Untersuchungen eine hervorragende Wichtigkeit besitzen.

Wir besprachen neuerdings den von mir längst formulirten Satz, dass jede infinitesimale Transformation Xf durch Einführung passender unabhängiger Veränderlicher die kanonische Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ erhalten kann. Für einen gruppentheoretischen Gesichtspunkt kommt dieser Satz darauf hinaus, dass *zwei beliebige infinitesimale Transformationen der unendlichen Gruppe aller Punkttransformationen mit einander innerhalb der Gruppe gleichberechtigt sind.* Wir fügen hinzu, dass die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen genau dieselbe Eigenschaft besitzt.

Meine Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen zeigt nun, dass diese Eigenschaft keiner *endlichen* Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ zukommt. Bezeichnen wir nämlich die infinitesimalen Transformationen der zugehörigen adjungirten Gruppe, wie bei früheren Gelegenheiten, mit

$$E_k f = \varepsilon_{k1} \frac{\partial f}{\partial e_1} + \cdots + \varepsilon_{kr} \frac{\partial f}{\partial e_r}, \quad (k = 1, 2 \dots r),$$

wobei die Identität

$$e_1 E_1 f + e_2 E_2 f + \cdots + e_r E_r f \equiv 0$$

besteht, so verschwindet unter den r-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left| \begin{array}{ccccc} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdot & \cdot & \varepsilon_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{r1} & \varepsilon_{r2} & \cdot & \cdot & \varepsilon_{rr} \\ e_1 & e_2 & \cdot & \cdot & e_r \end{array} \right|$$

sicher eine, nämlich $|\varepsilon_{ik}|$ identisch, während die übrigen, wie ich fand, die Form

$$e_k J(e_1 e_2 \dots e_r)$$

besitzen, wo J eine ganze Function $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades in den e darstellt. War nun J identisch gleich Null, so besass die adjungirte Gruppe $E_1 f \dots E_r f$ mindestens eine Invariante nullter Ordnung in $e_1 \dots e_r$, und dann ordneten sich alle infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_k X_k f$ derart in unendlich vielen Schaaren, dass zwei Transformationen, die verschiedenen Schaaren angehörten, nicht mit einander innerhalb der Gruppe $X_1 f \dots X_r f$ gleichberechtigt sind.

Verschwindet dagegen die Invariante J nicht identisch, so definirt $J = 0$ eine invariante Schaar von infinitesimalen Transformationen $e_1 X_1 f + \cdots + e_r X_r f$. Zwei Transformationen, die alle beide dieser Schaar nicht angehören, sind unter einander innerhalb der Gruppe gleichberechtigt. Dies ist dagegen nicht der Fall mit zwei infinitesimalen Transformationen, unter denen die eine der invarianten Schaar $J = 0$ angehört, die andere dagegen nicht.

Es giebt daher keine endliche Gruppe $X_1 f \dots X_r f$, deren sämmtliche infinitesimalen Transformationen paarweise unter einander innerhalb der Gruppe gleichberechtigt sind.

Führen wir, wenn auch nur für einen Augenblick, die Bezeichnung *demokratisch* für diejenigen Gruppen ein, deren sämmtliche infinitesimalen Transformationen unter einander innerhalb der Gruppe gleichberechtigt sind, bezeichnen wir andererseits die nicht demokratischen Gruppen als *aristokratisch*, so können wir sagen:

Die unendliche Gruppe aller Punkttransformationen ist demokratisch.

Ferner:

Jede endliche Gruppe ist aristokratisch.

Aus meinen alten Untersuchungen ergiebt sich noch der Satz:

Die unendliche Gruppe aller Berührungstransformationen ist demokratisch.

Wir beweisen später, dass auch die unendliche Gruppe, deren Transformationen alle Volumina invariant lassen, demokratisch ist. Dagegen werden wir finden, dass die Gruppe, deren

Transformationen alle Volumina nach demselben Verhältnisse ändern, aristokratisch ist.

Es zerfallen überhaupt alle unendlichen Gruppen in zwei grosse Kategorien: in *demokratische* und *aristokratische* Gruppen.

Hierbei ist nun allerdings wohl zu beachten, dass die aristokratischen Gruppen (unter denen sich, wie schon gesagt, alle endlichen Gruppen finden) in viele getrennte Kategorien zerfallen. Die hiermit angedeutete Classification beruht für die endlichen Gruppen auf den Eigenschaften der adjungirten Gruppe oder wenn man will, auf der *Zusammensetzung* der Gruppe. Für die unendlichen Gruppen existirt der Begriff adjungirte Gruppe nicht mehr, wohl aber der Begriff Zusammensetzung. Hier können wir aber nicht auf die Ausdehnung des Begriffs Zusammensetzung zu den unendlichen Gruppen eingehen. Wir begnügen uns mit den folgenden Bemerkungen.

Bei Untersuchungen über unendliche Gruppen kommt man oft in die Lage, dass man alle in der Gruppe enthaltenen *kleinsten invarianten Schaaren* von Transformationen bestimmen muss. Sind die Gleichungen

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k(x_1 \cdots x_n)$$
$$k = 1, 2 \ldots n$$

die Definitionsgleichungen der betreffenden Gruppe, so wird die angeregte Frage dadurch erledigt, dass man alle Gleichungssysteme

$$J_k = B_k, \quad \Omega_i\left(x_1 \cdots x_n \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \cdots\right) = 0$$

aufsucht, die gegenüber den Transformationen T der Gruppe invariant sind; dabei ist es unsre Voraussetzung, dass die Transformationen T sowohl auf die x wie auf die $\mathfrak{x}$ und zwar *cogredient* ausgeführt werden. Oder aber man kann in entsprechender Weise die kleinsten invarianten Schaaren von *infinitesimalen* Transformationen der Gruppe suchen. In beiden Fällen giebt meine Theorie der Differentialinvarianten die theoretische Erledigung der Frage.

Indem wir nun zur Behandlung des aufgestellten Problems I zurückkehren, wollen wir, um die Sprache zu erleichtern, uns wie schon gesagt auf unendliche Gruppen beschränken, die in einer solchen Form vorliegen, dass sich eine infinitesimale *Translation* $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ unter den Transformationen der Gruppe findet. Wir *stellen uns die Frage, wie alle infinitesimalen Transformationen* Xf *einer Gruppe* Γ, *die innerhalb der Gruppe mit* $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ *gleichberechtigt sind, in einfachster Weise durch eine Transformation der Gruppe auf diese kanonische Form gebracht werden können.*

Wir denken uns also eine beliebige infinitesimale Transformation

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

unserer Gruppe vorgelegt, die auf die Form

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

gebracht werden kann und zwar vermöge einer Transformation

$$\mathfrak{x}_k = F_k(x_1 \ldots x_n)$$

der Gruppe. Wir stellen uns die Aufgabe, alle Transformationen $\mathfrak{x}_k = F_k$ unserer Gruppe zu finden, vermöge deren die Gleichung

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

identisch, d. h. für jedes f besteht.

Da die Definitionsgleichungen

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k(x_1 \cdots x_n)$$

unserer Gruppe bekannt sind, so können wir unsere Forderung dadurch analytisch formuliren, dass wir n unabhängige Functionen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ von $x_1 \ldots x_n$ suchen, die die Gleichungen

$$(5) \quad \begin{cases} J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \dfrac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k(x_1 \cdots x_n) \\ X\mathfrak{x}_1 = 0\,, \quad X\mathfrak{x}_r = 0 \cdots X\mathfrak{x}_{n-1} = 0\,, \quad X\mathfrak{x}_n = 1 \end{cases}$$

erfüllen.

Das hiermit aufgestellte System von Differentialgleichungen gehört nun, wie wir zeigen wollen, einer ausgedehnten und merkwürdigen Kategorie von Problemen an, die von mir schon oft untersucht wurde und die dadurch charakterisirt wird, dass das allgemeinste System Lösungen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ sich vermöge eines particularen Systems Lösungen $\bar{\mathfrak{x}}_1 \ldots \bar{\mathfrak{x}}_n$ durch Gleichungen

$$\mathfrak{x}_k = \Phi_k(\bar{\mathfrak{x}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{x}}_n)$$

ausdrückt, die eine Gruppe definiren.

Wir wolllen annehmen, dass die beiden Transformationen

(T) $$\mathfrak{x}_k = F_k(x_1 \dots x_n)$$

und

($\bar{\text{T}}$) $$\bar{\mathfrak{x}}_k = F_k(x_1 \dots x_n)$$

alle beide unserer Gruppe Γ angehören und überdies Xf auf die verlangte Form bringen, sodass die beiden Relationen

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}, \quad Xf = \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathfrak{x}}_n}$$

identisch bestehen. Hieraus folgt, dass die durch Elimination der x gefundene Transformation

$$\mathfrak{x}_k = \Phi_k(\bar{\mathfrak{x}}_1 \dots \bar{\mathfrak{x}}_n)$$

unsrer Gruppe, deren Symbol $T\bar{T}^{-1}$ ist, sich dadurch charakterisiren lässt, dass sie mit der infinitesimalen Transformation $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ *vertauschbar* ist. Nun aber wissen wir, dass alle Transformationen einer Gruppe, die mit einer bestimmten (infinitesimalen) Transformation (derselben Gruppe) vertauschbar sind, eine *Untergruppe* bilden. Es bilden daher alle Transformationen

$$\mathfrak{x}_k = \Phi_k(\bar{\mathfrak{x}}_1 \dots \bar{\mathfrak{x}}_n)$$

eine Untergruppe G.

Diejenigen Differentialgleichungen

(5) $$\begin{cases} J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k(x_1 \cdots x_n) \\ X\mathfrak{x}_1 = 0, \quad \cdots X\mathfrak{x}_{n-1} = 0, \quad X\mathfrak{x} = 1, \end{cases}$$

die alle Transformationen $\mathfrak{x}_k = F_k(x_1 \cdots x_n)$ *der Gruppe* Γ *bestimmen, die* Xf *auf die kanonische Form* $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ *bringen, geniessen also wirklich die angekündigte Eigenschaft: es werden die allgemeinsten Lösungen* $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ *aus einem speciellen Lösungssystem* $\bar{\mathfrak{x}}_1 \dots \bar{\mathfrak{x}}_n$ *durch Gleichungen*

$$\mathfrak{x}_k = \Phi_k(\bar{\mathfrak{x}}_1 \dots \bar{\mathfrak{x}}_n)$$

abgeleitet, die ihrerseits eine Gruppe G bilden. Diese Gruppe G besteht aus allen Transformationen der Gruppe Γ, *die mit* $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ *vertauschbar sind.*

Es ist nun leicht zu erkennen, dass diese neue Gruppe G sich nie auf die identische Transformation reduciren kann; es ist ja die infinitesimale Transformation $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ immer mit sich selbst vertauschbar.

Der einfachste Fall ist also der, dass die Gruppe G keine andere infinitesimale Transformation als $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ selbst enthält. In diesem Falle enthalten die Integralgleichungen

$$\mathfrak{x}_1 = \bar{\mathfrak{x}}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1} = \bar{\mathfrak{x}}_{n-1}, \quad \mathfrak{x}_n = \bar{\mathfrak{x}}_n + a,$$

in denen $\bar{\mathfrak{x}}_1 \ldots \bar{\mathfrak{x}}_n$ ganz bestimmte Functionen der x bezeichnen, keine anderen willkürlichen Elemente, als eine einzige Integrationsconstante a, die überdies additiv auftritt. Die Integration des Gleichungssystems (5) reducirt sich daher in diesem Fall auf eine einzige Quadratur.

Enthält daher eine continuirliche Gruppe Γ, deren Definitionsgleichungen $J_k = B_k$ und infinitesimale Transformationen Xf bekannt sind, die Transformation $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$, die überdies mit keiner anderen infinitesimalen Transformation der Gruppe vertauschbar ist, so genügt eine Quadratur, um irgend eine mit $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ gleichberechtigte Transformation Xf auf diese kanonische Form zu bringen.

Zur Illustration dieses sehr einfachen Satzes betrachten wir die unendliche Gruppe

$$\xi(x)p - \xi'(x)yq,$$

unter deren infinitesimalen Transformationen sich keine zwei finden lassen, die mit einander vertauschbar sind. Die zugehörigen Definitionsgleichungen besitzen die Form

$$\mathfrak{x}_y = 0, \quad \mathfrak{x}_x \mathfrak{y}_y = 1.$$

Zwei beliebige infinitesimale Transformationen dieser Gruppe sind mit einander innerhalb der Gruppe gleichberechtigt. Auf der anderen Seite leuchtet ein, dass zwei verschiedene infinitesimale Transformationen unserer Gruppe nie vertauschbar sind. Daraus können wir nach den früheren Auseinandersetzungen schliessen, dass die Reduction der allgemeinen infinitesimalen Transformation $\xi(x)p - \xi'(x)yq$ auf die kanonische

Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}$ vermöge einer Transformation der Gruppe immer ohne weitere Integration als eine einzige Quadratur ausführbar sein muss. In der That erhalten wir zur Bestimmung der betreffenden endlichen Transformation

$$\mathfrak{x} = X(xy)\,, \quad \mathfrak{y} = Y(xy)$$

das System von Differentialgleichungen

$$\mathfrak{x}_y = 0\,, \quad \mathfrak{x}_x \mathfrak{y}_y = 1$$
$$\xi \mathfrak{x}_x - \xi' y \mathfrak{x}_y = 1\,, \quad \xi \mathfrak{y}_x - \xi' y \mathfrak{y}_y = 0\,,$$

deren Integralgleichungen

$$\mathfrak{x} = \int \frac{dx}{\xi}\,, \quad \mathfrak{y} = y\xi \quad .$$

wirklich die angekündigte Form haben.

Man verificirt leicht, dass die gefundene endliche Transformation der vorgelegten unendlichen Gruppe angehört und zugleich, dass sie $\xi p - \xi' y q$ auf die verlangte Form bringt.

Setzen wir jetzt voraus, dass die gewählte infinitesimale Transformation unsrer Gruppe Γ mit einer und nur mit einer von Xf verschiedenen infinitesimalen Transformation der Gruppe vertauschbar ist. Alsdann ist, behaupten wir wiederum, die Reduction von Xf auf die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ vermöge einer Transformation der Gruppe Γ ausführbar, verlangt aber jetzt *zwei Quadraturen.* Unter den gemachten Voraussetzungen enthält daher Γ eine und nur eine von $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ verschiedene mit ihr vertauschbare Transformation Yf. Bezeichnen wir daher irgend eine endliche Transformation der Gruppe Γ, die Xf auf die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ bringt, mit S und andrerseits mit T eine beliebige Transformation der zweigliedrigen Untergruppe

$$(6) \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}\,, \quad Yf = \beta_1(\mathfrak{x})\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \beta_n(\mathfrak{x})\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}\,,$$

so liefert das Symbol ST alle Transformationen der Gruppe Γ

die Xf auf die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ bringen. Bilden wir daher das System von Differentialgleichungen

$$(7) \qquad \begin{cases} J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k(x)\,, \\ X\mathfrak{x}_1 = 0\,, \cdots X\mathfrak{x}_{n-1} = 0\,, \quad X\mathfrak{x}_n = 1\,, \end{cases}$$

das die gesuchten Transformationen ST bestimmen, so ist es sicher, dass dieses System von Differentialgleichungen gerade ∞^2 Lösungssysteme besitzt. Es ist ferner sicher, dass dieses Gleichungssystem die beiden vertauschbaren infinitesimalen Transformationen (6) gestattet. Bezeichnen wir nun die Maximalordnung der Gleichungen (7) mit m, ferner die Grössen

$$\mathfrak{x}_1\,, \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1}\,, \quad \cdots \quad \frac{\partial^m \mathfrak{x}_n}{\partial x_n}$$

mit

$$z_1 \ldots z_\nu\,,$$

so bestimmen die Gleichungen (7) eo ipso $\nu - 2$ unter den z, etwa $z_3 z_4 \ldots z_\nu$, als Functionen von $x_1 \ldots x_n z_1 z_2$. Es reducirt sich in Folge dessen die Integration des Systems (7) auf diejenige eines n-gliedrigen vollständigen Systems

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \zeta_{k1}(x_1 \ldots x_n z_1 z_2) \frac{\partial f}{\partial z_1} + \zeta_{k2} \frac{\partial f}{\partial z_2}$$

$$(k = 1, 2 \ldots n)$$

in den $n + 2$ Veränderlichen $x_1 \ldots x_n z_1 z_2$; dieses vollständige System gestattet zwei vertauschbare infinitesimale Transformationen in $z_1 z_2$, die nach meinen bekannten Regeln aus $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ und Yf abgeleitet werden.

Enthält daher die Gruppe Γ eine und nur eine von $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ verschiedene mit ihr vertauschbare infinitesimale Transformation, so sind zwei Quadraturen und zwar zwei unabhängige Quadraturen erforderlich, um die allgemeine mit $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ gleichberechtigte Transformation Xf auf diese kanonische Form zu bringen.

Setzen wir jetzt voraus, dass die gewählte infinitesimale Transformation Xf der vorgelegten unendlichen Gruppe Γ mit zwei und nur mit zwei infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$ dieser Gruppe vertauschbar ist; dabei liegt selbstverständlich die Annahme vor, dass die drei infinitesimalen Transformationen Xf, $X_1 f$ und $X_2 f$ unabhängig sind. Alsdann enthält Γ sicher auch zwei und nur zwei infinitesimale Transformationen $Y_1 f$ und $Y_2 f$, die mit $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ vertauschbar sind. Wir können annehmen, dass $Y_1 f$ und $Y_2 f$ von vornherein bekannt sind; wäre dies nicht der Fall, so verlangte ihre Bestimmung jedenfalls nur die Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Bilden wir nun wiederum das System von Differentialgleichungen:

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k(x_1 \cdots x_n)$$

$$X\mathfrak{x}_1 = 0\,, \quad \cdots \quad X\mathfrak{x}_{n-1} = 0\,, \quad X\mathfrak{x}_n = 1\,,$$

das die gesuchte Transformation bestimmt, so ist es unter den gemachten Voraussetzungen sicher, dass dieses System von Differentialgleichungen integrabel ist, dass es gerade ∞^3 verschiedene Lösungssysteme besitzt, endlich auch, dass es gerade drei bekannte *unabhängige* infinitesimale Transformationen unsrer Gruppe Γ gestattet, nämlich

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}\,, \quad Y_k f = \beta_{k1}(\mathfrak{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \beta_{kn}(\mathfrak{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$
$$(k = 1, 2)\,.$$

In Folge dessen reducirt sich die Bestimmung der Grössen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ auf die Integration eines vollständigen Systems

---

1) Die im Texte gewählte Ausdrucksweise sieht, wie oft bei ähnlichen Gelegenheiten, von gewissen functionentheoretischen Möglichkeiten ab. Streng genommen kann man unter den gemachten Voraussetzungen nur behaupten, dass die Gruppe Γ nur ∞^3 Transformationen enthält, die Xf auf die betreffende kanonische Form bringen. Diese ∞^3 Transformationen können aber in *discrete Schaaren* mit jedesmal ∞^3 Transformationen *zerfallen*. Wir sehen im Texte von diesem für uns unwesentlichen Umstande ab.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}+\sum_1^3{}_i\,\zeta_{ki}(x_1\dots x_n\,z_1\,z_2\,z_3)\frac{\partial f}{\partial z_i}=0$$

mit drei bekannten infinitesimalen Transformationen

$$Z_k f=\sum^3{}_i\,\omega_{ki}(x_1\dots x_n\,z_1\,z_2\,z_3)\frac{\partial f}{\partial z_i},$$

die eine dreigliedrige Gruppe bilden, die mit der so oft besprochenen Gruppe

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n},\quad Y_1 f,\quad Y_2 f$$

gleichzusammengesetzt ist. Da nun die Identitäten

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n},\ Y_1\right)=0=\left(\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n},\ Y_2\right)$$

bestehen, so ist die Gruppe $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ sicher *integrabel*. Daher verlangt die Bestimmung der Grössen $\mathfrak{x}_1\dots\mathfrak{x}_n$ jedenfalls nur *drei Quadraturen*.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Gruppe Γ gerade r unabhängige infinitesimale Transformationen

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n},\quad Y_1 f\dots Y_{r-1} f$$

enthält, die mit $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ vertauschbar sind. Alsdann erzeugen diese r Transformationen sicher eine r-gliedrige Untergruppe G_r. Das vorliegende Integrationsproblem findet daher, wenn wir genau wie früher verfahren, seinen analytischen Ausdruck in ein r-gliedriges vollständiges System in $n+r$ Veränderlichen

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}+\sum_1^n{}_i\,\zeta_{ki}(x_1\dots x_n\,z_1\dots z_r)\frac{\partial f}{\partial z_i}=0,$$

das eine bekannte r-gliedrige Gruppe

$$Z_k f=\sum_1^r{}_i\,\omega_{ki}(z_1\dots z_r)\frac{\partial f}{\partial z_i}$$

gestattet. Die Zusammensetzung dieser Gruppe zeigt, auf welche Hülfsgleichungen unser Problem zurückgeführt werden kann; darauf brauchen wir hier nicht weiter einzugehen.

Wir wenden uns jetzt zu dem ungleich interessanteren Falle, dass die Gruppe Γ unendlich viele unabhängige Transformationen Yf enthält, die mit $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ vertauschbar sind. Alsdann haben wir zu integriren ein System von Differentialgleichungen

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_k \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k(x_1 \cdots x_n)$$

$$X\mathfrak{x}_1 = 0 \ldots X\mathfrak{x}_{n-1} = 0\,, \quad X\mathfrak{x}_n = 1\,,$$

das eine *unendliche* Gruppe G gestattet. Das allgemeinste System Lösungen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ geht aus einem speciellen System Lösungen $\overline{\mathfrak{x}}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ durch Gleichungen hervor, die eine unendliche Gruppe bilden. Wir werden hierdurch auf eine wichtige Kategorie von Problemen geführt, die wir im nächsten Kapitel in allgemeiner Weise formuliren und in rationeller Weise erledigen.

Ehe wir aber dieses Kapitel schliessen, wenden wir uns zu einem speciellen Problem, das im Vorhergehenden schon erledigt wurde. Wir wollen nämlich annehmen, dass nicht allein die Gruppe G, sondern auch die ursprüngliche Gruppe Γ *endlich* ist. Alsdann bilden die mit $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ vertauschbaren Transformationen der Gruppe Γ eo ipso eine *endliche* Gruppe, deren infinitesimale Transformationen wiederum mit

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}, \quad Y_1 f \ldots Y_{r-1} f \tag{8}$$

bezeichnet werden mögen. Unser früheres Ergebniss war, dass die Bestimmung der Grössen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ dann und nur dann durch Quadraturen geleistet wird, wenn die Gruppe (8) *integrabel* ist. Wollen wir nun der Frage näher treten, ob unsre Behandlung dieses speciellen Problems das Grösstmöglichste leistet, so liegt es nahe, eine Vergleichung mit einer anderen von uns herrührenden Theorie anzustellen. Bei einer anderen Gelegenheit[1])

1) Leipziger Berichte, 1889.

fanden wir ja, dass die Reduction auf die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ von der allgemeinen infinitesimalen Transformation Xf einer vorgelegten endlichen Gruppe

$$x_k' = f_k(x_1 \dots x_n\, a_1 \dots a_r)$$

sogar ohne Quadratur ausführbar ist, wenn die Gruppe $x' = f(x\,a)$ keine ausgezeichnete infinitesimale Transformation enthält. Wir fanden ferner, dass die Reduction von Xf grade q Quadraturen verlangt, wenn die Gruppe $x' = f(x\,a)$ gerade q unabhängige ausgezeichnete infinitesimale Transformationen enthält.

Im vorliegenden Falle leistet unsere alte Theorie offenbar mehr als die im Vorangehenden entwickelte Methode. Hierbei ist aber wohl zu beachten, dass unsere Voraussetzungen keineswegs in beiden Fällen dieselben sind. In der citirten Arbeit setzten wir voraus, dass die *endlichen* Gleichungen $x' = f(x\,a)$ der Gruppe Γ vorlagen, während wir in dieser Arbeit factisch nur angenommen haben, dass die Definitionsgleichungen

$$J_k(\mathfrak{x} \cdots) = B_k(x)$$

und die infinitesimalen Transformationen Xf der Gruppe G vorliegen[1]). Factisch sind daher unsere jetzigen Voraussetzungen von den früheren wesentlich verschieden; schon aus diesem Grunde können wir nicht erwarten, dass die erforderlichen Integrationsoperationen in beiden Fällen übereinstimmen sollen.

Es sind aber noch andere sehr wesentliche Umstände, die hier beachtet werden müssen.

Sobald eine *endliche* Gruppe Γ und zwei innerhalb dieser Gruppe gleichberechtige Transformationen Xf und $X'f$ vorliegen, ist es, grade weil Γ endlich ist, immer möglich durch algebraische Operationen die Gruppe Γ in allgemeinster Weise derart isomorph auf sich selbst zu beziehen, dass Xf und $X'f$ entsprechende Transformationen sind. Gerade dieser Umstand veranlasst, dass die Auffindung der allgemeinsten Transformation der Gruppe Γ, die Xf auf die Form $X'f$ bringt, so einfache Integrationsoperationen verlangt.

---

1) Die weiteren Voraussetzungen, die wir heute gemacht haben, insbesondere dass die Gruppe G die infinitesimale Transformation $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ enthält, kommen bei dieser Discussion nicht in Betracht.

Hierauf beruht es, dass die in diesem und dem folgenden Kapitel entwickelte Methode nur dann das Grösstmögliche leisten wird, wenn die Gruppe Γ unendlich ist; ist dagegen die Gruppe Γ endlich, so fallen einige Integrationsoperationen weg, indem sie sich durch algebraische Operationen ersetzen lassen. Selbstverständlich liegt immer die Voraussetzung vor, dass wir nicht von vornherein etwas Besonderes über die infinitesimale Transformation Xf unsrer Gruppe Γ wissen.

Kapitel 2.

Systeme von Differentialgleichungen, deren allgemeinste Lösungen aus speciellen Lösungen durch Gleichungen hervorgehen, die eine Gruppe bilden.

Die Behandlung des Problems I führt zu einem anderen fundamentalen Probleme, mit dem ich mich bei vielen früheren Gelegenheiten eingehend beschäftigt habe, wenn ich auch früher nur specielle, allerdings sehr umfassende Fälle vollständig durchgeführt habe. Dieses allgemeine Problem formulire ich folgendermassen:

Problem II. *Wie integrirt man in einfachster Weise ein System von Differentialgleichungen*

$$\Omega_k\left(x_1 \cdots x_n\, \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_m\, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = 0\,,$$

dessen allgemeinste Lösungen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_m$ aus einem speciellen System Lösungen $\overline{\mathfrak{x}}_1 \ldots \overline{\mathfrak{x}}_m$ durch Gleichungen

$$\mathfrak{x}_k = F_k(\overline{\mathfrak{x}}_1 \ldots \overline{\mathfrak{x}}_m)$$

hervorgehen, die eine continuirliche Gruppe G bestimmen[1]*).*

Setzen wir insbesondere voraus, dass $m = n$ ist, und dass $\mathfrak{x}_1 = x_1 \ldots \mathfrak{x}_{1'} = x_n$ ein specielles System Lösungen darstellen, so sind die Gleichungen $\Omega_k = 0$ weiter nichts als die *Definitionsgleichungen* der *endlichen Transformationen der Gruppe* (G). Mit diesem speciellen Probleme beschäftigte ich mich bei verschie-

1) Noch allgemeiner ist die ebenfalls von mir behandelte Frage, wie man ein System von Differentialgleichungen, das eine bekannte oder unbekannte Gruppe gestattet, in einfachster Weise integrirt.

denen Gelegenheiten eingehend, und zwar ebensowohl für den Fall, dass G eine unendliche Gruppe ist, wie für den Fall, dass die Gruppe G endlich ist.

Indem wir jetzt unser allgemeines Problem II in Angriff nehmen, wollen wir zunächst zeigen, dass das Gleichungssystem $\Omega_k = 0$ auf eine bemerkenswerthe kanonische Form gebracht werden kann.

Bezeichnen wir die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe G mit:

$$Yf = \eta_1(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \eta_m(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_m)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_m},$$

so leuchtet unmittelbar ein, dass das Gleichungssystem $\Omega_k = 0$ jede infinitesimale Transformation Yf oder — wie wir auch sagen könnnen — die Gruppe G gestattet. In unsrer allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten zeigen wir nun, wie man alle bei einer vorgelegten Gruppe Yf invarianten Systeme von Differentialgleichungen finden kann. Es giebt zweierlei derartige Systeme. Die Systeme der ersten Art bestehen einfach aus Relationen zwischen Differentialinvarianten der Gruppe G, wobei zu erinnern ist, dass alle derartigen Invarianten sich durch Differentiation aus den Invarianten eines *vollen Systems* ableiten lassen. Die Systeme der zweiten Art enthalten immer einige Gleichungen, die eine ganz bestimmte Form

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0$$

haben; diese letzten Gleichungen werden dadurch gefunden, dass Determinanten einer gewissen Matrix gleich Null gesetzt werden; diese Matrix ist durch die Form der infinitesimalen Transformationen Yf vollständig bestimmt. Wir können aber von Gleichungssystemen $\Omega_k = 0$ dieser letzten Art, die uns zunächst nicht interessiren, ganz absehen[2]).

---

1) In (dem letzten Paragraphen) meiner grossen Abhandlung in den Math. Ann. Bd. 25 führte ich die Bestimmung einer *endlichen* Gruppe, deren Definitionsgleichungen vorliegen, auf die Integration eines vollständigen Systems mit bekannter Gruppe zurück. Da ich nun andererseits diese letzte Integrationstheorie auf ihre einfachste Form gebracht habe, so liegt es in der Natur der Sache, dass die Bestimmung einer endlichen Gruppe, deren Definitionsgleichungen vorliegen, durch meine Arbeiten in *definitiver* Weise geleistet ist.

2) Nehmen wir insbesondere an, dass die Grössen $x_1 \ldots x_n$ nicht in den Functionen F_k eingehen, so erkennen wir *fast unmittelbar*, indem wir

Es besteht nun der allgemeine Satz, dass alle Differentialinvarianten sich aus einer begrenzten Anzahl derartiger Grössen

$$U_1 \dots U_n\, J_1 \dots J_\mu$$

durch Differentiation ableiten lassen, so zwar, dass die allgemeinste Differentialinvariante die Form

$$\Phi\left(U_1 \cdots U_n\, J_1 \dots J_\mu \frac{\partial J_1}{\partial U_1} \cdots\right)$$

besitzt.

Im vorliegenden Falle können wir die Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ als Grössen $U_1 \dots U_n$ wählen. Die allgemeinste Differentialinvariante besitzt daher die Form:

$$\Phi\left(x_1 \cdots x_n\, J_1 \cdots J_\mu \frac{\partial J_1}{\partial x_1} \cdots\right).$$

Sind nun $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ und $\bar{\mathfrak{x}}_1 \dots \bar{\mathfrak{x}}_n$ zwei verschiedene Lösungssysteme, so besteht, wenn wir

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = J_k$$

$$J_k\left(\bar{\mathfrak{x}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{x}}_n \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = \bar{J}_k$$

schreiben, identisch die Gleichung

$$\Phi\left(x_1 \cdots x_n\, J_1 \cdots J_n \frac{\partial J_1}{\partial x_1} \cdots\right) = \Phi\left(x_1 \cdots x_n\, \bar{J}_1 \cdots \bar{J}_n \frac{\partial \bar{J}_1}{\partial x_1} \cdots\right).$$

Alle in dieser Weise hervorgehenden Gleichungen lassen sich ableiten aus den μ Gleichungen

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = J_k\left(\bar{\mathfrak{x}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{x}}_n \frac{\partial \bar{\mathfrak{x}}_1}{\partial x_1} \cdots\right)$$

$$(k = 1 \dots \mu),$$

---

statt $x_1 \dots x_n$ *willkürliche* Functionen $x_1' \dots x_n'$ der x als neue *unabhängige* Veränderliche einführen, dass die allgemeinsten Functionen $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_m$, die ein durch Determinantenbildung gefundenes Gleichungssystem $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0 \dots$ erfüllen, durch Differentialgleichungen definirt werden können, die nur die Grössen $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_m$, dagegen nicht die Veränderlichen $x_1 \dots x_n$ enthalten.

die, sobald $\bar{\mathfrak{x}}_1 \dots \bar{\mathfrak{x}}_n$ ein particuläres, $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ dagegen das allgemeine Lösungssystem darstellen, die Form:

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k\,(x_1 \cdots x_n)$$

annehmen, wobei $B_1 \dots B_\mu$ *bekannte* Functionen von $x_1 \dots x_n$ bezeichnen.

Werden daher die allgemeinsten Lösungen $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_m$ *eines Systems von Differentialgleichungen*

$$\Omega_k\left(x_1 \cdots x_n\, \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_m \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = 0$$

aus einem particulären Lösungssystem $\bar{\mathfrak{x}}_1 \dots \bar{\mathfrak{x}}_m$ *durch Gleichungen*

$$\mathfrak{x}_k = F_k\,(\bar{\mathfrak{x}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{x}}_m)$$

abgeleitet, die eine continuirliche Gruppe bestimmen, so kann das Gleichungssystem $\Omega_k = 0$ *im Allgemeinen die Form:*

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k\,(x_1 \cdots x_n)$$

$$(k = 1, 2, \dots \mu)$$

erhalten. Dabei bilden: $x_1 \dots x_n\; J_1 \dots J_\mu$ *ein volles System von Differentialinvarianten, während* $B_1 \dots B_\mu$ *b e k a n n t e Functionen von* $x_1 \dots x_n$ *bezeichnen.*

Wenn wir uns im Folgenden nur mit denjenigen Gleichungssystemen $\Omega_k = 0$ beschäftigen, die auf die Form $J_k = B_k$ gebracht werden können, so wollen wir doch nicht unterlassen hervorzuheben, dass sich ähnliche Integrationstheorien für die ausgeschlossenen »*singulären*« Gleichungssysteme $\Omega_k = 0$ entwickeln lassen. Bei einer anderen Gelegenheit beschäftigen wir uns mit den hier ausgeschlossenen Ausnahmefällen.

Indem wir jetzt allgemeine Integrationstheorien für unsre Gleichungssysteme

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k\,(x_1 \cdots x_n)$$

entwickeln werden, müssen wir zwischen verschiedenen Fällen unterscheiden, je nachdem die Gruppe G *einfach* oder *nicht-einfach* ist. Zunächst werden wir zeigen, dass *jedes System:* $J_k = B_k$ *mit nicht-einfacher Gruppe sich in eine Reihe ähnlicher Integrations-*

Probleme $J_k' = B_k'$, $J_k'' = B_k''$.. *zerlegt, so zwar, dass die bei diesen Hülfsproblemen auftretenden Gruppen jedesmal einfach sind.*

Wir wollen also annehmen, dass die Gruppe G mit den infinitesimalen Transformationen Yf nicht einfach ist; alsdann ist es immer möglich, unter ihren invarianten Untergruppen eine zu wählen, die in keiner grösseren invarianten Untergruppe enthalten ist. Wir bezeichnen die infinitesimalen Transformationen einer solchen *grössten* invarianten Untergruppe mit

$$Y'f = \eta_1'(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \eta_n'(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n},$$

oder aber, wenn wir mehrere solche Transformationen in Betracht ziehen, mit

$$(\mathrm{G}') \qquad J_k'f = \eta'_{k1}(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \eta'_{kn}(\mathfrak{x})\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$
$$(k = 1, 2 \ldots).$$

Diese Untergruppe bestimmt nun selbstverständlich eine unendliche Reihe Differentialinvarianten, unter denen sich alle Invarianten der ursprünglichen Gruppe Yf finden. Wir können daher annehmen, dass das volle System von Differentialinvarianten der Gruppe $Y'f$ auf die Form

$$(1) \qquad x_1 \ldots x_n \, J_1 \ldots J_\mu \, J_1' \ldots J'_{\mu'}$$

gebracht ist.

Jetzt kennen wir schon Ausdrücke, nämlich $B_1(x) \ldots B_\mu(x)$, die $J_1 \ldots J_n$ als *bekannte* Functionen von $x_1 \ldots x_n$ darstellen. Dagegen lassen sich die Grössen $J_1' \ldots J'_{\mu'}$ nach der Natur der Sache *nicht von vorneherein* als bekannte Functionen von $x_1 \ldots x_n$ angeben. *Wir können aber, und das wollen wir thun, Differentialgleichungen aufstellen, die $J_1' \ldots J'_{\mu'}$ als Functionen von $x_1 \ldots x_n$ definiren.*

Dabei ist es unser Ausgangspunkt, dass die Gruppe $Y'f$ eine *invariante* Untergruppe der ursprünglichen Gruppe Yf ist. Darum erfüllen zwei beliebige infinitesimale Transformationen dieser Gruppen Yf und $Y_1'f$ eine Relation von der Form

$$YY_1'f - Y_1'Yf = Y_2'f,$$

wo $Y_2'f$ wiederum der invarianten Untergruppe angehört.

Setzen wir nun $f = J_k'$ und erinnern uns, dass J_k' eine Invariante der Untergruppe bezeichnet, so erkennen wir, dass immer die Relation

$$Y_1' Y J_k' = 0$$

besteht und dass daher die Grössen $Y J_k'$ als Invarianten der Untergruppe sich folgendermassen ausdrücken:

$$Y J_k' = \omega_k (x_1 \dots x_n J_1 \dots J_\mu J_1' \dots J_{\mu'}') ;$$

ja, wenn wir an der Annahme festhalten, dass die Gleichungen unsrer ursprünglichen Gruppe $\mathfrak{x}_k = F_k (\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n)$ die Grössen x gar nicht enthalten, so erkennen wir ohne weiteres, dass die x auch nicht in den ω_k auftreten, so dass unsre letzten Formeln die Gestalt

$$Y J_k' = \zeta_k (J_1 \dots J_\mu J_1' \dots J_{\mu'}')$$

annehmen.

Die Formeln sagen aus, dass das volle System (1) der nvarianten Untergruppe $Y'f$ gegenüber der Transformation Yf der ursprünglichen Gruppe G invariant bleibt, während allerdings die einzelnen Invarianten dieses vollen Systems unter einander vertauscht werden. Dabei lässt sich von vornherein voraussehen, dass diese Invarianten durch eine continuirliche Gruppe transformirt werden.

Um dies zu bestätigen, bilden wir die infinitesimalen Transformationen

$$Zf = \sum_1^{\mu'} {}^k \, Y J_k' \frac{\partial f}{\partial J_k'} = \sum_1^{\mu'} {}^k \, \zeta_k (x J J') \frac{\partial f}{\partial J_k'}$$

in den Veränderlichen $J_1' \dots J_{\mu'}'$.

Sind $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ drei Transformationen der ursprünglichen Gruppe G, die in der Beziehung

$$Y_1 Y_2 f - Y_2 Y_1 f = Y_3 f$$

stehen, so ergiebt sich insbesondere

$$Y_1 Y_2 J_\nu' - Y_2 Y_1 J_\nu' = Y_3 J_\nu' .$$

Setzen wir daher in Uebereinstimmung mit dem Vorangehenden

$$Z_k f = \sum_1^{\mu'} {}^\nu \, Y_k J_\nu' \frac{\partial f}{\partial J_\nu'} = \sum_1^{\mu'} {}^\nu \, \zeta_{k\nu} (x J J') \frac{\partial f}{\partial J_\nu'} ,$$

so folgt zunächst unmittelbar

$$Z_1 Z_2 J_\nu' - Z_2 Z_1 J_\nu' = Z_3 J_\nu'$$

und sodann, wenn wir unter f eine beliebige Function der x, J und J' verstehen,

$$Z_1 Z_2 f - Z_2 Z_1 f = Z_3 f.$$

Hiermit ist denn wirklich nachgewiesen, dass die infinitesimalen Transformationen Zf in den Veränderlichen $J_1' \dots J_{\mu'}'$ eine continuirliche Gruppe bestimmen. Wir bezeichnen diese Gruppe mit g.

Diese Gruppe g hat nun selbst ihre Differentialinvarianten; wir wollen annehmen, dass

$$x_1 \cdots x_n, \; U_k\left(x_1 \cdots x_n \, J_1 \cdots J_\mu \, J_1' \cdots J_{\mu'}' \frac{\partial J_1'}{\partial x_1} \cdots\right)$$

$$(k = 1, 2 \dots)$$

ein volles System derartiger Invarianten ist.

Denken wir uns nun die Grössen $U_1 \, U_2 \dots$ als Functionen von

$$x_1 \cdots x_n \, \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots$$

ausgedrückt, so leuchtet unmittelbar ein, dass die hervorgehenden Ausdrücke

$$W_k\left(x_1 \cdots x_n \, \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \, \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = U_k$$

bei den Transformationen der Gruppe G ihre Form bewahren, und somit als *bekannte* Functionen von $x_1 \dots x_n$ berechnet werden können.

Die in dieser Weise hervorgehenden Gleichungen

$$U_k\left(x J J' \frac{\partial J'}{\partial x} \cdots\right) = \mathfrak{C}_k \, (x_1 \cdots x_n),$$

in denen die J_ν durch die $B_\nu(x)$ ersetzt werden können, bestimmen die J' als Functionen der x. Dabei wissen wir, dass dieses neue System von Differentialgleichungen $U_k = \mathfrak{C}_k$ die Gruppe Zf gestattet.

Wir können offenbar hinzufügen, dass die allgemeinsten Lösungen $J_1' \dots J_{\mu'}'$ aus einem particulären System Lösungen $\bar{J}_1 \dots \bar{J}_{\mu'}'$ durch eine Transformation der Gruppe Zf abgeleitet werden können. Dies folgt unmittelbar daraus, dass es nach dem Früheren genau auf dasselbe hinauskommt, ob wir die Grössen J' durch die Gruppe Zf oder aber durch die Gruppe Yf transformiren. Dass aber die allgemeinen Lösungen $J_1' \dots J_{\mu'}'$ aus dem particulären Lösungssystem $\bar{J}_1' \dots \bar{J}_{\mu'}'$ durch eine Transformation der ursprünglichen Gruppe Yf abgeleitet werden können, ist eine directe Consequenz unserer ursprünglichen Fragestellung.

Ueberdies erkennen wir unmittelbar, dass die Gruppe Zf *einfach* ist; das ist eine directe Folge davon, dass die Gruppe $Y'f$ eine *grösste invariante* Untergruppe der ursprünglichen Gruppe Yf bezeichnet.

Hiermit ist nun eine wesentliche Reduction oder, wenn man will, eine Zerlegung des ursprünglichen Problems II erreicht.

Denken wir uns nämlich, dass das Gleichungssystem $U_k = \mathfrak{C}_k(x)$ schon integrirt ist, kennen wir also die Grössen J_k' als Functionen der x, so bilden wir die Gleichungen

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k(x_1 \cdots x_n)$$

$$J_\nu'\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k'(x_1 \cdots x_n)$$

$$(k = 1, 2 \dots \mu, \quad \nu = 1, 2, \dots \mu'),$$

die jetzt $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ als Functionen von $x_1 \dots x_n$ bestimmen. *Diese Gleichungen bilden jetzt ein unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen, deren allgemeinste Lösungen* $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ *aus einem particulären Lösungssystem* $\bar{\mathfrak{x}}_1 \dots \bar{\mathfrak{x}}_n$ *durch eine Transformation der Gruppe* $Y'f$ *hervorgehen.*

Hiermit ist nachgewiesen, *dass unser ursprüngliches Problem II,* das in den Gleichungen $J_k = B_k(x)$ seine analytische Formulirung fand, *sich in zwei ganz analoge Probleme zerlegen lässt, die durch die Gleichungssysteme* $U_k = \mathfrak{C}_k$ *und* $J_k = B_k$, $J_k' = B_k'$ *formulirt werden.* Während aber das ursprüngliche Problem durch die Gruppe Yf charakterisirt war, gehörte zu dem Hülfsproblem $U_k = \mathfrak{C}_k$ die Gruppe Zf und andrerseits zu

dem Hülfsproblem $J_k = B_k$, $J_k' = B_k'$ die Gruppe $Y'f$. Hierbei ist die Gruppe Zf *einfach*, und andererseits ist $Y'f$ eine grösste invariante Untergruppe der Gruppe Yf.

Ist nun die Gruppe $Y'f$ wiederum *nicht-einfach*, so können wir das Hülfsproblem $J_k = B_k$, $J_k' = B_k'$ in genau derselben Weise in zwei einfachere Probleme zerlegen, unter denen jedenfalls die Gruppe des einen Problems einfach ist. Zu diesem Zwecke müsste man eine grösste invariante Untergruppe $Y''f$ der Gruppe $Y'f$ herausgreifen, und sodann genau wie soeben verfahren.

Ist nun die Gruppe $Y''f$ auch nicht einfach, so wählt man eine grösste invariante Untergruppe $Y'''f$ u. s. w.

Indem man in dieser Weise nach und nach die Gruppen

$$Yf,\ Y'f,\ Y''f,\ Y'''f, \dots\ Y^{(\nu)}f \dots$$

bildet, unter denen jede in der vorangehenden invariant ist, muss man einmal zu einer Gruppe $Y^{(q)}f$ kommen, die selbst einfach ist. *Dies beruht darauf, dass unsre unendliche (oder endliche) Gruppe G, gleichzeitig also auch ihre Untergruppen, immer durch Differentialgleichungen definirbar sein sollen.*

Jedes Problem II, dessen Gruppe G nicht-einfach ist, lässt sich daher zerlegen in eine endliche Anzahl Probleme II, deren zugehörige Gruppe einfach ist.

Es stellt sich nun die Frage, wie man ein Problem mit einfacher Gruppe G behandelt.

Für den Fall, dass die betreffende Gruppe G nicht allein *einfach* sondern auch *endlich* ist, wurde die Antwort auf die gestellte Frage längst von mir gegeben.

Dagegen habe ich früher den Fall, dass G unendlich ist, nur andeutungsweise behandelt. Jetzt werde ich auf diesen Fall etwas ausführlicher eingehen.

Liegt ein Problem II mit einfacher Gruppe vor, so muss man sich zuerst die Frage vorlegen, *ob es unendliche Gruppen in weniger als n Veränderlichen giebt*, die mit *unserer Gruppe holoedrisch isomorph ist.* Sodann bestimmt man eine gleichzusammengesetzte Gruppe G' in möglichst wenig Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_k' = \Psi_k(x_1' \cdots x_{n'}') \quad (k = 1 \cdots n').$$

Ist eine solche Gruppe G' gefunden, so sucht man n' Functionen $\mathfrak{y}_1 \dots \mathfrak{y}_{n'}$ von $x_1 \dots x_n$, die so gewählt sind, dass die $\mathfrak{y}_k$ durch die

Gruppe G' transformirt werden. Die hiermit definirten Grössen $\mathfrak{y}_k$ werden bestimmt durch ein System von Differentialgleichungen

$$\Omega_k\left(x_1 \cdots x_n\, \mathfrak{y}_1 \cdots \mathfrak{y}_{n'} \frac{d\mathfrak{y}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = 0,$$

dessen allgemeinsten Lösungen $\mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_{n'}$ aus einem speciellen Systeme Lösungen $\bar{\mathfrak{y}}_1 \ldots \bar{\mathfrak{y}}_{n'}$ durch Gleichungen

$$\mathfrak{y}_k = \varphi_k\,(\bar{\mathfrak{y}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{y}}_{n'})$$

abgeleitet werden, die eine Gruppe und zwar die Gruppe G' bilden.

Es kann daher dieses Gleichungssytem die Form

$$U_k\left(\mathfrak{y}_1 \cdots \mathfrak{y}_{n'} \frac{d\mathfrak{y}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = D_k\,(x_1 \cdots x_n)$$

erhalten; dabei bilden $U_1\, U_2 \ldots$ ein volles System von Differentialinvarianten der Gruppe G'.

Das hiermit gefundene Gleichungssystem $U_k = D_k$ *ist in dem Sinne irreductibel, dass es keiner wesentlichen Vereinfachung fähig ist.*

Ist das Gleichungssystem $U_k = D_k$ integrirt, so *erledigt sich das ursprüngliche Problem II mit einfacher Gruppe G durch Differentiation.*

Eine vollständige Theorie der irreduciblen Probleme II kann erst dann gegeben werden, wenn alle einfachen unendlichen Gruppen, richtiger gesagt, wenn *die Zusammensetzung aller einfachen unendlichen Gruppen* bestimmt worden ist.

In früheren Arbeiten bestimmte ich *vier Classen einfacher unendlicher Gruppen, deren jede unendlich viele verschiedene Zusammensetzungen repräsentirt.*

Die erste Classe besteht aus der Gruppe aller Punkttransformationen des Raumes $x_1 \ldots x_n$ *zusammen mit allen gleichzusammengesetzten Gruppen.*

Die zweite Classe besteht aus allen Gruppen, die gleichzusammengesetzt sind mit der Gruppe aller Berührungstransformationen des n-fach ausgedehnten Raumes $z\, x_1 \ldots x_n$. *In kanonischer Form besitzen die infinitesimalen Transformationen dieser Gruppen die Gestalt*

$$[W(z\, x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n),\, f] - W\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

Die d r i t t e *Classe besteht aus allen Gruppen, die gleichzusammengesetzt sind mit der Gruppe aller Berührungstransformationen*

$$(\varphi(x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n), f)$$

in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n p_1 \dots p_n$.

Die vierte Classe besteht aus allen Gruppen, die gleichzusammengesetzt sind mit der unendlichen Gruppe, die durch die Gleichung

$$\sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = 0$$

definirt wird. Die infinitesimalen Transformationen

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

sind definirt durch die einzige Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} = 0 .$$

Liegt nun z. B in den Veränderlichen $y_1 \dots y_n$ ein irreducibles Problem II vor, deren Gruppe mit der Gruppe aller Berührungstransformationen (φf) in den Veränderlichen

$$x_1 \dots x_m p_1 \dots p_m \qquad (n \gtreqless 2m)$$

gleichzusammengesetzt ist, so steht das erforderliche Integrationsgeschäft in genauestem Zusammenhange mit der *classischen* Theorie des *Pfaff'schen Problems*, sowie mit *meiner Theorie der Functionengruppen.*

Das Problem, die Zusammensetzung aller einfachen unendlichen und continurlichen Gruppen zu bestimmen, habe ich noch nicht versucht zu behandeln. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die Antwort ebenso einfach ausfallen wird wie für die endlichen. Unter allen Umständen erscheint es ausserordentlich interessant, dass die Mathematiker sich schon eingehend wenn auch implicite mit den obengenannten Classen einfacher unendlicher Gruppen beschäftigt haben.

Kapitel 3.

Gruppentheoretische Behandlung der Theorie des letzten Multiplicators.

Jacobi lenkte die Aufmerksamkeit auf lineare partielle Differentialgleichungen

(1) $$Xf \equiv \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

deren Coefficienten $\xi_1 \ldots \xi_n$ die Bedingungsgleichung

(2) $$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} = 0$$

erfüllen. Es gelang ihm nachzuweisen, dass, sobald $n-2$ beliebige unabhängige Lösungen $\psi_1 \ldots \psi_{n-2}$ gefunden sind, dass dann die *Auffindung der letzten Lösung nur eine Quadratur verlangt.*

Wir werden zeigen, dass unsere vorangehende Theorie diese schöne Jacobi'sche Theorie als speciellen Fall umfasst. Unsere Theorien geben aber zugleich ein neues Resultat; sie zeigen nämlich, dass Jacobi's *Theorie das Grösstmögliche leistet.* Soweit uns bekannt, ist weder Jacobi noch seine Nachfolger *explicite* auf die Frage eingegangen, ob nicht auch die Auffindung der $n-2$ ersten Lösungen $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-2}$ Vereinfachungen darbietet, sobald die Bedingungsgleichung (2) besteht.

Das hiermit angekündigte Resultat hat seinen Werth; die Hauptsache bei den Entwickelungen dieses Kapitels liegt aber darin, dass sie zeigen, dass die *früher isolirt* stehende Jacobi'sche Theorie des letzten Multiplicators für eine gruppentheoretische Auffassung gradezu als selbstverständlich erscheint. Wir erkennen, dass es möglich ist, viele analoge Theorien zu entwickeln.

Erfüllen die Incremente $\xi_1 \ldots \xi_n$ der infinitesimalen Transformation:

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

die Bedingung

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} = 0,$$

so bestimmt, können wir sagen, Xf oder, wenn man will, die zugehörige eingliedrige Gruppe, im Raume $x_1 \dots x_n$ eine *stationäre* Strömung eines incompressiblen Fluidums. Es repräsentirt daher Xf die allgemeinste infinitesimale Transformation einer gewissen unendlichen Gruppe, deren Transformationen

$$\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x_1 \dots x_n) \quad (k = 1 \dots n)$$

dadurch charakterisirt sind, dass sie alle Volumina invariant lassen[1]). Alle diese Transformationen sind analytisch definirt durch die Gleichung:

$$\sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = 1\,,$$

die somit als *Definitionsgleichung der endlichen Transformationen* unsrer Gruppe aufgefasst werden muss. Dementsprechend ist die Gleichung

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} = 0$$

die *Definitionsgleichung der infinitesimalen Transformationen* unsrer Gruppe.

Wir wollen zunächst zeigen, dass zwei beliebige infinitesimale Transformationen dieser Gruppe mit einander innerhalb der Gruppe gleichberechtigt sind. Um das zu beweisen genügt es zu zeigen, dass jede infinitesimale Transformation der Gruppe von einer anderen passend gewählten endlichen Transformation der Gruppe auf die Form einer infinitesimalen *Translation*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

gebracht werden kann. Nachdem es uns gelungen ist, diesen Nachweis zu führen, stellen wir uns die Aufgabe, die einfachsten Integrationsoperationen anzugeben, die erforderlich sind, um Xf in der angegebenen Weise auf die genannte kanonische Form zu bringen.

Es soll also zunächst bewiesen werden, dass, sobald eine infinitesimale Transformation Xf die Bedingung

---

1) Man kann diese Gruppe naturgemäss als die *Gruppe der Hydrodynamik* bezeichnen.

(3) $$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} = 0$$

erfüllt, dass es dann immer möglich ist neue Veränderliche

$$\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x_1 \cdots x_n) \qquad (k = 1 \ldots n)$$

einzuführen, die auf einmal die beiden Relationen

$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

und

$$\sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathfrak{x}_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = 1$$

erfüllen.

Anders ausgesprochen: wir wollen beweisen, dass die Differentialgleichungen

(4) $$\begin{cases} \xi_1 \dfrac{\partial \mathfrak{x}_k}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \dfrac{\partial \mathfrak{x}_k}{\partial x_n} = 0 \quad (k = 1 \cdots n-1) \\ \xi_1 \dfrac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \dfrac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = 1 \end{cases}$$

(5) $$\sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathfrak{x}_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = 1$$

integrabel sind, sobald die Grössen $\xi_1 \ldots \xi_n$ die Bedingung (3) erfüllen.

Sind $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ ein System Lösungen der Gleichung $Xf = 0$ und α_n eine particuläre Lösung der Gleichung $Xf = 1$, so sind

$$\mathfrak{x}_k = \psi_k(\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1})$$
$$\mathfrak{x}_n = \alpha_n + \psi(\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1})$$

die allgemeinsten Lösungen der n Differentialgleichungen (4). Es frägt sich ob es möglich ist, die Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{n-1}\ \psi$ der α derart zu wählen, dass auch die Differentialgleichung (5), die jetzt die Form

(6) $$\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}} \cdot \sum \pm \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} = 1$$

annimmt, erfüllt wird.

Da $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ ein System Lösungen von $Xf = 0$ sind, so existirt eine solche Grösse ϱ, dass die Gleichung

$$(7) \qquad Xf = \varrho \sum \pm \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

identisch besteht; es besitzen daher $\xi_1 \dots \xi_n$ die Werthe

$$\xi_1 = \varrho \begin{vmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \\ x_2 \dots x_n \end{vmatrix}, \quad \xi_2 = \varrho \begin{vmatrix} \alpha_1 \dots \dots \alpha_{n-1} \\ x_1 \, x_3 \dots x_n \end{vmatrix} \text{ u. s. w.,}$$

die in die Gleichung

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} = 0$$

eingesetzt, die Relation

$$\varrho \sum_1^n {}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \begin{vmatrix} \alpha_1 \dots \dots \dots \dots \dots \alpha_{n-1} \\ x_1 \dots x_{k-1} \, x_{k+1} \dots x_n \end{vmatrix} + \frac{1}{\varrho} X\varrho = 0$$

liefern; hier verschwindet aber der Factor von ϱ identisch, und also drückt sich ϱ, als Lösung von $Xf = 0$, als Function von $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ aus:

$$\varrho = P(\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}) \, .$$

Ertheilen wir andrerseits der Grösse f in der identischen Gleichung (7) den Werth $f = \alpha_n$, so erhalten wir die Relation

$$X\alpha_n = \varrho \sum \pm \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}$$

und somit für ϱ den Werth

$$\varrho = \frac{X\alpha_n}{\sum \pm \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n}} = \frac{1}{\sum \pm \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n}},$$

sodass

$$\frac{1}{\sum \pm \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n}} = P(\alpha_1 \dots \alpha_n)$$

wird.

Es nimmt daher die Gleichung (6) die Form an

$$\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}} = P(\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}) .$$

In dieser Gleichung bezeichnen $\psi_1 \ldots \psi_{n-1}$ unbekannte Functionen von $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$. Man übersieht daher ohne weiteres nicht allein, dass immer solche Functionen $\psi_1 \ldots \psi_{n-1}$ der α vorhanden sind, die die letzte Gleichung erfüllen, sondern auch, *dass als Grössen $\psi \ldots \psi_{n-2}$ ganz beliebige Functionen der α gewählt werden können, während hinterher* eine beliebige Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\sum \pm \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \psi_{n-2}}{\partial \alpha_{n-2}} \frac{\partial f}{\partial \alpha_{n-1}} = P(\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1})$$

als Grösse Ψ_{n-1} gewählt werden kann; wir sehen überdies, dass eine Quadratur zur Auffindung einer solchen Lösung Ψ_{n-1} genügt.

Liegt daher irgend eine infinitesimale Transformation Xf vor, die alle Volumina invariant lässt, so giebt es immer endliche Transformationen

$$\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x_1 \ldots x_n) ,$$

die ebenfalls alle Volumina invariant lassen, die Xf auf die Form

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

bringen.

Will man sich die Wahrheit dieses Satzes anschaulich klar machen, so denkt man sich die infinitesimale Transformation Xf als definirend eine stationäre Strömung eines incompressiblen Fluidums im Raume $x_1 \ldots x_n$, wählt sodann $n - 1$ infinitesimale Constanten

$$\omega_1 \, \omega_2 \ldots \omega_{n-1}$$

und zerlegt sodann den ganzen Raum in unendlich dünne Stromfäden durch Gleichungen

$$\mathfrak{y}_1 = m\omega_1 , \quad \mathfrak{y}_2 = m\omega_2 , \quad \ldots \; \mathfrak{y}_{n-1} = m\omega_{n-1}$$
$$(m = 0, 1, 2, 3 \ldots) ,$$

in denen $\mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_{n-1}$ ein System Lösungen von $Xf = 0$ bezeichnen. Der Querschnitt q jedes einzelnen Stromfadens ist offenbar gleich dem Product $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_{n-1}$ multiplicirt mit einer Function des Ortes:

$$q = Q(x_1 \ldots x_n) \, \omega_1 \, \omega_2 \ldots \omega_{n-1} .$$

Dabei ist das Product des Querschnittes q und der Geschwindigkeit $\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}$ constant längs jedes einzelnen Stromfadens; es besteht daher eine Gleichung von der Form

$$Q\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} = \Theta(\mathfrak{y}_1 \cdots \mathfrak{y}_{n-1}) .$$

Es definirt also das Symbol

$$\frac{1}{\Theta}\left(\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

wiederum eine stationäre Strömung unseres incompressiblen Fluidums. Diese infinitesimale Transformation hat dieselben Bahncurven und Stromfäden $\mathfrak{y}_1 = n\omega_1, \ldots \mathfrak{y}_{n-1} = n\omega_{n-1}$ wie Xf. Für die neue infinitesimale Transformation ist aber das Product der Geschwindigkeit und des Querschnittes dq des betreffenden Stromfadens überall gleich gross. Bezeichnen wir daher eine beliebige Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{\Theta(\mathfrak{y}_1 \cdots \mathfrak{y}_{n-1})} Xf = 1$$

mit ζ, so leuchtet ein, dass die Mannigfaltigkeiten $\zeta =$ Const. von der infinitesimalen Transformation $\frac{1}{\Theta}$ unter einander vertauscht werden, und überdies, dass der ganze Raum von den Mannigfaltigkeiten

$$\mathfrak{y}_1 = m\omega_1 \ldots \mathfrak{y}_{n-1} = m\omega_{n-1}, \quad \zeta = m\omega$$
$$(m = 0, 1, 2, 3 \ldots)$$

in unendlich viele unendlich kleine Volumina zerlegt wird, die sämmtlich gleich gross.

Also lässt die endliche Transformation

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{y}_1, \cdots \mathfrak{x}_{n-1} = \mathfrak{y}_{n-1}, \quad \mathfrak{x}_n = \zeta$$

alle Volumina invariant; sie bringt überdies die infinitesimale Transformation $\frac{1}{\Theta} Xf$ auf die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$.

In den Veränderlichen $\mathfrak{x}_k$ erhält also Xf die Form

$$Xf = \Theta(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n} .$$

Dass es hinterher möglich ist, durch eine *passende* Transformation

$$\mathfrak{x}_k' = \mathfrak{x}_k \quad (k = 1 \cdots n-1)$$
$$\mathfrak{x}_n' = \frac{1}{\Theta} \mathfrak{x}_n ,$$

die ebenfalls alle Volumina invariant lässt, unsere Transformation Xf auf die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n'}$ zu bringen, ist begrifflich wie analytisch evident.

Wir sind jetzt so weit, dass wir unsre allgemeinen Theorien auf die allgemeine Gleichung $Xf = 0$, die die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} = 0$$

erfüllt, anwenden können. Wir suchen also die allgemeinste endliche Transformation $\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x_1 \ldots x_n)$ unsrer Gruppe, die Xf auf die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ bringt. Anders ausgesprochen, wir bilden das integrable System von Differentialgleichungen

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \xi_1 \frac{\partial \mathfrak{x}_k}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial \mathfrak{x}_k}{\partial x_n} = 0 \qquad (k = 1 \cdots n-1) \\ & \xi_1 \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = 1 \\ & \sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathfrak{x}_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = 1 \end{aligned} \right.$$

und versuchen eine Integrationstheorie dieses Systems zu entwickeln.

Es lässt sich nun dieses System von Differentialgleichungen nach meinen allgemeinen Entwickelungen auf eine kanonische Form bringen. Um sie zu finden, suchen wir nach unsern allgemeinen Regeln zuerst die allgemeine infinitesimale Transformation

$$Yf = \eta_1(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \eta_n(\mathfrak{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n},$$

die mit $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ vertauschbar ist. Diese Transformationen sind dargestellt durch die Formel

$$Yf = \eta_1(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \eta_n(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n},$$

dabei vorausgesetzt, dass die $n-1$ ersten Coefficienten $\eta_1 \ldots \eta_{n-1}$ die Bedingung

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}} = 0$$

erfüllen. Erweitern wir nun die allgemeine infinitesimale Transformation Yf, indem wir die Incremente der Differentialquotienten

aller $\mathfrak{x}_k$ nach den x berechnen, und bestimmen sodann ein volles System von Differentialinvarianten

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right)$$

der Gruppe Yf, so soll das Gleichungssystem (8) die Form

$$J_k\left(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots\right) = B_k(x_1 \cdots x_n)$$

erhalten können.

Da $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-1}$ ein System Lösungen von $Xf = 0$ darstellen, besteht eine Relation

$$Xf = \sigma \sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

und wenn hier $f = \mathfrak{x}_n$ gesetzt wird, kommt

$$X\mathfrak{x}_n = \sigma \sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = \sigma,$$

sodass, da $X\mathfrak{x}_n = 1$ ist, folgt $\sigma = 1$ und

$$Xf = \sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Diese identische Gleichung zerlegt sich nun aber in n Gleichungen

$$J_k \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots\cdots\cdots\cdots \mathfrak{x}_{n-1} \\ x_1 \ldots x_{k-1}\, x_{k+1} \ldots x_n \end{vmatrix} = \xi_k(x_1 \ldots x_n)$$
$$(k = 1, 2 \ldots n).$$

In diesen n Gleichungen sind die rechten Seiten bekannte Functionen der x. Die n linksstehenden Functionaldeterminanten sind Differentialinvarianten der Gruppe Yf, deren endliche Transformationen

$$\bar{\mathfrak{x}} = \omega_k(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1}) \qquad (k = 1 \cdots n-1)$$

der einzigen Bedingung

$$\begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{x}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{x}}_{n-1} \\ \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1} \end{vmatrix} = 1$$

unterworfen sind; es ist ja:

$$\begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{x}}_1 \cdots\cdots\cdots\cdots \bar{\mathfrak{x}}_{n-1} \\ x_1 \ldots x_{k-1}\, x_{k+1} \ldots x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{x}}_1 \cdots \bar{\mathfrak{x}}_{n-1} \\ \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots\cdots\cdots\cdots \mathfrak{x}_{n-1} \\ x_1 \ldots x_{k-1}\, x_{k+1} \ldots x_n \end{vmatrix}$$

und in Folge dessen:

$$\begin{vmatrix} \bar{\mathfrak{x}}_1 \cdots\cdots\cdots\cdots \bar{\mathfrak{x}}_{n-1} \\ x_1 \dots x_{k-1}\, x_{k+1} \dots x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots\cdots\cdots\cdots \mathfrak{x}_{n-1} \\ x_1 \dots x_{k-1}\, x_{k+1} \dots x_n \end{vmatrix} .$$

Wir kennen somit schon n Differentialinvarianten der Gruppe Yf, namentlich $J_1 \dots J_n$ als Functionen von $x_1 \dots x_n$. Offenbar ist nun aber auch die Functionaldeterminante

$$J = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \\ x_1 \dots x_n \end{vmatrix}$$

selbst eine Differentialinvariante der Gruppe Yf, und den Werth dieser Invariante, nämlich 1, kennen wir ebenfalls.

Es lässt sich nun vermuthen, dass die $n+1$ Grössen $J_1 \dots J_n$ J ein volles System von Differentialinvarianten der Gruppe Yf bilden. Wir verificiren dies, indem wir zeigen, dass die $n+1$ Gleichungen

$$J_1 = \xi_1 \dots J_n = \xi_n , \quad J = 1$$

die Gleichungen des ursprünglichen Systems (8) vollständig ersetzen. Dass dies wirklich der Fall ist, beweisen wir folgendermassen. Die Gleichungen $J_1 = \xi_1 \dots J_n = \xi_n$ zeigen, dass Xf die Form

$$Xf = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1} f \\ x_1 \dots\dots x_n \end{vmatrix}$$

erhalten kann. Die n Gleichungen $J_1 = \xi_1 \dots J_n \dots \xi_n$ sind daher nur eine andere Form der Gleichungen

$$X\mathfrak{x}_1 = 0 \dots X\mathfrak{x}_n = 0 , \quad X\mathfrak{x}_n = 1 .$$

Hiermit ist der verlangte Beweis erbracht.

Unser Problem, die infinitesimale Transformation Xf unsrer ursprünglichen Gruppe durch eine Transformation der Gruppe $\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x_1 \dots x_n)$ auf der Form einer Translation zu bringen, findet daher ihren analytischen Ausdruck in den n Gleichungen

$$J_k \equiv \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots\cdots\cdots\cdots \mathfrak{x}_{n-1} \\ x_1 \dots x_{k-1}\, x_{k+1}\, x_n \end{vmatrix} = \xi_k(x) \quad (k = 1 \dots)$$

verbunden mit der Gleichung

$$J = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \\ x_1 \dots x_n \end{vmatrix} = 1 .$$

Hier dienen die Gleichungen $J_k = \xi_k$ zur Bestimmung von $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-1}$. Ist diese Bestimmung geleistet, so gestattet die Gleichung $J = 1$ die Grösse $\mathfrak{x}_n$ durch eine Quadratur zu finden.

Wir wissen, dass die Differentialgleichungen unseres Problems $J_k = \xi_k$, $J = 1$ mit den Gleichungen

$$X\mathfrak{x}_1 = 0 \dots \quad X\mathfrak{x}_{n-1} = 0\,, \quad X\mathfrak{x}_n = 1$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n \\ x_1 \dots x_n \end{vmatrix} = 1$$

äquivalent sind; wir wissen ferner, dass $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2 \dots \mathfrak{x}_{n-2}$ keiner anderen Beschränkung unterworfen sind, als dass sie *unabhängige* Lösungen von Xf sein sollen. *Gerade hierin liegt es, dass die Bestimmung dieser $n-2$ ersten Lösungen keine Vereinfachung darbieten kann.*

Zur Bestimmung der letzten Lösung $\mathfrak{x}_{n-1}$ von $Xf = 0$ dienen nur die n linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \dots\dots\dots\dots \mathfrak{x}_{n-2} f \\ x_1 \dots x_{k-1}\, x_{k+1} \dots x_{n-1} \end{vmatrix} = \xi_k(x_1 \dots x_{n-1})$$
$$k = 1, 2, \dots n\,,$$

deren gemeinsame Lösung $f = \mathfrak{x}_{n-1}$ ist. Diese Gleichungen können nun aber nicht unabhängig sein, denn sonst wäre $\mathfrak{x}_{n-1}$ bis auf eine additive Constante bestimmt, während wir wissen, dass sobald $f = \bar{\mathfrak{x}}_{n-1}$ eine particuläre Lösung der letzten Gleichungen darstellt, dass dann die allgemeine Lösung die Form

$$f = \bar{\mathfrak{x}}_{n-1} + \alpha(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-2})$$

besitzt und somit eine willkürliche Function der Argumente $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-2}$ enthält. Da wir aber von vornherein wissen, dass diese willkürliche Function *additiv* auftritt, so dürfen wir behaupten, dass die Gleichungen (9) durch Einführung der unabhängigen Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-2}\; \mathfrak{y}_{n-1}\; \mathfrak{y}_n$$

sich auf *zwei* Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_{n-1}} = \beta_{n-1}(\mathfrak{y}_{n-1}\; \mathfrak{y}_n\; \mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}_n} = \beta_n(\mathfrak{y}_{n-1}\; \mathfrak{y}_n\; \mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}^u_{-2})$$

reduciren, sodass die Grösse $f = \mathfrak{x}_{n-1}$ durch eine Quadratur bestimmt wird.

Wünschen wir endlich die Grösse $\mathfrak{x}_n$ zu finden, so bilden wir die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots\cdots \mathfrak{x}_{n-1} \, f \\ x_1 \ldots x_{n-1} \, x_n \end{vmatrix} = 1$$

und finden, da die linke Seite immer verschwindet, wenn f gleich einer unter den Grössen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-1}$ gesetzt wird, die gesuchte Grösse $f = \mathfrak{x}_n$ durch eine Quadratur.

Hiermit sind wir zu den von Jacobi entdeckten Integrationsvereinfachungen gekommen; wir haben gesehen, dass Jacobi's Resultat ein Ausfluss unsrer allgemeinen Theorie ist; überdies haben wir nachgewiesen, dass Jacobi's *Theorie definitiv* ist, indem sie sich nicht verbessern lässt.

Es ist bekanntlich Jacobi, der den Begriff Functionaldeterminante eingeführt hat. Benutzt man den Begriff des n-fach ausgedehnten Raumes und deutet dementsprechend die Transformation

$$\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x_1 \ldots x_n) \qquad (k = 1 \ldots n)$$

als eine Abbildung des Punktraumes $x_1 \ldots x_n$ auf den Punktraum $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$, so lässt sich die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \\ x_1 \ldots x_n \end{vmatrix}$$

deuten als das Verhältniss zwischen einem infinitesimalen Volumtheil des Raumes $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ und dem entsprechenden Volumtheil des Raumes $x_1 \ldots x_n$. Dies ist längst bekannt. Gerade dieser alte Satz gestattete uns im Vorangehenden zu behaupten, dass die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \\ x_1 \ldots x_n \end{vmatrix} = 1$$

alle Transformationen des Raumes definirt, bei denen alle Volumina ungeändert bleiben. Unsere Einführung des allgemeinen Begriffes infinitesimale Transformation giebt aber, wie wir auch bei dieser Gelegenheit hervorheben wollen, eine neue begriff-

liche Deutung des Begriffs Functionaldeterminante. *Für uns ist die Functionaldeterminante*

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1} f \\ x_1 \ldots\ldots x_n \end{vmatrix}$$

gradezu das Symbol einer infinitesimalen Transformation Xf, *die alle Volumina invariant lässt.* Die Bahncurven dieser Transformation werden bestimmt durch die Gleichungen $\mathfrak{x}_1 = \text{Const.} \ldots \mathfrak{x}_{n-1} = \text{Const.}$ Ist $\mathfrak{x}_n$ eine beliebige Lösung der Gleichung $Xf = 1$, so ist $\mathfrak{x}_n = \text{Const.}$ die allgemeinste Schaar von ∞^1 $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, die bei Xf invariant bleibt.

Setzen wir insbesondere

$$\mathfrak{x}_1 = x_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-1} = x_{n-1},$$

so erhalten wir das einfache Symbol

$$\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

das in der Analysis den *Differentiationsprocess*, für uns aber die infinitesimale *Translation* darstellt.

Jacobi's Auffassung des Differentiationsprocesses als eines speciellen Falles der Functionaldeterminante hat somit auch einen schönen gruppentheoretischen Sinn.

Mein allgemeiner Satz, dass jede infinitesimale Transformation Xf durch Einführung zweckmässiger unabhängiger Veränderlichen in eine infinitesimale *Translation* übergeht, steht ja in genaustem Zusammenhange mit der Theorie der Functionaldeterminanten.

Kapitel 4.

Bestimmung der stationären Strömungen eines Gases bei constanter Temperatur.

Führt man nach einander zwei Punkttransformationen aus, deren jede alle Volumina nach constanten Verhältnissen ändert, so ist die Reihenfolge dieser beiden Transformationen wiederum eine Transformation, die alle Volumina nach einem bestimmten Verhältnisse ändert. Dieser selbstverständliche Satz ist, wenn man will, eine directe Folge des Multiplicationssatzes zweier Functionaldeterminanten.

Es bilden daher alle Transformationen, bei denen jedesmal alle Volumina nach demselben Verhältniss geändert werden, eine

unendliche Gruppe. Die endlichen Gleichungen $\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x_1 \dots x_n)$ *aller Transformationen dieser Gruppe werden bestimmt durch die Gleichungen*

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n \\ x_1 \dots x_n \end{vmatrix} = 0 \quad (k = 1 \dots n),$$

die somit die Defininitionsgleichungen der endlichen Transformationen unsrer Gruppe darstellen.

Die analytische Definition der *infinitesimalen* Transformationen Xf dieser Gruppe findet man, indem man in die letzten Gleichungen die Werthe

$$\mathfrak{x}_k = x_k + \varepsilon \xi_k \quad (k = 1 \dots n)$$

einführt, und dabei ε als eine infinitesimale Grösse auffasst. Dabei ergiebt sich, dass die n *Gleichungen*

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (k = 1 \dots n)$$

die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen unsrer Gruppe sind.

Indem wir uns nun die Aufgabe stellen, alle eingliedrigen Gruppen zu finden, deren infinitesimale Transformationen die soeben geschriebenen Gleichungen erfüllen, müssen wir uns zuerst klar machen, ob alle infinitesimalen Transformationen unsrer unendlichen Gruppe innerhalb dieser Gruppe gleichberechtigt sind oder nicht. Wir werden finden, dass alle infinitesimalen wie endlichen Transformationen unsrer unendlichen Gruppe sich in ∞^1 Schaaren anordnen, so zwar, dass alle infinitesimalen oder endlichen Transformationen, die einer solchen Schaar angehören, innerhalb der unendlichen Gruppe gleichberechtigt sind.

Wir wollen zuerst durch begriffliche Betrachtungen zeigen, dass dieser Satz für endliche Transformationen unsrer Gruppe richtig ist.

Sei T eine Transformation unsrer Gruppe, die alle Volumina des Raumes τ-fach verdoppelt und ebenso S eine Transformation der Gruppe, die alle Volumina σ-fach verdoppelt. Führen wir dann die Transformation S auf die Transformation T aus, so erhalten wir die Transformation

$$S^{-1}TS.$$

Wünschen wir nun zu wissen, wie diese neue Transformation alle Volumina ändert, so bilden wir die Gleichung

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \tau \cdot \sigma = \tau$$

und schliessen, dass die Transformation $S^{-1}TS$ wie die Transformation T alle Volumina τ-fach verdoppelt. Dies bleibt wahr, welche Transformation unsrer Gruppe auch S sein mag.

Satz. *Alle Transformationen unsrer Gruppe ordnen sich in ∞^1 Schaaren, deren jede innerhalb der Gruppe invariant ist. Jede einzelne Schaar besteht aus denjenigen Transformationen T der Gruppe, die alle Volumina nach einem gewissen gegebenen Verhältniss $1:\tau$ ändern. Unter diesen invarianten Schaaren giebt es eine und offenbar nur eine, deren Transformationen eine Untergruppe und zwar eine invariante Untergruppe bilden. Es ist dies die Schaar $\tau = 1$, deren Transformationen alle Volumina ungeändert lassen.*

Wir completiren bald diesen ziemlich selbstverständlichen Satz, indem wir zeigen, dass hiermit alle invarianten Schaaren von Transformationen unsrer Gruppe gefunden sind.

Zunächst wollen wir aber zeigen, dass die eben erhaltenen Resultate auch dann gültig bleiben, wenn wir infinitesimale Transformationen statt Transformationen schreiben. Am einfachsten erkennen wir dieses, wenn wir in den Betrachtungen, die zu unserem Satze führten, unter T eine beliebige infinitesimale Transformation unsrer Gruppe verstehen, unter S dagegen eine beliebige endliche Transformation der Gruppe. Da nämlich unter dieser Voraussetzung auch $S^{-1}TS$ eine infinitesimale Transformation der Gruppe darstellt, so leuchtet die Richtigkeit unsrer Ankündigung ohne weiteres ein. Bemerken wir nun überdies, dass die Grösse

$$1 + \delta t \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \right)$$

das Verhältniss angiebt, nach denen die Transformation Xf das Volumen eines unendlich kleinen Raumtheils ändert, so sehen wir, dass wir unser Resultat folgendermassen formuliren können:

Satz. *Die endlichen Transformationen unsrer Gruppe ordnen sich in ∞^1 Schaaren, deren jede innerhalb der Gruppe invariant ist. Diese ∞^1 Schaaren werden definirt durch die Gleichung*

$$\sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = c = \text{Const.}$$

In ganz entsprechender Weise ordnen sich alle infinitesimalen Transformationen der Gruppe in ∞^1 invariante Schaaren, deren jede durch eine Gleichung von der Form

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} = a = \text{Const.}$$

definirt wird.

Der soeben aufgestellte Satz lässt sich auffassen als Corollar eines allgemeinen analytischen Theorems, das ein selbstständiges Interesse darbietet, und daher hier abgeleitet werden soll. Seien

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

$$Yf = \eta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \eta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

zwei beliebige infinitesimale Transformationen, die nicht gerade unsrer Gruppe gehören sollen. Dann ist

$$XYf - YXf = \sum^k (X\eta_k - Y\xi_k) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

und

$$\sum^k \frac{\partial}{\partial x_k}(X\eta_k - Y\xi_k) = \sum^k \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\sum^i \xi_i \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} - \sum^i \eta_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right\}$$

$$= \sum_{k,i} \xi_i \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k,i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} - \sum_{k,i} \eta_i \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_k \partial x_i} - \sum_{k,i} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{k,i} \xi_i \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{k,i} \eta_i \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x_k \partial x_i}$$

$$= X\left(\sum^k \frac{\partial \eta_k}{\partial x_k}\right) - Y\left(\sum^k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k}\right).$$

Hiermit ist zunächst der Satz erhalten.

Satz. Liefern zwei ganz beliebige infinitesimale Transformationen

$$Xf = \sum^i \xi_i p_i, \quad Yf = \sum \eta_i p_i$$

durch Klammeroperation die *Transformation*

$$XYf - YXf = \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \zeta_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

so besteht identisch die Gleichung

$$\sum^k \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_k} = X\left(\sum^k \frac{\partial \eta_k}{\partial x_k}\right) - Y\left(\sum^k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k}\right).$$

Wir können übrigens diesen Satz auch folgendermassen aussprechen:

Satz. *Sind* $\xi_1 \ldots \xi_n \, \eta_1 \ldots \eta_n$ *ganz beliebige Functionen von* $x_1 \ldots x_n$, *so besteht die Gleichung*

$$\sum^k \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\sum^i \xi_i \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} - \sum^i \eta_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right\}$$

$$= \sum^i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum^k \frac{\partial \eta_k}{\partial x_k} - \sum^i \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum^k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k}$$

immer identisch.

Setzen wir insbesondere voraus, dass Xf und Yf der in diesem Kapitel betrachteten unendlichen Gruppe angehören, dass also die Summen

$$\sum^k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} \quad \text{und} \quad \sum^k \frac{\partial \eta_k}{\partial x_k}$$

alle beide einen constanten Werth haben, so sehen wir, dass die durch Klammeroperation entstandene Transformation $XYf - YXf$ die Eigenschaft besitzt, alle Volumina *invariant* zu lassen. Benutzen wir daher den Begriff *derivirte Gruppe*, so können wir den Satz aussprechen:

Satz. *Die Gruppe derjenigen Transformationen, die alle Volumina invariant lassen, ist die erste derivirte Gruppe derjenigen grösseren Gruppe, deren Transformationen alle Volumina nach constanten Verhältnissen ändern.*

Bemerken wir andererseits, dass bei Ausführung der infinitesimalen Transformation Yf auf Xf die Transformation

$$Xf + \delta t(YX)$$

ensteht, so erhalten wir den schon oben gefundenen Satz:

Satz. *Alle infinitesimalen Transformationen* Xf, *für welche der Ausdruck*

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}$$

einen bestimmten constanten Werth hat, bilden eine invariante Schaar innerhalb derjenigen Gruppe, deren Transformation alle Volumina nach constanten Verhältnissen ändern.

Wir gehen nun einen Schritt weiter und stellen die Behauptung auf, dass zwei infinitesimale Transformationen Xf und Yf, die die Bedingungen

$$\sum^k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} = \sum^k \frac{\partial \eta_k}{\partial x_k} = \text{Const.}$$

erfüllen, innerhalb unserer Gruppe *gleichberechtigt* sind. Wir formuliren dabei diese Behauptung lieber folgendermassen: *Besteht die Gleichung*

$$\sum \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} = a = \text{Const.}\,,$$

so giebt es immer n Functionen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ *von* $x_1 \ldots x_n$, *die die Bedingungen*

$$Xf = a\mathfrak{x}_n \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (k = 1 \cdots n)$$

erfüllen.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung allgemein nachzuweisen, denken wir uns eine beliebige infinitesimale Transformation Xf vorgelegt, die die Bedingung

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} = a = \text{Const.} \neq 0$$

erfüllt. Wir nehmen an, dass sie durch Einführung neuer Veränderlicher $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$, die die Bedingung

$$\text{(A)} \qquad \sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = k = \text{Const.}$$

erfüllen, auf die Form $c\mathfrak{x}_n \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ gebracht werden kann:

$$\text{B)} \qquad \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = c\mathfrak{x}_n \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}\,.$$

Es gelingt uns, indem wir die Möglichkeit dieser Ueberführung voraussetzen, die entsprechende Form der Functionen $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n$ zu bestimmen. Nachträglich verificiren wir, dass die hiermit bestimmte Transformation wirklich immer das Verlangte leistet, wohlbemerkt wenn $a = c$ ist.

Zunächst erkennen wir, indem wir in die Identität (B) der Grösse f nach und nach den Werth $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-1}$ ertheilen, dass diese $n - 1$ Grössen Lösungen von $Xf = 0$ sein müssen, dass also

$$X\mathfrak{x}_1 = X\mathfrak{x}_2 = \cdots = X\mathfrak{x}_{n-1} = 0$$

sein muss. Ertheilen wir sodann f in (B) den Werth $\mathfrak{x}_n$, so kommt

$$\text{(C)} \qquad X\mathfrak{x}_n = c\mathfrak{x}_n \, .$$

Nun aber besteht, gerade weil $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-1}$ Lösungen von $Xf = 0$ sind, eine Relation

$$\text{(D)} \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 & \cdots & \mathfrak{x}_{n-1} & f \\ x_1 & \cdots & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \varrho Xf$$

und dabei besteht, wie wie wir im vorigen Kapitel sahen, die Relation

$$\frac{\partial(\varrho \xi_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial(\varrho \xi_n)}{\partial x_n} = 0$$

oder

$$X\varrho + \varrho \sum\nolimits^k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} = 0$$

oder mit Berücksichtigung der Relation:

$$\sum\nolimits^k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} = a$$

einfach:

$$\text{(E)} \qquad X\varrho + a\varrho = 0 \, .$$

Ertheilen wir andererseits in der Formel (D) der Grösse f den Werth $\mathfrak{x}_n$, so kommt

$$\sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = \varrho X\mathfrak{x}_n$$

und durch Berücksichtigung der beiden Formeln (A) und (C) folgt

$$k = \varrho c \mathfrak{x}_n \, , \quad \varrho = \frac{k}{c\mathfrak{x}_n} \, ,$$

sodass durch Substitution der gefundenen Werthe von ϱ in (E) sich ergiebt

$$\frac{k}{c} X\left(\frac{1}{\mathfrak{x}_n}\right) + \frac{ak}{c}\frac{1}{\mathfrak{x}_n}$$

oder

$$X\mathfrak{x}_n = a\mathfrak{x}_n \,.$$

Früher fanden wir aber: $X\mathfrak{x}_n = c\mathfrak{x}_n$, also schliessen wir, dass $a = c$ sein muss. Hiermit haben wir zunächst einen neuen Beweis des oben abgeleiteten Satzes, dass die *Constante*

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n}$$

bei Transformationen unsrer Gruppe ihren Werth nicht ändert.

Gleichzeitig erkennen wir, dass die gesuchte Transformation unsrer Gruppe, die Xf auf die gegebene kanonische Form bringen soll, jedenfalls die Form

$$\mathfrak{x}_1 = \varphi_1, \cdots \mathfrak{x}_{n-1} = \varphi_{n-1}, \; \mathfrak{x}_n = \frac{k}{c}\frac{1}{\varrho}$$

haben muss, wobei $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ ein System Lösungen der Gleicung $Xf = 0$ bezeichnen, während ϱ durch die Gleichung

$$\varrho Xf = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 & \cdots & \mathfrak{x}_{n-1} f \\ x_1 & \ldots\ldots & x_n \end{vmatrix}$$

bestimmt wird.

Wir wollen jetzt verificiren, dass die hiermit bestimmte Transformation wirklich immer das Verlangte leistet.

In den gefundenen Veränderlichen nimmt ja Xf die Form an

$$Xf = X\mathfrak{x}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + X\mathfrak{x}_{n-1}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}} + X\mathfrak{x}_n \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n};$$

nun aber ist

$$X\mathfrak{x}_1 = X\mathfrak{x}_2 = \cdots = X\mathfrak{x}_{n-1} = 0$$

und

$$X\mathfrak{x}_n = \frac{k}{c} X\left(\frac{1}{\varrho}\right) = -\frac{k}{c}\frac{X\varrho}{\varrho^2}\,.$$

Ferner ist

$$X\varrho + \varrho\sum \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} = 0 = X\varrho + c\varrho\,,$$

also folgt

$$X\mathfrak{x}_n = -\frac{k}{c}\cdot\frac{-c\varrho}{\varrho^2} = k\frac{1}{\varrho} = c\mathfrak{x}_n\,.$$

21*

Es ergiebt sich also, dass Xf wirklich die angekündigte Form

$$Xf = c\mathfrak{x}_n \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

annimmt.

In diesen Entwickelungen haben wir stillschweigend von dem schon im vorigen Kapitel erledigten Falle: $c = 0$ abgesehen.

Unser Resultat ist also das folgende:

Liegt eine infinitesimale Transformation $\xi p + \cdots + \xi_n p_n$ *vor, die alle Volumina nach constantem Verhältnisse ändert, die also die Gleichung*

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} = c$$

erfüllt, so giebt es immer unter den Transformationen der unendlichen Gruppe

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1 & \cdots & \mathfrak{x}_n \\ x_1 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = 0 \quad (k = 1 \ldots n)$$

solche, die Xf *auf die Form*

$$Xf = c\mathfrak{x}_n \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

bringen. Man findet die allgemeinste derartige Transformation, indem man $n - 1$ *unabhängige Lösungen* $\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ *der Gleichung* $Xf = 0$ *herausgreift und sodann die Identität*

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 \cdots \varphi_{n-1} f \\ x_1 \ldots\ldots x_n \end{vmatrix} = \varrho Xf$$

bildet. Alsdann ist

$$\mathfrak{x}_1 = \varphi_1, \cdots \mathfrak{x}_{n-1} = \varphi_{n-1}, \; \mathfrak{x}_n = \frac{k}{c} \frac{1}{\varrho}$$

die allgemeinste Transformation, die das Verlangte leistet.

Es fragt sich nun, welchen Vortheil wir aus unseren allgemeinen Theorien für die Reduction unserer infinitesimalen Transformation Xf auf die kanonische Form $c\mathfrak{x}_n \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ ziehen können. Es wird sich ergeben, dass die Leistungen unsrer all-

gemeinen Theorien in dem vorliegenden Falle äusserst bescheiden sind. Wir haben ja grade diejenige unendliche Gruppe gewählt, für welche unsre Theorien am wenigsten leisten. Die Bedeutung unsrer Entwicklungen liegt aber darin, dass wir genau feststellen können, welchen Vortheil für die Reduction von Xf auf die Normalform wir daraus ziehen können, dass wir von vornherein wissen, dass die infinitesimale Transformation Xf alle Volumina nach constantem Verhältniss ändert.

Es ist nun zunächst klar, dass *die Integration der Gleichung* $Xf = 0$ *gar keine Vereinfachung gestattet.* Dies folgt daraus, dass die Lösungen $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ der Gleichung $Xf = 0$ gar keiner Beschränkung unterworfen sind.

Soll daher eine infinitesimale Transformation Xf, die alle Volumina nach constantem Verhältniss ändert, auf die Normalform $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}}$ gebracht werden — und zwar durch eine allgemein gültige Methode, die für alle derartigen Transformationen Xf zum Ziele führt, — so muss zuerst die Gleichung $Xf = 0$ integrirt werden; ist dieses geschehen, so braucht man nur gewisse *Differentiationen* auszuführen. Die unter anderen Umständen erforderliche Quadratur fällt weg. Eine weitergehende Vereinfachung ist nicht möglich, so lange über Xf nichts mehr bekannt ist, als dass sie alle Volumina nach constantem Verhältniss ändert.

Kapitel 5.

Lineare partielle Differentialgleichungen mit einem bekannten Multiplicator und einer bekannten infinitesimalen Transformation.

Die Jacobi'sche Multiplicatortheorie lässt sich nach vielen Richtungen hin verallgemeinern. Dies darf nicht überraschen: es ist ja überhaupt ein allgemeines Phänomen, dass die gruppentheoretische Auffassung bekannter Theorien fast unmittelbar zu den verschiedenartigsten Verallgemeinerungen führt. Nachdem wir in Kapitel 3 eine gruppentheoretische Behandlung der Multiplicatortheorie durchgeführt hatten, entwickelten wir schon in Kapitel 4 eine Verallgemeinerung, die unter methodischem Gesichtspunkte Interesse darbietet, während allerdings ihre praktische Bedeutung verhältnismässig gering ist. In diesem

Kapitel entwickeln wir einige weitere Verallgemeinerungen, die auch unter praktischem Gesichtspunkte eine erhebliche Wichtigkeit besitzen.

Wir wollen annehmen, dass die lineare partielle Differentialgleichung

$$Af \equiv \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

zur Integration vorliegt, und dass wir sowohl einen Multiplicator M wie eine infinitesimale Transformation

$$Bf = \beta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \beta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

der Gleichung $Af = 0$ kennen. Diese unsre Annahme findet darin ihren analytischen Ausdruck, dass die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial (M\alpha_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial (M\alpha_n)}{\partial x_n} = 0$$

und

$$BAf - ABf = \lambda(x_1 \ldots x_n)\, Af$$

bestehen. Hier ist λ eine Function der x, die keiner Beschränkung unterworfen ist. Wir stellten uns nun schon im Anfange der siebziger Jahre die Aufgabe, diese Voraussetzungen so viel wie möglich für die Integration von $Af = 0$ zu verwerthen. Die wichtigsten in dieser Weise erhaltenen Resultate veröffentlichten wir in den Mathematischen Annalen (Bd. XI, 1876—77) und im Norwegischen Archiv (Bd. 9, 1884). Im Folgenden reproduciren wir einige unter diesen unseren alten Untersuchungen in etwas geänderter Form. Da wir uns hier auf unsre Theorie des allgemeinen Problems II stützen können, kommen wir hier etwas schneller zum Ziele. Zu bemerken ist überdies, dass unsre allgemeinen Gesichtspunkte in der jetzigen Darstellung deutlicher hervortreten.

In der citirten Abhandlung S. 508 in den Mathematischen Annalen Bd. XI aus den Jahren 1876—77 zeigten wir, dass die Grösse

$$J = B(\log M) + \sum_1^n {}_k \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} + \lambda$$

entweder eine Constante oder aber eine Lösung der Gleichung $Af = 0$ darstellt. War J keine Constante, so waren gleichzeitig mit J auch die Grössen BJ, BBJ u. s. w. Lösungen von $Af = 0$.

Ist andererseits J eine Constante, so macht es einen wesentlichen Unterschied, ob diese Constante gleich Null oder von Null verschieden ist. Ist $J = 0$, so ist M (vgl. die citirte Abhandlung im Norwegischen Archiv, Bd. 9, 1884) *ein Multiplicator des vollständigen Systems*

$$Af = 0 , \quad Bf = 0 .$$

Ist J dagegen gleich einer von Null verschiedenen Constante, so dient auch dieser Umstand, wie wir in der soeben citirten Arbeit zeigten, zur Vereinfachung des Integrationsgeschäfts.

Die Entwickelungen der beiden citirten Abhandlungen zeigen nun allerdings deutlich, dass die von uns entwickelten Methoden die vorhandenen Umstände so viel wie möglich verwerthen. Nichtsdestoweniger erscheint es zweckmässig, die Ergebnisse unsrer norwegischen Arbeiten, die sich auf den Fall $J =$ Const. beziehen, durch neue Betrachtungen abzuleiten.

Indem wir MAf als neues Af einführen, erkennen wir, dass wir ohne Weiteres $M = 1$ und dementsprechend:

$$J = \sum_1^n{}_k \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} + \lambda = a = \text{Const.}$$

setzen können.

Nachdem wir diese formelle Vereinfachung eingeführt haben, können wir dem Integrationsproblem der Gleichung $Af = 0$ eine solche Form ertheilen, dass es als ein specieller Fall des früher aufgestellten Problems II hervortritt.

Da nämlich die *infinitesimale* Transformation Af alle Volumina invariant lässt, so giebt es unter den *endlichen* Transformationen $\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x_1 \dots x_n)$, die alle Volumina invariant lassen sicher solche, die Af auf die Form $\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$ bringen. Gleichzeitig erhält Bf die Form

$$Bf = \sum_k^{1\dots n-1} \eta_k(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_k} + \sigma(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n} ,$$

und zwar ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mathfrak{x}_n} = -\lambda .$$

Da nun J sich bei Einführung neuer Veränderlicher als Invariante verhält, so wird

$$J = \frac{\partial \eta_1}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}} + \frac{\partial \sigma}{\partial \mathfrak{x}_n} + \lambda$$

$$= \frac{\partial \eta_1}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}},$$

und da nach unsrer Annahme

$$J = a = \text{Const.}$$

ist, so kommt

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}} = a = \text{Const.}$$

Hier zeigt es sich nun deutlich, dass die beiden Fälle $a=0$ und $a \neq 0$ wesentlich verschieden sind.

Ist die Constante $a = 0$, so giebt es offenbar eine Transformation $\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x_1 \dots x_n)$, die alle Volumina invariant lässt, und dabei Af und Bf auf die Form

$$Af = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

$$Bf = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}} + \sigma \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

bringt. Die allgemeinste Transformation, die diese Bedingungen erfüllt, wird definirt durch die Gleichungen

$$A\mathfrak{x}_1 = \cdots\cdots = A\mathfrak{x}_{n-2} = A\mathfrak{x}_{n-1} = 0, \quad A\mathfrak{x}_n = 1,$$

$$B\mathfrak{x}_1 = \cdots\cdots = B\mathfrak{x}_{n-2} = 0, \quad B\mathfrak{x}_{n-1} = 1,$$

$$\sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \frac{\partial \mathfrak{x}_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = 1,$$

die nach den früheren Überlegungen sicher integrabel sind.

Es ist nun leicht zu erkennen, dass das hiermit formulirte Problem ein specieller Fall unseres allgemeinen Problems II ist. In der That, erfüllt eine jede unter den beiden Transformationen $\bar{\mathfrak{x}}_k = \bar{\varphi}_k(x)$ und $\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x)$ die gestellten Forderungen, so wird die Transformation $\mathfrak{x}_k = \psi_k(\bar{\mathfrak{x}})$ durch das Bestehen von Gleichungen, die die Form

$$\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathfrak{x}}_n}, \quad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathfrak{x}}_{n-1}} + \omega \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

$$\sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial \bar{\mathfrak{x}}_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial \bar{\mathfrak{x}}_n} = 1$$

besitzen, vollständig charakterisirt. Daher bilden die Gleichungen $\mathfrak{x}_k = \psi_k(\bar{\mathfrak{x}})$ eine Gruppe G und zwar eine Untergruppe derjenigen Gruppe, deren Transformationen alle Volumina invariant lassen. Wir wollen alle infinitesimalen Transformationen

$$Cf = \gamma_1(\mathfrak{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots \gamma(\mathfrak{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

der Gruppe G bestimmen.

Wir erkennen unmittelbar, dass Cf die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}, Cf\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}}, Cf\right) = \varrho \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \mathfrak{x}_2} + \cdots \frac{\partial \eta_n}{\partial \mathfrak{x}_n} = 0$$

erfüllt und somit die Form

$$Cf = \sum_k^{1\ldots n-1} \gamma_k(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-2}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_k} + \gamma_n(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

besitzt, wobei $\gamma_1 \ldots \gamma_{n-2}$ überdies die Relation

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \frac{\partial \gamma_{n-2}}{\partial \mathfrak{x}_{n-2}} = 0$$

befriedigen.

Es sind nun $\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_{n-2}$ unabhängige Lösungen des vollständigen Systems

$$Af = 0, \quad Bf = 0,$$

und offenbar können $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-3}$ als ganz beliebige unabhängige Lösungen gewählt werden; sind sie gefunden, so ist $\mathfrak{x}_{n-2}$ bis auf eine additiv willkürliche Function von $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-3}$ bestimmt. Daher verlangt die Auffindung von $\mathfrak{x}_{n-2}$ nur noch eine Quadratur; sodann sind zwei weitere Quadraturen erforderlich, um $\mathfrak{x}_{n-1}$ und $\mathfrak{x}_n$ zu finden.

Es folgt unmittelbar aus meinen allgemeinen Theorien, dass die hier angegebenen Operationen wirklich die einfachsten sind, vermöge deren das vorliegende Transformationsproblem gelöst werden kann.

Kennt man daher einen Multiplicator M und eine infinitesimale Transformation Bf einer zur Integration vorgelegten Gleichung, so bildet man zuerst wie früher die Grösse

$$J = B \log M + \sum \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} + \lambda .$$

Ist dann insbesondere $J = 0$, so ist M ein Multiplicator des vollständigen Systems $Af = 0$, $Bf = 0$. Gelingt es, $n-3$ unabhängige Lösungen $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-3}$ dieses vollständigen Systems zu finden, so erhält man die letzte Lösung dieses Systems durch Quadratur und die noch fehlende Lösung von $Af = 0$ durch eine weitere Quadratur. Hiermit ist das Integrationsgeschäft in der einfachst möglichen Weise erledigt.

Wenden wir uns jetzt zu dem Falle

$$J = a = \text{Const.} \neq 0$$

und halten dabei an den auf Seite 315 gemachten Voraussetzungen fest, so können wir ohne Beschränkung $a = 1$ setzen; das erreichen wir ja, indem wir Bf, durch a dividirt, als neues Bf einführen. Früher (S. 315) sahen wir, dass es jetzt möglich ist, durch eine Transformation, die alle Volumina invariant lässt, die Ausdrücke Af und Bf auf die Form

$$Af = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

$$Bf = \sum_1^{n-1} {}^k \eta_k(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-1}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_k} + \eta_n(\mathfrak{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

zu bringen, wobei überdies die Relation

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \mathfrak{x}_1} + \cdots + \frac{\partial \eta_{n-1}}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}} = 1$$

besteht. Daher giebt es unter den Transformationen $\mathfrak{x}_k = \varphi_k(x)$ des n-fachen Raumes, die alle Volumina ungeändert lassen, sicher solche, die Af und Bf auf die Form

$$Af = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

$$Bf = \mathfrak{x}_{n-1}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}} + \sigma\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

bringen. Diese neuen Veränderlichen $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_n$ sind bestimmt durch die Differentialgleichungen

$$A\mathfrak{x}_1 = \cdots = A\mathfrak{x}_{n-1} = 0\,, \quad A\mathfrak{x}_n = 1\,,$$

$$B\mathfrak{x}_1 = \cdots = B\mathfrak{x}_{n-2} = 0\,, \quad B\mathfrak{x}_{n-1} = \mathfrak{x}_{n-1}\,,$$

$$\sum \pm \frac{\partial \mathfrak{x}_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial \mathfrak{x}_n}{\partial x_n} = 1\,,$$

die nach den früheren Entwickelungen ein integrables System bilden.

Jetzt leuchtet wiederum ohne weiteres ein, dass die allgemeinsten Lösungen $\mathfrak{x}_k$ aus einem speciellen Lösungssysteme $\bar{\mathfrak{x}}_k$ durch Gleichungen hervorgehen, die eine Gruppe bilden. Die infinitesimalen Transformationen

$$Yf = \sum_1^n {}^k \gamma_k(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_n)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_k}$$

werden bestimmt durch die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}, \; Yf\right) = 0\,, \quad \left(\mathfrak{x}_{n-1}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}}, \; Yf\right) = \varrho\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial \mathfrak{x}_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \mathfrak{x}_2} + \cdots + \frac{\partial \gamma_n}{\partial \mathfrak{x}_n} = 0$$

und besitzen daher die Form

$$Yf = \sum_1^{n-2} {}^k \gamma_k(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-2})\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_k} - \left(\sum_1^{n-2} {}^k \frac{\partial \gamma_k}{\partial \mathfrak{x}_k}\right)\mathfrak{x}_{n-1}\gamma_{n-1} + \gamma_n(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_{n-1})\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}\,.$$

Es sind daher $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-2}$ ganz beliebige unabhängige Lösungen des vollständigen Systems

$$Af = 0\,, \quad Bf = 0\,,$$

deren Bestimmung somit im Allgemeinen gar keine Vereinfachung darbietet. Sind diese $n-2$ Lösungen gefunden, so verlangt die Bestimmung von $\mathfrak{x}_{n-1}$ nur eine Quadratur. Dies folgt unmittelbar daraus, dass eine jede unter den zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten

$$\mathfrak{x}_1 = \text{Const.} \dots \mathfrak{x}_{n-2} = \text{Const.}$$

∞^1 Charakteristiken der Gleichung $Af = 0$ enthält, die von der infinitesimalen Transformation Bf untereinander vertauscht werden. In dieser Weise finden wir eine Grösse $\mathfrak{x}_{n-1}$, die die Gleichungen

$$A\mathfrak{x}_{n-1} = 0\,, \quad B\mathfrak{x}_{n-1} = \mathfrak{x}_{n-1}$$

erfüllt, durch Quadratur.

Handelt es sich aber nur darum, die fehlende Lösung der Gleichung $Af = 0$ zu finden, so ist es nicht einmal nothwendig, die besprochene Quadratur auszuführen.

Nachdem nämlich die $n-2$ Lösungen $\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_{n-2}$ der Gleichung $Af = 0$ gefunden sind, so kennen wir zwei Integrabilitätsfactoren der übrig bleibenden Differentialgleichung erster Ordnung. Den einen Integrabilitätsfactor giebt Jacobi's Multiplicatortheorie, den andern giebt die infinitesimale Transformation Bf, wie aus meinen alten Theorien bekannt ist. Da nun diese beiden Integrabilitätsfactoren wesentlich verschieden sind (vgl. die citirte Arbeit im Norwegischen Archiv Bd. 9, 1884), so finden wir wirklich die fehlende Lösung der Gleichung ohne Quadratur.

Bei dieser Gelegenheit brauchen wir nicht auf die Bestimmung der Grössen $\mathfrak{x}_{n-1}$ und $\mathfrak{x}_n$ weiter einzugehen. *Wir begnügen uns damit, nachgewiesen zu haben, dass unsre Integrationstheorie einer Gleichung $Af = 0$ mit einem bekannten Multiplicator M und einer bekannten infinitesimalen Transformation die grösstmöglichen Integrations-Erniedrigungen leistet.*

Gestattet unsere Gleichung $Af = 0$ mit dem Multiplicator 1 die infinitesimale Transformation Bf:

$$BAf - ABf = \lambda \cdot Af$$

und ist dabei

$$\sum \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} + \lambda = 0,$$

so hat das einen einfachen begrifflichen Sinn. Erinnern wir uns nämlich, dass die infinitesimale Transformation Bf jetzt derjenigen Gruppe G angehört, deren Transformationen alle Volumina invariant lassen, *so enthält die Gruppe G eine infinitesimale Transformation $B'f$, die die Charakteristiken der Gleichung $Af = 0$ in genau derselben Weise wie Bf transformirt.*

Wir haben ja nämlich gesehen (S. 319), dass es unter den Transformationen der Gruppe G solche giebt, die Af und Bf auf die Form

$$Af = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}, \quad Bf = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_{n-1}} + \sigma \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_n}$$

bringen. Daher besitzt die infinitesimale Transformation

$$B'f = Bf - \sigma Af$$

wirklich die oben angegebene Eigenschaft.

Besteht dagegen die Gleichung

$$\sum \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} + \lambda = \text{Const.} \neq 0,$$

so erkennen wir durch ganz ähnliche Überlegungen, dass eine infinitesimale Transformation Bf vorhanden ist, die selbst alle Volumina nach constantem Verhältnisse ändert und dabei die Charakteristiken der Gleichung $Af = 0$ in genau derselben Weise wie Bf transformirt.

Ist endlich der Ausdruck

$$\sum \frac{\partial \beta_k}{\partial x_k} + \lambda$$

keine Constante, so giebt es keine infinitesimale Transformation, die alle Volumina nach constantem Verhältnisse ändert, und dabei die Charakteristiken der Gleichung Af in derselben Weise wie Bf unter sich vertauscht.

Die Entwickelungen dieses Kapitels führen daher zu dem folgenden interessanten Problem:

Wie integrirt man eine Gleichung $Af = 0$, *wenn man einerseits eine infinitesimale Transformation* Bf *dieser Gleichung kennt, und andererseits weiss, dass die infinitesimale Transformation* Af *in einer vorgelegten Gruppe enthalten ist?*

Bei der Behandlung dieses Problems muss man zwischen zwei Fällen unterscheiden, je nachdem die vorgelegte Gruppe eine infinitesimale Transformation $B'f$ enthält, die die Charakteristiken von $Af = 0$ in genau derselben Weise wie Bf transformirt oder nicht.

Eingereicht am 20. März 1895.

H. Bruns, *Zusatz zu der Abhandlung »Das Eikonal« im XXI. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe.*

In der genannten Arbeit wird bei der Untersuchung der centrirten Abbildungen (Abschnitt XIII) der Satz ausgesprochen, dass das Eikonal $E(p, q, P, Q)$ als gewöhnliche Potenzreihe der drei Grössen

$$\alpha = p^2 + q^2, \quad \beta = pP + qQ, \quad \gamma = P^2 + Q^2$$

dargestellt werden könne, sobald die Abbildung für den in den Centrirungsaxen verlaufenden Lichtweg regulär ist. Dieser Satz ist für den Fall der Optik, für den er in erster Linie hergeleitet wurde, ohne Weiteres richtig, dagegen bedarf er einer unterscheidenden Ergänzung, sobald man ihn darüber hinaus ausdehnen will. Ist eine Abbildung centrirt, so erzeugen, wie a. a. O. gezeigt wird, die Objectstrahlen, die in einer durch die x-Axe gelegten Ebene verlaufen, immer Bildstrahlen, die in einer die x-Axe enthaltenden Ebene liegen. Wählt man ein Paar solcher Ebenen als xy- und XY-Ebene, so ist bei den Systemen der Optik die Abbildung in Bezug auf diese Ebenen immer auch symmetrisch, d. h. die Abbildungsgleichungen bleiben gültig, wenn man die Coordinaten k, q, K, Q durch ihre entgegengesetzten Werthe ersetzt. Diese Symmetrie ist aber nicht bei allen centrirten Abbildungen vorhanden, was man am kürzesten aus einem einfachen Beispiel wie

$$E(p, q, P, Q) = pP + qQ + a(pQ - qP)^3$$

ersieht. Dieser Ausdruck führt bei einem hinreichenden kleinen Werthe der Constanten a sicher auf eine strahlenweise Abbildung, und diese ist centrirt, besitzt aber kein Paar von Symmetrieebenen. Die ausserhalb des Falles der Optik denkbaren Abbildungen zerfallen also in zwei Classen, nämlich die symmetrischen und die unsymmetrischen, und nur für die erste dieser beiden Classen ist der angeführte Satz richtig.

1895 März 18.

OEFFENTLICHE SITZUNG

VOM 23. APRIL 1895

ZUR FEIER DES GEBURTSTAGES SR. MAJESTÄT DES KÖNIGS.

Einen Vortrag hielt:

Herr **W. Pfeffer**, o. M.: »Ueber den elektiven Stoffwechsel«.

W. Pfeffer, *Ueber elektiven Stoffwechsel.*

In jeder Pflanze wird die Aufnahme durch die Thätigkeit regulirt und demgemäss eine Auswahl zwischen den dargebotenen Nährstoffen getroffen. Im allgemeinen ist dieses durch die Erfahrung bekannt und causal aufgeklärt, wenn auch im Einzelnen noch viele Fragen der Lösung harren. So ist u. a. bisher noch nicht kritisch geprüft, wie sich die Pflanze dann beträgt, wenn ihr einer der nothwendigsten Elementarstoffe gleichzeitig in verschiedener Verbindungsform zur Verfügung steht. Diese Frage drängt sich für Kalium, Stickstoff, überhaupt für alle nothwendigen Elemente auf, doch bieten die Kohlenstoffverbindungen die grösste Mannigfaltigkeit solcher Körper, die, bei ähnlicher oder unähnlicher chemischer Constitution, mehr oder minder gut als organische Nahrung verwendbar sind.

Bei denjenigen Pflanzen, welche organische Nahrung als solche von aussen beziehen, also bei den Pilzen, kann man eine Kohlenstoffverbindung durch eine andere erfolgreich ersetzen, oder auch die beiden organischen Körper gleichzeitig zur Auswahl zur Verfügung stellen. Einige solcher Combinationen wurden, zur

Gewinnung der leitenden Gesichtspunkte, näher untersucht, und zwar dienten zumeist zwei gewöhnliche Schimmelpilze, Aspergillus niger und Penicillium glaucum als Versuchsobjecte. Doch kamen für Weinsäuren auch andere Organismen in Verwendung.

Nach den gewonnenen Erfahrungen nimmt der Pilz gewöhnlich den besseren Nährstoff vorwiegend in Beschlag und bei vorwiegender Menge dieses kann es sogar dahin kommen, dass die weniger gut ernährende Kohlenstoffverbindung gänzlich verschmäht wird. Doch ist solches keine ausnahmslose Regel, denn es kommt auch vor, dass die schlechtere organische Nahrung überwiegend verbraucht wird.

Den besseren Nährstoff, die Dextrose, bevorzugen die genannten beiden Pilze, wenn ihnen gleichzeitig Dextrose und Glycerin zur Verfügung stehen. Als die Culturflüssigkeit, neben 0,92 % Glycerin, im Mittel 6 % Dextrose enthielt, liess Aspergillus niger das Glycerin sogar unberührt. Bei abnehmender Dichte der Dextrosemoleküle, oder bei zunehmendem Glyceringehalt, fiel stets auch Glycerin, jedoch in relativ geringerer Menge dem Pilze zur Beute. Dagegen vermag eine grosse Menge Glycerin eine geringe Menge Dextrose nicht zu decken, vielmehr wird die Glycose bis auf die letzte Spur verzehrt, während zugleich zur Ernährung des Pilzes eine grosse Menge Glycerin verwandt wird.

Aehnlich verhält sich Penicillium glaucum, nur gelang es bei diesem omnivoren Pilze nicht, eine volle Deckung des Glycerins durch Dextrose zu erreichen.

In analoger Weise vermag Pepton das Glycerin und vermag Dextrose die Milchsäure partiell oder total zu schützen. Anders aber verhält es sich mit Essigsäure, die in ähnlicher Weise wie Glycerin und Milchsäure ein weniger guter Nährstoff für unsere Pilze ist.

Auch wenn neben viel Dextrose nur wenig Essigsäure vorhanden ist, wird diese sehr energisch und in procentisch höherem Maasse consumirt. Als z. B. eine Nährflüssigkeit mit 8 % Dextrose und 1 % Essigsäure in Anwendung kam, hatte Aspergillus in 7 Tagen 50,4 % der Dextrose und 84,3 % der Essigsäure aufgezehrt. Trotz dieses energischen Verbrauchs der Essigsäure spricht sich ihre Minderwerthigkeit als organische Nahrung darin aus, dass sie Dextrose nicht zu schützen vermag. Denn letztere wird neben überwiegender Essigsäure voll aufgezehrt, während natürlich absolut grössere Mengen der reichlicher vorhandenen Essigsäure dem Pilze zur Beute fallen. Uebrigens wurde schon

von Duclaux[1]) beobachtet, dass bei Darbietung von Weinsäure und Essigsäure die letztere vorwiegend durch Aspergillus niger beschlagnahmt wird.

Warum in concreten Fällen eine solche überwiegende Verarbeitung des schlechteren Nährstoffes erreicht wird, ist allgemein nicht zu sagen. Im obigen Falle kann die Ursache nicht schlechthin in einer generellen Oxydationswirkung der Pilze gesucht werden, da Essigsäure gerade zu denjenigen Körpern zählt, die häufig als ein Endproduct der Oxydation von Kohlenstoffverbindungen auftreten.

Auch die Spaltung von Traubensäure, welche Pasteur 1858 entdeckte, hängt mit dem ungleichen Nährwerth der beiden Weinsäuren zusammen. Die mehrfach genannten beiden Pilze lassen nämlich die schlecht ernährende Linkssäure zwar nicht intact, verarbeiten aber die besser ernährende Rechtssäure in überwiegender Weise. Gerade umgekehrt verhält es sich mit einer bestimmten Bacterienart, für welche die Linkssäure die bessere Nahrung ist. Manche andere Pilze und Bacterien werden von den beiden stereoisomeren Säuren gleich gut ernährt und verwenden bei der Cultur auf Traubensäure beide in gleichem Maasse.

In obigen Beispielen sind zugleich einige der Gesichtspunkte ausgesprochen, die allgemein in Betracht kommen, sobald zwei oder einige substituirbare organische (oder auch anorganische) Nährstoffe zur Wahl gestellt sind. Die Spaltung stereoisomerer Körper ist nur ein specieller Fall der physiologischen Elektion die ebenso aus dem regulatorisch geleiteten Stoffwechsel resultirt, wenn es sich um die Arbeit von Gährorganismen handelt.

In jedem Falle ist natürlich die specifische Eigenheit des Organismus massgebend für den Erfolg, und die in Bezug auf die Traubensäure mitgetheilten Thatsachen demonstriren sehr schön, wie zwei verschiedene Organismen einen gerade entgegengesetzten Erfolg herbeiführen können. Von den specifischen Eigenschaften hängt es auch ab, ob bei zunehmender Menge des einen Körpers eine totale Deckung des anderen zu erreichen ist. Eine solche Deckung ist aber nie zu erwarten, wenn das Zusammenwirken beider Körper nothwendig ist oder doch zu gesteigerter Leistung führt. Dem entsprechend fielen

---

1) Annal. d. l'Institut Pasteur 1889 Bd. III, p. 112.

auch die Resultate aus, als der Nährflüssigkeit Dextrose und Pepton zugefügt wurden, zwei Körper, die auch bei isolirter Darbietung unsere Pilze zu ernähren vermögen.

Die Pilze sind für das Studium obiger und anderer fundamentaler Fragen besonders geeignet, weil man denselben nach Wunsch die verschiedene organische Nahrung von aussen darbieten kann. Das Zusammenwirken der Nährstoffe, und als specieller Fall dieses die gegenseitige Deckung, beherrscht und regulirt aber den Stoffwechsel aller Organismen.

Um nur ein Beispiel zu nennen erinnere ich an die Reservestoffe, die in Stämmen, Wurzeln sich intact erhalten, so lange das Nahrungsbedürfniss der Pflanze anderweitig gedeckt wird, die aber durch Herbeiführen von Mangel jederzeit mobilisirt und zur Verarbeitung im Stoffwechsel gebracht werden können. Bis dahin hatte also die von den grünen Blättern aus zugeführte Nahrung, oder, wenn wir wollen, die in den Stoffwechsel gerissene Kohlensäure, dem für die Zukunft angesammelten Stoffen Schutz bereitet.

Nach diesen und anderen Erfahrungen ist es aber klar, dass der Stoffwechsel im Hungerzustand und überhaupt unter abnormen Verhältnissen nicht ohne weiteres mit den normalen Umsetzungen identisch ist[1]). Leider ist das in physiologischen Discussionen oft vergessen. Uebrigens liefert auch ein Schimmelpilz, dem nur Pepton oder Eiweiss geboten ist, Spaltungsproducte der Proteïnstoffe, die in der Aussenflüssigkeit nicht aufgetreten wären, wenn gleichzeitig eine genügende Menge Zucker zur Verfügung gestanden hätte.

Zur Erzielung von Deckung ist natürlich immer eine genügende Menge des schützenden Körpers nöthig und so erscheint uns die Deckung immer als Function der vorhandenen Masse. Doch liegt die Sache nicht so einfach wie in todten Massen, die im Wechsel äusserer Verhältnisse constante Eigenschaften bewahren. Denn gar viele Eingriffe, auch Mangel und Ueberfluss wirken in dem Organismus als Auslösungen, als Reize, die actuelle Fähigkeiten modificiren und neue Thätigkeiten erwecken, also gleichsam ein Wesen mit anderen Fähigkeiten und Thätigkeiten schaffen. Evident tritt dieses hervor, wenn niedere Organismen erst mit dem Fehlen des Zuckers diastatisches Enzym

1) Pfeffer, Physiolog. Bd. I, p. 299.

secerniren und damit die Fähigkeit erlangen, Stärke ihrem Stoffwechsel dienstbar zu machen. Zumeist aber vermögen wir den Vorgang nicht in die massgebenden Factoren zu zergliedern und dem Erfolg kann man oft nicht ansehen, ob rein mechanisch, d. h. ohne eine Variation der Qualitäten des Organismus, die volle Befriedigung der jeweiligen Bedürfnisse (sit venia verbo) durch genügende Zufuhr des einen Körpers ausreichte, um den anderen vor Umsatz zu schützen, oder ob eine Umstimmung im Organismus entscheidend mitspielte.

SITZUNG VOM 6. MAI 1895.

1. Herr **Gustav Wiedemann**, o. M., legte eine Abhandlung von Herrn PAUL DRUDE über »eine bequeme Methode zur Demonstration des elektrischen Brechungsexponenten von Flüssigkeiten« vor.
2. Herr **Adolph Mayer**, o. M., reichte eine Abhandlung von Herrn JOHANNES THOMAE, o. M., »über den Zusammenhang zwischen den STEINER'schen und den PONCELET'schen Polygonen« ein.
3. Herr **Heinrich Bruns** theilte den Inhalt einer Arbeit von Dr. FELIX HAUSDORFF »über die Extinction in der Atmosphäre« mit, welche demnächst zum Drucke eingereicht werden soll.

P. Drude, *Eine bequeme Methode zur Demonstration des elektrischen Brechungsexponenten von Flüssigkeiten.* (Mit 4 Figuren.)

Wenn elektrische Wellen aus der Luft in eine isolirende Flüssigkeit übergehen, so verkürzt sich in letzterer die Wellenlänge. Das Verhältniss der Wellenlänge in der Luft zu der Wellenlänge in der Flüssigkeit wird der elektrische Brechungsexponent der Flüssigkeit genannt. Nach der Theorie ist der elektrische Brechungsexponent gleich der Quadratwurzel aus der Dielektricitätsconstante der Flüssigkeit. Die Erfahrung bestätigt diesen Satz durchaus.

Bisher fehlt es an einer bequemen Demonstrations- und Mess-Methode für den elektrischen Brechungsexponenten. Man kann ihn, ganz analog wie den optischen Brechungsexponenten, bestimmen durch die Ablenkung, welche ein Prisma der zu untersuchenden Flüssigkeit elektrischen Strahlen ertheilt, die durch den HERTZ'schen Erreger mit parabolischem Hohlspiegel hergestellt werden können. Nach dieser Methode sind auch Messungen gemacht, und es hat nach ihr ELLINGER[1]) sogar für Wasser und Aethylalkohol den elektrischen Brechungsexpo-

1) H. ELLINGER, Wied. Ann. 46, p. 513, 1892. — 48, p. 108, 1893.

nenten bestimmen können, was deshalb schwierig ist, weil beim Durchgang durch diese Flüssigkeiten die Intensität der elektrischen Wellen durch zweimalige Reflexion an den beiden Grenzflächen eine starke Schwächung erleidet, sodass die Intensität nur 13 % bezw. 31 % ihres ursprünglichen Werthes beträgt.

Diese und ähnliche Methoden, welche elektrische Wellen benutzen, die sich frei durch die Luft hindurch fortpflanzen, sind zwar sehr interessant und instructiv, da sie den optischen Methoden nachgebildet sind; dass sie aber besonders bequem und stets zu einer sicheren Demonstration bereit wären, wird Niemand behaupten, der selbst nach diesen Methoden experimentirt hat. Entweder braucht man nämlich, wenn man verhältnismässig lange und dafür kräftige Wellen benutzt (Wellenlänge vielleicht 60 cm), grosse Mengen Flüssigkeit und unhandliche Apparate, Prismen, Tröge etc., oder man arbeitet, wie es Righi zuerst gezeigt hat, bei kürzeren Wellen, von vielleicht 6 cm Wellenlänge in Luft, mit handlichen Apparaten, aber die Intensität der Wellen ist dann so gering, dass ihre Wirkungen überhaupt nur mit Anwendung sehr grosser Sorgfalt zu erkennen sind, sodass man hierauf eine möglichst genaue Messmethode nicht wird begründen können, vor allem aber keine bequeme Demonstrationsmethode.

Es muss daher vortheilhafter erscheinen, die längs zweier Paralleldrähte fortgepflanzten elektrischen Wellen heranzuziehen, — Drahtwellen, wie ich kurz sagen will —, da deren Intensität grösser als die der Luftwellen ist, und da man durch geeignete Anordnungen[1]) leicht die störende Reflexion der Wellen an der Oberfläche stark brechender Körper vermeiden kann.

Die bisher benutzten Drahtwellen, wie sie nach den Anordnungen von Lecher oder Blondlot herzustellen sind, haben nur den Uebelstand, dass sie zu lang sind, und infolge dessen wieder unbrauchbar zur bequemen Demonstration, wiewohl gut geeignet zur exacten Messung, allerdings erst nach Beschaffung zum Theil umständlicher Hülfsmittel. Man erkennt dies aus den Arbeiten von Cohn (l. c.), sowie von Arons und Rubens[2]),

---

1) Vgl. E. Cohn, Berl. Ber. Dec. 1891. — Wied. Ann. **45**, p. 370, 1892.
2) L. Arons und H. Rubens, Wied. Ann. **42**, p. 581, 1891.

die den elektrischen Brechungsexponenten mit Hülfe von Drahtwellen bestimmt haben.

Ich suchte daher zunächst, kurze Drahtwellen von möglichster Intensität herzustellen. Die Anordnung, welche ich dazu am geeignetsten fand, möchte ich zunächst beschreiben.

Herstellung kurzer, kräftiger Drahtwellen.

In zwei parallelen Drähten kann man kräftige elektrische Wellen herstellen sowohl nach der Methode von Lecher[1]) als nach der Methode von Blondlot[2]). Bei ersterem besitzt der Erreger, d. h. die Anordnung, in welchem durch Ueberspringen eines Funkens primäre elektrische Schwingungen erzeugt werden, verhältnissmässig grosse Capacität im Vergleich zu seiner Selbstinduction, dagegen ist im Blondlot'schen Erreger die Selbstinduction sehr gesteigert auf Kosten der Capacität. Dies muss vortheilhaft erscheinen, da hierdurch die Dämpfung der Schwingungen möglichst verringert wird, grade wie bei zwei Federn gleicher Schwingungsdauer, von denen die eine grosse Masse und grosse Spannkraft, die andere dagegen geringe Masse und geringe Spannkraft besitzt, erstere ihre Schwingungen länger beibehält. In der That konnte ich auch durch Messungen der Längen von Secundärfunken oder durch Beobachtung des Leuchtens Geissler'scher Röhren, welche über die Paralleldrähte gelegt wurden, constatiren, dass, wenn man Wellen gleicher Schwingungsdauer mit Hülfe der Lecher'schen und der Blondlot'schen Anordnung herstellt, letztere an Intensität den ersteren überlegen sind. — Ich halte deshalb die Blondlot'sche Anordnung für empfehlenswerther.

Bei einem bestimmten Erreger kann man nun allemal mehrere Schwingungen verschiedener Periode im Drahtsystem herstellen. Man kann dies in folgender Weise gut constatiren.

Es bedeute (vgl. Figur 1) E, E die beiden Drähte des Blondlot'schen Erregers, welcher durch die Drähte A, A mit den Polen eines Rhumkorff'schen Inductoriums verknüpft ist. F bedeutet die primäre Funkenstrecke, C ist ein kleiner Condensator, dessen Platten mit E, E verbunden siud. Die Erregerleitung EE

1) E. Lecher, Wied. Ann. **41**, p. 850, 1890.
2) R. Blondlot, Compt. Rend. **113**, p. 628, 1891.

ist nahe umspannt von der Secundärleitung S, welche in die Paralleldrähte DD übergeht. Letztere mögen nun durch einen Metallbügel B_1 an einer beliebigen Stelle überbrückt werden.

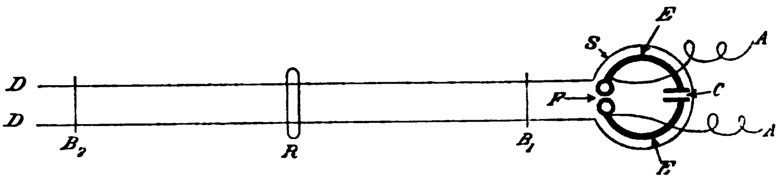


Fig. 1.

Das Drahtsystem: Erreger inclusive Secundärleitung bis zum Bügel B_1 hat nun eine bestimmte Eigenschwingungsdauer. Sie möge die *Hauptschwingung* genannt werden. Um zu erkennen, welche Schwingungen man hinter der Brücke B_1 durch die Hauptschwingung vor der Brücke kräftig erregen kann, lege man eine Geissler'sche Röhre R (sie kann elektrodenlos sein, ich benutzte meist den elektrodenfreien erweiterten Theil einer Zehnder'schen Röhre) über die Drähte DD in einiger Entfernung hinter die Brücke, und verschiebe nun einen zweiten Metallbügel B_2, der noch jenseits der Geissler'schen Röhre über die Drähte gelegt wird. In einigen ganz bestimmten Stellungen von B_2 leuchtet die Röhre R hell auf. Dies tritt dann ein, wenn der Abstand von B_2 und B_1 ein Vielfaches einer halben Wellenlänge einer solchen Schwingung ist, die mit der Hauptschwingung in Resonanz steht. Man kann nun meist mehrere solcher Wellenlängen, deren Schwingungszahlen thatsächlich in den ganzzahligen Verhältnissen 1 : 2 : 3 etc. zu einander stehen, mit dem Bügel B_2 abgreifen. Indess ergiebt sich diejenige dieser *Secundärschwingungen*, deren Wellenlänge die grösste ist, an Intensität allemal weit überlegen über die anderen Secundärschwingungen; offenbar ist erstere diejenige Schwingung, welche mit der Hauptschwingung in Resonanz des Unisono steht. Ich will diese kräftigste secundäre Schwingung die *Grundschwingung* nennen.

Wenn man die Capacität des Condensators C am Erreger ändert, z. B. verkleinert, so rücken alle Resonanzstellungen von B_2 näher an B_1. Dies ist sofort verständlich, da die Hauptschwingung durch Verkleinern von C schneller wird.

Aber auch die Stellung des ersten Bügels B_1 hat Einfluss auf die Periode der Hauptschwingung, sie wird schneller, wenn B_1 nach dem Erreger hin verschoben wird. Nennt man d die Entfernung der Brücke B_1 von der primären Funkenstrecke F, so habe ich bei Erregern von sehr verschiedenen Dimensionen folgende Regel gefunden: Die halbe Wellenlänge der Grundschwingung (d. h. die Distanz zwischen B_1 und der nächsten Stellung von B_2 für die kräftigste Wirkung) ist gleich der halben Wellenlänge, welche der freie Erreger (ohne von der Secundärleitung umgeben zu sein) besitzt, vermehrt um den Term ad. a ist bei einer bestimmten Anordnung der Secundärleitung eine Constante, a wechselt jedoch bei Aenderung der Secundärleitung, z. B. des Abstandes zwischen den Paralleldrähten DD. Bei den von mir benutzten Leitungen, bei welchen jener Abstand von 2 cm bis 20 cm schwankte, lagen die Werthe von a zwischen 0,1 bis 0,6. — Wenn der Condensator vom Erreger EE abgenommen wird, so ist die halbe Wellenlänge des freien Erregers nahezu gleich seiner Länge. In der That war dann die halbe Wellenlänge der Grundschwingung gleich Erreger — Länge[1]) plus ad.

Die Intensität der von der Hauptschwingung angeregten Grundschwingung hängt von der Lage des Bügels B_1 und seiner Gestalt ab. Wenn man einen graden Bügel B_1 durch einen gebogenen ersetzt, so werden alle Secundärschwingungen stärker[2]). Indess sind dann die Resonanzlagen der Brücke B_2 weniger scharf ausgeprägt, sodass es sich im Allgemeinen mehr empfiehlt, grade Brücken zu wählen. — Wenn die Brücke B_1 sehr nahe an der primären Funkenstrecke liegt (d sehr klein), so ist die Intensität der Grundschwingung gering. Mit Vergrössern von d wächst sie schnell und bleibt annähernd constant, bis dass sie wieder allmählich abnimmt, wenn d sehr gross wird. Am günstigsten scheint es zu sein, wenn die Länge der ganzen Secundärleitung bis zur Brücke B_1 (S vermehrt um die Länge der Drähte DD bis B_1) gleich oder etwas grösser ist als die Wellenlänge des freien Erregers, d. h. wenn sie etwa doppelt so lang ist als die Summe der Längen beider Erregerdrähte, falls kein Condensator C angeschlossen ist.

1) Es ist darunter die Summe der Längen beider Erregerdrähte verstanden.

1) Die Erscheinung habe ich schon früher (Wied. Ann. **54**, p. 360, 1895) angegeben und dort auch ihre Ursache besprochen.

Mit Vergrösserung des Abstandes der Paralleldrähte DD von einander wächst im Allgemeinen die Intensität der Grundschwingung und zwar aus zwei Gründen: 1) weil der Bügel B_1 dann länger wird, d. h. ein grösseres Drahtstück gemeinsam der Hauptschwingung und den Secundärschwingungen hinter B_1 angehört; 2) weil die Selbstinduction für letztere wächst und dadurch die Dämpfung vermindert wird. Der zweite Grund tritt im Allgemeinen hinter dem ersten zurück, nur ist er zu beachten, wenn man die Distanz der Paralleldrähte DD klein wählen muss, wie es z. B. bei Erzielung kurzer Wellen nicht zu umgehen ist. Es ist dann zur Steigerung der Selbstinduction in der Secundärleitung günstig, die Drähte DD nicht sehr dick zu wählen (etwa 1 mm Durchmesser falls die Distanz DD 2 cm beträgt). Die Dicke der Drähte DD, sowie EE hat im Uebrigen, wenn man sie nicht zu gering wählt, wenig Einfluss.

Die Intensität der Hauptschwingung einer bestimmten Drahtleitung ist grösser, wenn die Erregerdrähte EE einen Condensator C enthalten, als wenn sie dies nicht thun. Trotzdem ist es nicht günstig, allemal einen Condensator anzulegen, im Gegentheil ist seine Vermeidung besser und für die Herstellung sehr kurzer Wellen sogar nothwendig. Man muss nämlich berücksichtigen, dass durch die Anlegung eines Condensators auch die Wellenlänge der Hauptschwingung steigt. Eine langsamere Schwingung kann man aber auch herstellen durch längere Erregerdrähte EE ohne Condensator, welche von einer längeren Secundärleitung S umspannt werden. Es erweist sich letztere Anordnung als vortheilhafter, was auch leicht zu verstehen ist, da bei ihr die Induction des Erregers auf die Secundärleitung S gesteigert wird.

Wenn man also eine Drahtwelle von bestimmter Wellenlänge erzielen will, so wendet man am besten einen Erreger EE ohne Condensator an, dessen Gesammtlänge etwas kleiner als die Hälfte jener Wellenlänge ist. Die Secundärleitung S muss möglichst nahe EE umspannen, sodass grade noch Funken oder Büschelentladung zwischen S und EE vermieden werden.

Es sind nun noch einige Nebenumstände zu beachten. Für grössere Wellen (über 4 m) erhält man eine gut active Funkenstrecke F, falls man den Funken zwischen Zinkkugeln[1]) überspringen

---

1) Dies Mittel ist zuerst von Himstedt angegeben (Ber. d. Oberh. Ges. f. Nat. u. Heilk. z. Giessen, Nr. 30, Wied. Ann. **52**, p. 475, 1894).

schlagen lässt. Dieselben functioniren wochenlang gut, ohne dass sie ein Putzen erforderten. Für kleinere Wellen ist es vortheilhafter, den Funken zwischen zwei polirten Messingkugeln herzustellen, die in Petroleum oder Oel eintauchen. Für sehr schnelle Schwingungen (Wellenlänge kleiner als 1 m) erscheint dieses Hülfsmittel sehr wichtig. Um Funken zwischen dem Erreger *EE* und der Secundärleitung *S* zu vermeiden, ist es bei kurzen Wellen, falls der Erreger *EE* einen Kreis umfasst, der kleiner als 10 cm im Durchmesser ist, vortheilhaft, das ganze System, Erreger und Secundärleitung, in Petroleum eintauchen zu lassen. Man müsste sonst die Secundärleitung soweit vom Erreger entfernen, dass die Induction zwischen beiden merklich Einbusse erleidet, da dann viel magnetische Kraftlinien des Erregers für die Secundärleitung verloren gehen. Dies Eintauchen des ganzen Erregers in Petroleum hat allerdings den Uebelstand, dass dadurch die Wellenlänge des freien Erregers im Verhältniss der Quadratwurzel aus der Dielektricitätsconstante des Petroleums, d. h. etwa 1,4 mal grösser ist, als wenn der Erreger in Luft liegt. Nach der oben gegebenen Regel wird dementsprechend auch die Wellenlänge der Hauptschwingung grösser[1]). Trotzdem scheint mir die Anwendung eines Isolators zwischen Erreger und Secundärleitung bei kleinem Erreger nicht zu umgehen zu sein.

Die Länge der primären Funkenstrecke *F* ist, falls sie in Petroleum liegt, möglichst gross[2]) zu wählen, in Luft darf sie ein gewisses Maximum nicht überschreiten ($\frac{1}{2}$—1 cm).

Schliesslich ist die Wahl des den Erreger speisenden Rhumkorff nicht gleichgültig. Je länger die Wellen sind, desto grösser kann er sein, dagegen sind für kurze Wellen kleinere Inductorien (mit Platinunterbrechung) vortheilhafter. Für Wellen der Länge 14—4 m benutze ich einen mit 4 Volt (zwei Accumulatoren) gespeisten Rhumkorff (mit Quecksilberunterbrechung), der eine Luftstrecke von 4 cm Länge zwischen Spitzen durchschlagen konnte, zwischen 4 m und 60 cm Wellenlänge erwies sich ein kleinerer Rhumkorff (mit Platinunterbrechung) von

---

1) Ich habe dies in der That durch besondere Versuche constatiren können, siehe weiter unten.

2) Selbst bei sehr kräftigen Inductorien kann man sie nur wenig über 1 mm steigern.

2,5 cm Durchschlagskraft bei Speisung mit 6 Volt günstig, zwischen 60 cm und 12 cm Wellenlänge dagegen ein mit 4 Volt gespeister Rhumkorff von 2 cm Durchschlagskraft.

Schliesslich habe ich die Wirkungen auch dadurch zu steigern versucht, dass ich die Secundärleitung S den Erreger EE nicht einmal, sondern zweimal umschlingen liess, bevor sie zu den Drähten DD geleitet wurde. Man erhält dann auch eine geringe Steigerung der Wirkung, aber auch solche Vergrösserung der Wellenlänge, dass man bei einfacher Umschlingung eines längeren Erregers bessere Resultate erhält. Deshalb ist dieses Mittel wieder fallen gelassen.

Es ist nun selbstverständlich, dass die Wirkungen mit abnehmender Wellenlänge schwächer werden müssen, da der Erreger EE kleiner zu wählen ist. Trotzdem ist die Intensität selbst kurzer Wellen bei geeigneter Anordnung noch überraschend stark. Bis zur Wellenlänge 70 cm leuchteten empfindliche Geissler'sche Röhren stark auf und zeigten Kathodenlicht, wenn sie einfach über die Drähte DD gelegt wurden, zwischen 70 cm und 25 cm Wellenlänge sprach noch der erweiterte Theil einer Zehnder'schen Röhre[1]) gut an, zwischen 25 cm und 12 cm Wellenlänge kann man gut ein von Righi[2]) angewandtes höchst empfindliches Reagens auf Potentialschwankungen benutzen, nämlich einen versilberten Glasstreifen (oder ein Stück gewöhnlichen Glasspiegels), durch dessen Metallbelegung mit dem Diamanten ein schmaler Riss gezogen ist. Legt man diesen Streifen mit der Glasseite auf die Drähte DD, so stört er den Schwingungszustand in ihnen nicht merklich. Liegt der Streifen nicht auf einem Knoten der Potentialschwankungen, so tritt ein lebhaftes Funkenspiel im Riss der Metallbelegung ein. Dieser Riss braucht gar nicht sehr fein zu sein, er kann $\frac{1}{20}$ mm betragen. Letzterer Umstand spricht dafür, dass diese Drahtwellen viel intensiver sind, als die von Righi hergestellten Luftwellen gleicher Länge, da diese erst bei ganz feinen Rissen von wenigen Tausendstel mm Breite ein secundäres Funkenspiel veranlassen.

Der kleinste Erreger ist in der Figur 1 in *natürlicher Grösse* abgebildet[3]). Er besteht aus zwei kreisförmig gebogenen Draht-

1) L. Zehnder, Wied. Ann. **47**, p. 82, 1892.

2) A. Righi, Rend. de R. Acc. dei Lincei **11**, 1. Sem. p. 505, 1893.

3) Man muss sich nur den in der Figur gezeichneten Plattencondensator C fortdenken.

stückchen von 1,5 mm Dicke, die an ihrem einen Ende Messingkügelchen von 3 mm Durchmesser tragen. Der Erreger E, E schliesst einen Kreis von 1 cm Radius ein. Die Drahtstücke E, E sind an zwei dünne Siegellackstängchen (in der Figur nicht gezeichnet) gekittet; an diesen werden sie durch zwei Stative gehalten und in das Petroleum eingesenkt. Die Zuleitung A, A zum Rhumkorff muss unmittelbar an den Messingkügelchen geschehen, da sie sonst stören würde. An der Funkenstrecke liegt nämlich ein Knoten der Potentialschwankungen, dort kann man ohne Störung Drähte anlegen. Der Erreger ist von einer Secundärleitung aus $\frac{1}{3}$ mm starkem Kupferdraht umgeben, die Leitung ist an eine Glasröhre gekittet und wird durch sie gehalten. Die Figur 1 stellt auch die Secundärleitung in natürlicher Grösse dar. Bei einigen Versuchen ist die Secundärleitung nur länger gewählt, als es der Figur entspricht. Die Distanz der Paralleldrähte DD beträgt $\frac{1}{2}$ cm.

Mit diesem kleinen Apparate kann man sämmtliche Versuche Lecher's über die elektrische Resonanz en miniature wiederholen. In der Figur 2 ist z. B. ein von mir beobachteter

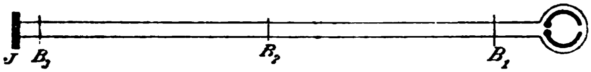


Fig. 2.

Fall in halber natürlicher Grösse dargestellt, dass gleichzeitig drei Brücken B_1, B_2, B_3 aufliegen, die je 6 cm von einander entfernt sind. Die halbe Wellenlänge ist also nahezu (abgesehen von einer kleinen Correction) 6 cm. Bei dieser Brückenlänge spricht das am Ende der Drähte DD aufgelegte Stück Spiegelglas J mit kräftigen Secundärfunken an; bei geringer Verschiebung einer der Brücken verschwinden diese Funken. Sämmtliche Brücken können, ohne dass eine Aenderung eintritt, an ihren Mitten metallisch zur Erde abgeleitet werden. Die letzte Brücke B_3 liegt näher als auf $\frac{1}{4}$ Wellenlänge, d. h. näher als 3 cm an dem Glasstreifen J, weil dieser die Capacität der Drahtenden DD merklich steigert.

Zum Schluss gebe ich die halben Wellenlängen der Hauptschwingungen bei einigen der von mir benutzten Erregern an. Die erste Brücke B_1 ist in der Nähe der primären Funkenstrecke aufgelegt. Daher ist nach der oben auseinandergesetzten Regel die halbe Wellenlänge nahe gleich der Erregerlänge, falls der

Erreger in Luft liegt und keinen Condensator enthält. In der Tabelle bedeutet D den Durchmesser des vom Erreger eingeschlossenen Kreises, L die Länge des Erregers ($L = \pi D$), $\frac{1}{2}\lambda$ die halbe Wellenlänge der Hauptschwingung. $\frac{1}{2}\lambda^*$ bedeutet die halbe Wellenlänge der Hauptschwingung, falls an die Enden des Erregers EE ein Condensator, bestehend aus zwei kreisförmigen Messingplatten von 10 cm Durchmesser und 2 cm Abstand, angelegt ist.

Wenn man diese Versuche wiederholt, so wird man nicht stets genau die in der Tabelle angegebenen $\frac{1}{2}\lambda$ wiederfinden. Dazu müsste die Lage des Bügels B_1 genauer angegeben sein. Aber zur Orientirung über die zu erwartenden Verhältnisse ist wohl die mitgetheilte Tabelle nützlich. — Alle Zahlen bedeuten Längen in cm gemessen.

D	L	$\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda^*$		
180	565	$\frac{1}{2}\lambda^*$	684	Erreger in Luft
		$\frac{1}{2}\lambda$	566	Erreger in Luft
60	188	$\frac{1}{2}\lambda^*$	295	Erreger in Luft
		$\frac{1}{2}\lambda$	192	Erreger in Luft
20	63	$\frac{1}{2}\lambda^*$	132	Erreger in Luft
		$\frac{1}{2}\lambda$	70	Erreger in Luft
10	31	$\frac{1}{2}\lambda$	36	Erreger in Luft
		$\frac{1}{2}\lambda$	52	Erreger in Petroleum
5	16	$\frac{1}{2}\lambda$	30	Erreger in Petroleum
2	6	$\frac{1}{2}\lambda$	13	Erreger in Petroleum
1	3	$\frac{1}{2}\lambda$	6	Erreger in Petroleum

In der Tabelle ist die Schwingung des Erregers von 31 cm Länge einmal für Luft und einmal für Petroleum angegeben. Das Verhältniss dieser Wellenlängen ist $52 : 36 = 1{,}44$; das Quadrat dieser Zahl ist 2,08, d. h. in guter Uebereinstimmung mit der Dielektricitätsconstante, welche sonst für Petroleum angegeben wird.

Demonstrationsmethode des elektrischen Brechungsexponenten von Flüssigkeiten.

Der elektrische Brechungsexponent von Flüsigkeiten wird am einfachsten ermittelt, wenn man die Paralleldrähte *DD* durch eine Schicht der zu untersuchenden Flüssigkeit hindurch leitet. Da genügend kurze Wellen zu Gebote stehen, so kann man schon mit geringen Flüssigkeitsquantitäten auskommen. Indess empfehlen sich zur Demonstration die in der vorigen Tabelle angegebenen Erreger für die kürzesten Wellen nicht, weil bei ihnen die Manipulationen durch die Kleinheit aller Verhältnisse unbequem werden, und auch die Wirkungen nicht sehr kräftig sind. Der Erreger, dessen Kreisfläche 5 cm Durchmesser besitzt, der also ungefähr 60 cm lange Wellen liefert, scheint mir für den vorliegenden Zweck am geeignetsten.

Wenn man nun diesen Erreger benutzt und die Paralleldrähte *DD* der Secundärleitung, denen ich 2 cm Abstand gab, durch eine Flüssigkeitsschicht hindurch leitet, was man bei ge-

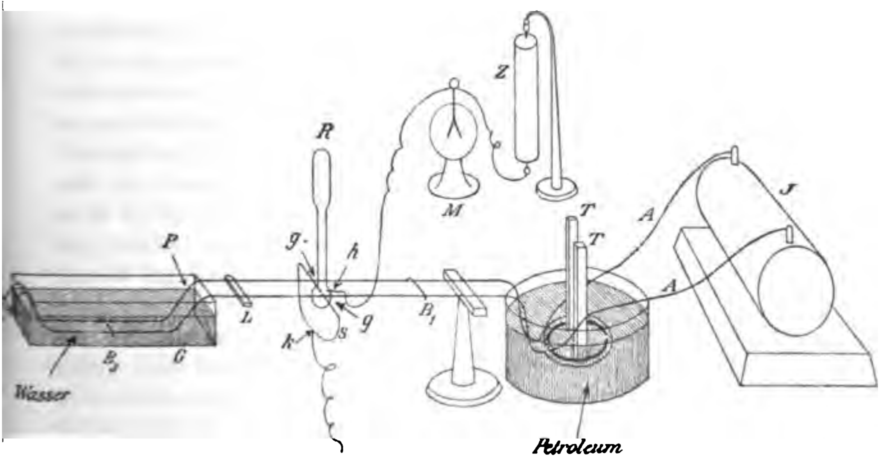


Fig. 3.

eigneter Biegung der Drähte *DD* bequem erreichen kann, indem sie einen Trog durchsetzen (vgl. Figur 3), so kann man zwar bei den Flüssigkeiten mit nicht sehr grosser Dielektricitätsconstante die Fortsetzung der elektrischen Schwingungen durch

die Flüssigkeit hindurch verfolgen, indem eine, über die Drähte hinter der Flüssigkeit gelegte Zehnder'sche Röhre gut leuchtet; jedoch bei Wasser, Alkohol, Glycerin, und überhaupt Flüssigkeiten von grosser Dielektricitätsconstante ist keine Schwingung hinter ihnen wahrzunehmen. Sie ist im Inneren der Flüssigkeit nicht vorhanden, und auch im Allgemeinen nicht einmal vor der Flüssigkeit, falls man irgendwo eine Brücke B_1 auf die Drähte DD nahe beim Erreger auflegt. Nur vor B_1 sind Schwingungen vorhanden, ebenso treten sie vor der Flüssigkeit auf, wenn B_1 ganz fortgenommen wird.

Der Grund dieser Erscheinung ist die starke Reflexion der elektrischen Wellen beim Eintritt in eine Flüssigkeit von hoher Dielektricitätsconstante.

Wenn die Drähte DD an einer Stelle P in eine Wasserfläche eintreten, so hat das sehr nahezu denselben Effect, als ob man bei P die Drähte leitend überbrückt. Wenn man nun aber eine Brücke B_1 schon nahe am Erreger aufgelegt und dadurch eine bestimmte Hauptschwingung geschaffen hat, so können hinter B_1 nur an ganz bestimmten Stellen Brücken B_2, B_3 etc. aufgelegt werden, falls die elektrischen Schwingungen zur Ausbildung kommen sollen. Diese Stellen sind Schwingungsknoten der elektrischen Kraft einer mit der Hauptschwingung resonirenden Secundärschwingung. Damit also z. B. im Wasser Schwingungen zu Stande kommen, ist nothwendig, dass sowohl Eintrittsstelle als Austrittsstelle der Drähte DD ins Wasser bezw. aus dem Wasser an Knoten der Secundärschwingung liegen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Lage des zweiten Knotens (an der Austrittsstelle) von der Wellenlänge der Schwingung im Wasser bestimmt wird. Damit die Schwingungen auch hinter dem Wasser vorhanden sind, ist ferner nothwendig, dass entweder, falls die Drähte DD frei endigen, ihre Länge hinter dem Wasser gleich einem ungraden Vielfachen von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge der betreffenden Secundärschwingung (in Luft) ist, oder, falls die Drähte DD hinter dem Wasser an irgend einer Stelle B' überbrückt sind, diese Brücke B' um ein Vielfaches einer halben Wellenlänge von der Austrittsstelle aus dem Wasser abstehen muss.

Man sieht, dass hier so viel Bedingungen zu erfüllen sind, dass das Verfahren zu complicirt zu einer Demonstrationsmethode wird.

Man könnte zweckmässiger in der von Cohn (l. c.) ange-

wandten Weise verfahren, indem man zunächst die Eintrittsstelle der Drähte ins Wasser überbrückt (Brücke B_2), sodann die Lage einer Brücke B_1 vor dem Wasser aufsucht, sodass zwischen B_1 und B_2 lebhafte Schwingungen entstehen, und schliesslich im Wasser eine dritte Brücke B_3 hinter B_2 derartig verschiebt, dass auch im Wasser zwischen B_2 und B_3 Schwingungen entstehen. Dann ist die Distanz l' zwischen B_2 und B_3 nahezu gleich der halben Wellenlänge im Wasser, die Distanz l zwischen B_1 und B_2 gleich der halben Wellenlänge in Luft, das Verhältniss $l : l'$ ist gleich dem elektrischen Brechungsexponenten, d. h. gleich der Quadratwurzel aus der Dielektricitätsconstante des Wassers.

Aber es ist schwierig und unbequem, die elektrischen Schwingungen im Wasser zu beobachten.

Man kann nun aber aus dem Zustande der Schwingungen zwischen B_1 und der Eintrittsstelle der Drähte ins Wasser einen Schluss auf die Schwingungen im Wasser, d. h. zwischen der Eintrittsstelle und dem Bügel B_3 ziehen, *falls man die Brücke B_2 an der Eintrittsstelle fortlässt*[1]. Die Schwingungen vor dem Wasser werden nämlich nur dann durch die Reflexion an der Brücke B_3 im Wasser nicht gestört, wenn B_3 um das Vielfache einer halben Wellenlänge der Schwingung im Wasser von der Eintrittsstelle entfernt ist (d. h. wenn B_3 auf einem Knoten der elektrischen Kraft liegt), dagegen werden die Schwingungen durch Reflexion an B_3 völlig vernichtet, wenn B_3 um ein ungrades Vielfaches von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge der Schwingung im Wasser von der Eintrittsstelle entfernt ist. (An diesen Stellen liegt nämlich ohne Brücke B_3 ein Schwingungsbauch der elektrischen Kraft.)

Thatsächlich beobachtet man nun auch, wenn eine Zehnder'sche Röhre etwa in der Mitte zwischen B_1 und der Eintrittsstelle der Drähte ins Wasser über dieselben gelegt wird, dass bei Verschieben einer Brücke B_3 im Wasser successive helles Leuchten der Röhre und völliges Erlöschen eintritt. Diese Lagen der Brücke B_3 stehen um gleichviel von einander ab; dieser Abstand ist gleich $\frac{1}{4}$ Wellenlänge der Schwingung in Wasser.

Da die Wellenlänge im Wasser wegen seines hohen Brech-

1) Trotzdem werden die elektrischen Schwingungen an der Eintrittsstelle P der Drähte ins Wasser nicht reflectirt, weil in Folge der Lage der Brücke B_1 die Stelle P ein Knoten der elektrischen Kraft ist.

ungsexponenten sehr verkürzt wird, so kann man schon bei einem kleinen Trog zahlreiche Maxima und Minima beobachten. Ich benutzte einen Glastrog von 18 cm Länge; da die halbe Wellenlänge in Wasser 4 cm betrug, so konnte ich acht deutlich vorhandene Maxima und Minima in diesem Trog abgreifen.

Die Leuchtwirkung der Schwingungen ist zwar für einen Beobachter für Messzwecke sehr bequem zu verwerthen, indess zur Demonstration für ein grösseres Publikum ist sie unbequem, da man im verdunkelten Zimmer operiren muss. Man kann nun zur Demonstration sehr gut in dem luminiscirenden Gasraum ein von einer Trockensäule geladenes Elektroskop sich entladen lassen[1]). Es gelingt dies am besten so, dass man die Glimmelektroden der Zehnder'schen Röhre durch einen Kupferdraht von 14 cm Länge verbindet. Dann wird durch diesen Kupferdraht und die Glimmerlektroden ein Resonator gebildet, der mit der Hauptschwingung in Resonanz steht. Man erreicht dadurch zugleich den Vortheil erhöhter Empfindlichkeit, da die Eigenschwingung der Zehnder'schen Röhre die in leitenden Flüssigkeiten eintretende Dämpfung der elektrischen Wellen für das Leuchten der Röhre weniger störend macht[2]). Durch dieses Mittel ist es auch möglich, Alkohol und Glycerin ebenso sicher und bequem untersuchen zu können, wie gut isolirende Substanzen geringer Brechbarkeit, z. B. Petroleum[3]).

Man kann die Zehnder'sche Röhre entweder als Reagens für die elektrische Kraft benutzen, dann ist sie in die Mitte zwischen der Brücke B_1 und der Eintrittsstelle der Drähte ins

---

1) Vgl. P. DRUDE, Wied. Ann. **52**, p. 499, 1894.

2) Es ergiebt sich unzweifelhaft, dass das Leuchten einer evacuirten Röhre um so stärker ist, je regelmässiger und gedämpfter die elektrischen Schwingungen sind. Dies hat schon H. EBERT und E. WIEDEMANN in Wied Ann. **50**, p. 223, 1893 hervorgehoben. Hierfür spricht auch, dass eine directe metallische Verbindung der Glimmelektroden mit den Drähten *DD* gar kein Leuchten hervorrief.

3) Wasser, selbst Kupfervitriollösung von nicht zu hoher Concentration (spec. Gewicht nicht über 1,1) macht von vornherein keine Schwierigkeiten, d. h. weniger wie Alkohol und Glycerin, was deshalb verwunderlich ist, weil letztere Flüssigkeiten für statische Ladungen sicher besser isoliren, als wässrige Salzlösungen. Vielleicht besitzen obige Flüssigkeiten in der Nähe dieser grade gewählten Schwingungsdauer auswählende Absorption. — Ich kann aber zunächst nichts Sicheres sagen über dieses auffällige Verhalten.

Wasser aufzustellen, die von der Resonatorleitung umgrenzte Fläche muss senkrecht zu den Drähten *DD* stehen (vgl. Figur 3) oder als Reagens für die magnetische Kraft; dann ist die Fläche parallel mit den Drähten *DD* zu legen und zwar in der Nähe der Eintrittstelle der Drähte ins Wasser. Die in die luminiscirende Gasstrecke hineinragende Hauptelektrode *h* der Zehnderschen Röhre wird mit dem Elektroskop und einem Pol einer Trockensäule verbunden, der Punkt *k* der Resonatorleitung (s. Figur 3), sowie der andere Pol der Trockensäule sind an die Erde gelegt.

Behufs grösserer Deutlichkeit ist die *ganze Anordnung in Figur* 3 *zusammen dargestellt. J* bedeutet das Inductorium, es wird von 3 Accumulatoren (in Reihe) gespeist, und hat 2,5 cm Schlagweite in Luft. Die Drähte *AA* führen an die Entladungskugeln des Erregers *EE*. Diese sind Messingkugeln von 6 mm Durchmesser, der Erreger besteht aus zwei halbkreisförmig gebogenen 3 mm starken Kupferdrähten von 7,5 cm Länge, die eine Kreisfläche von 5 cm Durchmesser umgrenzen. Die Enden der Drähte *EE* gegenüber der Funkenstrecke sind 4 mm von einander entfernt. Dieser Erreger ist an zwei Siegellackstangen *TT* gekittet, an welchen er gehalten und in das Petroleumbad getaucht wird. Vor dem Eintauchen werden die Entladungskugeln mit feinstem Schmirgelpapier Nr. 0000 abgerieben.

Die den Erreger umgebende Secundärleitung *S* besteht aus 1 mm starkem Kupferdraht. Er ist in Form eines 5,5 cm im Durchmesser haltenden Kreises gebogen, der aber eine Öffnung von 2 cm besitzt. An deren Enden ist der Draht umgebogen und geht als Paralleldrähte *DD* aus dem Petroleum heraus, welche zur besseren Stabilität in zwei schmale Siegellackbrücken *L*, *L* eingekittet sind. Die gegenseitige Distanz der Drähte beträgt 2 cm, ihre Länge von der Umbiegung an bis zum Ende 64 cm. Die Secundärleitung *S* umgiebt den Erreger *EE* in einem Abstand von 1 bis 2 mm. In einer Distanz von 23 cm vom Ende sind die Paralleldrähte in der aus der Figur ersichtlichen Weise gebogen[1]), sodass sie in einen Glastrog *G* von 18 cm Länge, 5 cm Breite und 4 cm Tiefe eingehängt werden können.

Etwa 18 cm vor diesem Glastrog ist eine Zehnder'sche

1) Wie ich durch besondere Versuche feststellte, störten diese Biegungen die Schwingungen nicht merklich.

Röhre R zwischen die Drähte geschoben, in der aus der Figur ersichtlichen Stellung. s ist ein 13,5 cm langer, 1 mm dicker Kupferdraht, um den die an die Glimmelektroden g, g der Zehnderschen Röhre angelötheten Platindrähte umgewickelt sind. Die ganze Länge der Resonatorleitung s incl. Glimmelektroden g, g beträgt 23 cm. Der Punkt k von s ist zur Erde abgeleitet. Die der Glimmstrecke bei g, g nahe eingeschmolzene Hauptelektrode h der Zehnder'schen Röhre ist mit dem Elektroskop M leitend verbunden. Dieses wiederum mit dem einen Pole einer Zamboni'schen Säule Z, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet ist. Wenn der Raum zwischen g, g und h nicht luminiscirt, so stehen die Goldblätter von M ruhig gespreizt, dagegen fallen sie bei Luminiscenz sofort zusammen.

Die Manipulationen sind nun folgende: In den Trog G wird irgend eine Flüssigkeit, sagen wir gewöhnliches Leitungswasser, eingegossen. Es wird ein Bügel B_2 (ein 2 cm langes, mit Häkchen versehenes Drahtstück von 1 mm Dicke) über die Drähte DD an ihrer Eintrittsstelle P ins Wasser übergelegt. Das Inductorium wird in Gang gesetzt, und die Entladungskugeln des Erregers möglichst weit (etwa $\frac{1}{2}$ mm) auseinandergezogen, indem man den einen Träger T eines Erregerdrahtes etwas verschiebt; sofort fallen die Goldblätter zusammen.

Sodann wird eine zweite Brücke B_1 zwischen Erreger und Zehnder'scher Röhre über die Drähte DD gelegt. Dann spreizen die Goldblätter im Allgemeinen wieder. Nur bei einer bestimmten Lage von B_1 fallen die Goldblätter wieder zusammen. Diese Lage wird aufgesucht durch Verschieben von B_1, und es wird dann B_1 dort belassen. Bei der getroffenen Anordnung liegt B_1 etwa 36 cm von B_2 entfernt.

Schliesslich wird die Brücke B_2 mit Hülfe einer Pincette allmählich ins Wasser geschoben. (Von nun an spielt die Brücke die Rolle der vorhin bezeichneten Brücke B_3. Sie wird daher jetzt B_3 genannt werden. B_2 existirt nun nicht mehr.) Bei Verschiebung um 2 cm gehen plötzlich die Goldblätter auseinander und stehen ruhig. Diese Distanz entspricht $\frac{1}{4}$ Wellenlänge der Schwingung im Wasser. Bei weiterem Verschieben von B_3 fallen die Goldblätter wieder zusammen, um, falls B_3 auf 6 cm verschoben ist, wieder ruhig zu spreizen. Man erhält so in dem kleinen Troge vier Stellen des B_3, für welche die Goldblätter spreizen (Bäuche der elektrischen Kraft, cf. oben pag. 341) und

vier dazwischen liegende Stellen kräftigsten Zusammenfallens (Knoten der elektrischen Kraft). Je nach der Intensität der Schwingungen, d. h. der Distanz, welche man den Entladungskugeln des Erregers giebt, sind entweder die Knotenstellungen oder die Bäuche schärfer zu ermitteln. — Die Distanz aufeinanderfolgender Knoten oder Bäuche beträgt beim Wasser nahezu[1]) 4 cm, die halbe Welle in Luft (Entfernung des B_1 vom Wasser) beträgt 36 cm, daher ist der elektrische Brechungsexponent des Wassers

$$n = 36 : 4 = 9$$

und die Dielektricitätsconstante

$$\varepsilon = n^2 = 81 .$$

In dieser Weise kann man jede, nicht allzu gut leitende Flüssigkeit untersuchen, z. B. auch Alkohol und Glycerin sehr gut. Die Flüsigkeiten werden einfach in den Trog G eingegossen. Der Bügel B_1 kann liegen bleiben, es müssen nur die neuen Knotenstellungen des Bügels B_3 aufgesucht werden. — Für Flüssigkeiten mit geringer Dielektricitätsconstante, wie z. B. Petroleum ($\varepsilon = 2$) erhält man im Trog nur einen Bauch für B_3. Will man mehrere Knoten und Bäuche nachweisen, so müsste man einen längeren Trog und längere Drahtleitung verwenden.

Man kann nach dieser Methode auch nachweisen, dass Leitfähigkeit und Dielektricitätsconstante ganz unabhängig von einander sind. Wenn man nämlich von destillirtem Wasser ausgeht und in ihm die Knoten und Bäuche aufsucht, so ändert sich ihre Lage durchaus nicht, wenn man z. B. Kupfervitriol zusetzt. Die Leitfähigkeit stört nämlich bei dieser Methode deshalb wenig, weil die Schwingungen sehr schnell sind[2]). — Der Effect der Leitfähigkeit, falls sie nicht sehr gross wird, besteht in einer Dämpfung der in der Flüssigkeit fortgepflanzten Wellen; daher sind die Knoten- oder Bauchstellungen der Brücke B_3 in dem Leuchten der Zehnder'schen Röhre um so weniger scharf wahr-

---

1) Genauere Zahlen sind unten mitgetheilt.

2) Vgl. dazu P. Drude, Physik des Aethers, p. 549. Stuttgart 1894. Nach den dort ausgeführten Berechnungen ergiebt sich, dass für die hier benutzten Wellen in einer 1 % Kupfervitriollösung die Stärke der sogenannten Verschiebungsströme noch etwa 5 mal grösser ist, als die der Leitungsströme. Bei einer 10 % Kupfervitriollösung sind beiderlei Arten Ströme etwa von gleicher Grössenordnung.

zunehmen, je weiter B_3 in die Flüssigkeit hineingeschoben wird. — Man kann aber immerhin noch 2 bis 3 Bäuche deutlich constatiren, selbst wenn das Wasser schon deutlich blau gefärbt ist. Wenn also die Leitfähigkeit etwa 1000 mal grösser wird. so ändert sich trotzdem die Dielektricitätsconstante nicht merklich. — Bei einer 10 % igen Kupfervitriollösung war noch der erste Bauch hinter der Eintrittsstelle P der Drähte in die Lösung deutlich zu constatiren; am besten gelingt dies, wenn die Zehndersche Röhre als Reagens für die magnetische Kraft in der Nähe von P über die Drähte gelegt wird, cf. oben pag. 343.

Die folgenden Bäuche der elektrischen Kraft waren nicht nicht mehr zu erkennen, die Röhre hörte nicht mehr auf, zu leuchten, wenn B_3 über den ersten Bauch hinausgeschoben wurde.

Wie aus der Beschreibung ersichtlich ist, sind zur Anwendung der Methode nur sehr geringe Hülfsmittel nöthig. Wenn ein geeignetes Inductorium fehlt, so wird auch eine gute Influenzmaschine das Erforderliche leisten, und wer die Beschaffung oder Selbstanfertigung einer Zehnder'schen Röhre[1]) vermeiden will, kann sich auch mit einem Streifen Spiegelglas behelfen (vgl. oben pag. 8), welches über die Drähte DD gelegt wird und in dessen Metallbelegung ein schmaler Riss gezogen ist. Die dort springenden Secundärfunken können zur Electroskopentladung ebenso herangezogen werden, wie der luminiscirende Gasraum einer Zehnder'schen Röhre. Indess functionirt letztere immerhin sicherer, als ein Glasstreifen, da dieser auch in Bauchstellungen der Brücke B_3 öfter noch Funken zeigt. Zur möglichst sicheren Demonstration ist daher eine Zehnder'sche Röhre vorzuziehen.

Zum Schluss gebe ich einige, vorläufig nur roh angestellte Beobachtungen. Die Temperatur betrug 17° C.

Destillirtes Wasser.

Die Brücke B_1 lag um 36 cm entfernt von der Eintrittsstelle P. Die mitgetheilten Zahlen geben die Entfernung der Brücke B_3 von P in Centimetern an.

---

1) Sie ist aus Freiburg vom Glasbläser Kramer zu beziehen.

Knoten:		Bäuche:	
0			
4,0;	4,2	1,8;	1,8
8,5;	8,7	6,8;	6,5
12,0;	12,0	10,8;	10,5

die Mittelwerthe sind

Knoten:	0		4,1		8,6		12,0
Bäuche:		1,8		6,6		10,6	

Daraus folgt[1]) die halbe Wellenlänge im Wasser im Mittel zu $\frac{1}{2}\lambda' = 4,14$ cm mit einem wahrscheinlichen Fehler von $\pm 0,18$ cm. Es ergiebt sich daher der Brechungsexponent des Wassers, da die halbe Wellenlänge in Luft (nahezu) $\frac{1}{2}\lambda = 36$ cm beträgt:

$$\lambda : \lambda' = 36 : 4,14 = 8,7$$

und die Dielektricitätsconstante zu

$$\varepsilon = 76 \pm 6 \, .$$

Kupfervitriollösungen.

Zum besseren Vergleich sind auch die successiven Knoten und Bäuche im reinen Wasser wieder mitgetheilt:

Wasser	0	1,8	4,1	6,6	8,6
½ % Lösung	0	1,8	4,0	6,7	8,6
10 % Lösung	0	1,8	—	—	—

Die Dielektricitätsconstante ist also durch die Auflösung des Salzes nicht beeinflusst, wenigstens nicht in einer für rohe Messungen merklichen Weise.

Aethyl-Alkohol. Spec. Gew. 0,796.

Knoten:	0		7,5	
Bäuche:		3,5		11,0

$$\tfrac{1}{2}\lambda' = 7,6\,, \quad \tfrac{1}{2}\lambda = 36\,, \quad \lambda : \lambda' = 4,74\,, \quad \varepsilon = 22,5\,.$$

1) Bei der Berechnung ist eine gewisse additive Correctionsgrösse bei allen Brückenstellungen mit berücksichtigt, vgl. dazu COHN, Wied. Ann. **45**, p. 374, 1892.

Glycerin.

Knoten:	0		6,8
Bäuche:		3,3	

$$\tfrac{1}{2}\lambda' = 7{,}0\,, \quad \tfrac{1}{2}\lambda = 36\,, \quad \lambda : \lambda' = 5{,}15\,, \quad \varepsilon = 26{,}5$$ [1]).

Petroleum.

Die bisher benutzten Wellen von $\frac{1}{2}\lambda = 36$ cm sind zu lang, als dass man in dem benutzten Glastrog eine halbe Wellenlänge $\frac{1}{2}\lambda'$ der Schwingung in Petroleum hätte beobachten können. Man kann sich aber in diesem Falle so helfen, dass man als Secundärschwingung die Octave der Hauptschwingung benutzt. Wenn man zunächst den Bügel B_2 an der Eintrittsstelle P der Drähte ins Petroleum auflegt, so kann man auch noch eine Brücke B_1 in einer Entfernung von 21 cm von P anbringen[2]), sodass lebhafte Schwingungen zwischen B_1 und B_2 entstehen. Dann ergiebt sich durch Verschiebung der Brücke B_3 (nach Fortnahme von B_2), dass wiederum ein Maximum eintritt, falls B_3 um 15 cm ins Petroleum geschoben ist. Es ist daher

$$\tfrac{1}{2}\lambda = 21\,, \quad \tfrac{1}{2}\lambda' = 15\,, \quad \lambda : \lambda' = 1{,}4\,; \quad \varepsilon = 2{,}0\,.$$

Bei Flüssigkeiten von geringem Brechungsvermögen, wie Petroleum, kann man auch etwas anders verfahren. Man biegt die Drähte DD nach unten (vgl. Figur 4a und 4b) und grenzt zunächst zwischen zwei Brücken B_1 und B_2 eine kräftige Schwingung in Luft ab (Figur 4a). Die Distzanz der Brücken möge d sein. Sodann verschiebt man die Brücke B_2 auf eine um ein paar cm nähere Distanz d'

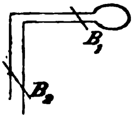
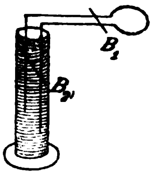


Fig. 4a.

1) Ch. B. Thwing (Zeitschr. f. physik. Chem. **14**, p. 286, 1894) giebt für Glycerin $\varepsilon = 56{,}02$ bei langsameren Schwingungen. Ich muss es noch offen lassen, ob die Differenz gegen die von mir erhaltene Zahl an Verunreinigung des Glycerins liegt, oder ob dasselbe eine starke Dispersion des ε besitzt. Meine Versuche sprechen jedenfalls für eine starke Absorption der Schwingungen durch das Glycerin (cf. oben p. 342 Anm. 3), da schon der zweite Bauch für B_3 nicht zu beobachten war.

2) Die Entfernung 21 cm ist nicht genau gleich der Hälfte der früher benutzten Entfernung (36 cm), sondern etwas grösser, weil durch Verschiebung des Bügels B_1 die Hauptschwingung etwas langsamer geworden ist (cf. oben p. 5).

heran. Die Schwingungen hinter B_1 verlöschen dadurch. Wenn man aber jetzt von unten einen mit Petroleum gefüllten Glascylinder über die Brücke B_2 heraufführt, sodass DD ins Petroleum tauchen (vgl. Fig. 4 b), so treten wieder lebhafte Schwingungen zwischen B_1 und B_2 auf, wenn die Drähte DD auf eine ganz bestimmte Länge l eintauchen. Es ergiebt eine einfache Ueberlegung, dass, falls λ bezw. λ' die Wellenlängen in Luft bezw. Petroleum bedeuten, sein muss:



Figur 4 b.

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{2} = \frac{d' - l}{\lambda} + \frac{l}{\lambda'} .$$

Daraus folgt:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{l + d - d'}{l}$$

$$\varepsilon = \left(\frac{l + d - d'}{l}\right)^2 .$$

So betrug bei einem Versuch

$$d = 34{,}5 \text{ cm} , \quad d - d' = 3{,}5 \text{ cm} , \quad l = 8{,}5 \text{ cm}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{12{,}0}{8{,}5} = 1{,}41 , \quad \varepsilon = 2{,}0 .$$

Von der beschriebenen Methode möchte ich hier vorläufig ihre Brauchbarkeit zur Demonstration hervorgehoben haben, da sie absolut sicher functionirt, wenig Zurichtung erfordert, und sehr bequem ist. Die Methode kann auf Flüssigkeiten von verhältnissmässig hoher Leitfähigkeit angewandt werden kann, z. B. auf alle verdünnten Salzlösungen, und man braucht dabei die Leitfähigkeit durch nichts zu compensiren.

Doch auch zu genauen Messzwecken kann die Methode herangezogen werden, am genauesten in der Weise, dass die Intensität der elektrischen Schwingungen zwischen erster Brücke B_1 und Flüssigkeit quantitativ gemessen wird in ihrer Abhängig-

keit von der Stellung der Brücke B_3 in der Flüssigkeit. Man kann dazu z. B. bequem die Messung des galvanischen Widerstandes des luminiscirenden Gasraumes der Zehnder'schen Röhre heranziehen, wie ich es schon früher (Wied. Ann. **53**, p. 758, 1894) zum Zwecke anderer Messungen gethan habe. Auch kann man dadurch zugleich einen Schluss auf die Leitfähigkeit der Flüssigkeiten machen, wenn man die successive Verschlechterung der Minima in den aufeinanderfolgenden Knotenstellungen der Brücke B_3 misst[1]. — Es hat die Untersuchung dieser Frage wohl deshalb Interesse, weil die Leitfähigkeit verdünnter Lösungen für schnelle Schwingungen noch nicht gemessen ist.

Bei wesentlich besser leitenden Flüssigkeiten kann vielleicht ihre Leitfähigkeit aus der absoluten Phasenänderung bei der Reflexion der elektrischen Wellen an ihrer Oberfläche ermittelt werden, indem auch diese aus der Stellung des Bügels B_1 ermittelt werden kann. Diese Methode ist dann analog der optischen, nach der aus der Phasenänderung des Lichtes bei der Reflexion an einem absorbirenden Körper sein Absorptionsvermögen gefunden werden kann.

Wenn man die hier dargelegte Methode zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante mit der von Nernst[2] beschriebenen vergleicht, welche ebenfalls schlecht leitende Flüssigkeiten, wie z. B. Wasser, zu untersuchen erlaubt, so ist wohl, wenn man nur auf Maxima und Minima des Leuchtens der Zehnder'schen Röhre einstellt, diese Methode an Einfachheit überlegen, zumal eine Compensation der Leitfähigkeit nicht nöthig ist, und die Untersuchung von sehr verdünnten Salzlösungen oder Wasser nicht im geringsten schwieriger ist, als die guter Isolatoren, während dies bei der Nernst'schen Methode schon eine erheblich gesteigerte Sorgfalt erfordert. — Ob allerdings nach dieser Methode dieselbe Genauigkeit zu erreichen ist, wie nach der Nernst'schen Methode, vermag ich noch nicht anzugeben. Ich glaube aber, dass schon allein durch Beobachtung der Bauchstellungen der Brücke in der Flüssigkeit eine Genauigkeit von

---

1) Es bringt keinerlei Aenderung hervor, wenn die Drähte DD, sowie die Brücke B_3 in der Flüssigkeit mit einer dünnen isolirenden Hülle, z. B. Schellackschicht, überzogen sind. Man kann daher die Leitfähigkeit ohne metallische Zuführung zur Flüssigkeit messen.

2) W. Nernst, Zeitschr. f. physik. Chem. Nr. 14 p. 622, 1894.

2 % in der Bestimmung ihrer Dielektricitätsconstante zu erreichen ist, zumal wenn man für stark brechbare Flüssigkeiten einen etwas grösseren Erreger und dementsprechend etwas längere Wellen benutzt. Da eine solche Genauigkeit für viele chemische Zwecke ausreichend sein dürfte, so möchte ich auch dem Chemiker die Benutzung dieser Methode empfehlen, zumal sie ohne besondere Einübung sofort zu handhaben ist.

Leipzig, Mai 1895.

J. Thomae in Jena, *Ueber den Zusammenhang zwischen den Steiner'schen und den Poncelet'schen Polygonen.*

Meine Bemühungen, die Poncelet'schen Schliessungssätze, die sich auf einem Kegelschnitt eingeschriebene und einem andern umschriebene Polygone beziehen, in rein projectiver Methode zu erweisen, haben endlich dadurch Erfolg gehabt, dass ich eine nahe Verwandtschaft zwischen den Steiner'schen Polygonen bei Curven dritter Ordnung und den Poncelet'schen Polygonen auffand. Meine Erörterungen sollen hier mitgetheilt werden. Da ich dabei häufig von meinen »Untersuchungen über zweizweideutige Verwandtschaften« im XXI. Bande der Abhandlungen der Königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften (Nr. VI) Gebrauch mache, so will ich diese Abhandlung kurz mit (Th. § . . .) citiren. Der folgende Aufsatz ist zugleich als eine Ergänzung der genannten Arbeit anzusehen.

§ 1. *Die Steiner'schen Polygone. Zusammensetzung symmetrischer Verwandtschaften.* In den Leipziger Annalen Bd. XXIV hat Herr Küpper auf rein projectivem Wege folgenden Satz erwiesen:

Liegen auf einer Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ die festen Punkte $R_1 R_2 R_3 \ldots$, die sich periodisch wiederholen können, und zieht man durch sie die Geraden MR_1M_1, $M_1R_2M_2$, $M_2R_3M_3$, $M_3R_4M_4 \ldots$, wo die Punkte $MM_1M_2 \ldots$ ebenfalls auf $C^{(3)}$ liegen, so geht die Gerade MM_n durch einen Punkt M_{0n} auf $C^{(3)}$, der von der Lage des Punktes M unabhängig ist, wenn n eine *ungerade* Zahl bedeutet.

Ist eine projective symmetrische zweizweideutige Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\sim} (B_1)$$

auf einer Geraden oder auf einem Kegelschnitt ω gegeben, und projicirt man dieselbe von zwei Punkten des Kegelschnittes XY aus, oder wenn für ω eine Gerade eintritt, von zwei willkürlichen nicht auf der Geraden liegenden Punkten aus, so erzeugen die Schnittpunkte der entsprechenden Projectionsstrahlen eine Curve vierter Ordnung mit den Doppelpunkten XY, oder wenn die Gerade $z \equiv XY$ durch einen sich selbst entsprechenden Punkt der auf einer Geraden liegenden Verwandtschaft geht, oder wenn XY ein Paar der Verwandtschaft auf ω ist, so erzeugen die entsprechenden Strahlen eine durch XY gehende Curve dritter Ordnung, die durch Hinzuziehen der Geraden z zu einer Curve vierter Ordnung ergänzt wird. Darüber handelt meine oben genannte Schrift.

Durch eine Möbius'sche Verwandtschaft, in der XY die lateralen Hauptpunkte sind und ein Punkt Z der durch die Verwandtschaft $(A; B_1)$ erzeugten Curve vierter Ordnung der dritte Hauptpunkt ist, bildet sich die Curve (Th. § 7) auf eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ und ω auf einen Kegelschnitt π ab, der in besondern Fällen, nämlich wenn ω durch Z geht, eine Gerade ist. Das Bild der Verwandtschaft $(A; B_1)$ auf ω ist wieder eine symmetrische zweizweideutige projective Verwandschaft, die auf π liegt. Auf Grund dieser Thatsachen dürfen wir hier ohne die Allgemeinheit wesentlich zu beschränken annehmen, dass die durch die zweizweideutige Verwandtschaft $(A; B_1)$ und die Projectionscentren XY erzeugte Curve eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ sei, wir wollen sie eine Leitcurve der Verwandtschaft nennen. Liegt $(A; B_1)$ auf einer Geraden w und geht $z \equiv XY$ durch einen Doppelpunkt dieser symmetrischen Verwandtschaft, so ist der von (wz) durch XY auf z harmonisch getrennte Punkt W ein Wendepunkt von $C^{(3)}$ und w ist seine harmonische Polare.

Um die Diction zu erleichtern wird im Folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders verfügt wird, als Träger der zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft ein Kegelschnitt ω angenommen, und für XY ein Paar der Verwandtschaft, so dass die Leitcurve der Verwandtschaft eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ wird, die (Th. § 17) symmetrisch zu $XY\omega$ liegt.

Werden übrigens XY auf $C^{(3)}$ willkürlich gegeben, so giebt es immer vier Kegelschnitte ω durch XY von der Beschaffenheit, dass $C^{(3)}$ zu $XY\omega$ symmetrisch liegt und von XY aus projicirt Leitcurve einer symmetrischen Verwandtschaft auf ω wird.

Allerdings können diese Kegelschnitte dann ideale sein, wenn bei zweizügigem $C^{(3)}$ einer der Punkte XY auf dem paaren, der andere auf dem unpaaren Zuge liegt. Zeichnen wir einen Kegelschnitt γ durch XY der $C^{(3)}$ vierpunktig berührt — es giebt deren sechzehn, unter denen sich mit Ausnahme des eben besprochenen Falles immer reale befinden (Th. § 15) — und nehmen wir XY und den Berührungspunkt P zu Hauptpunkten einer Möbius'schen Verwandtschaft, so bildet sich $C^{(3)}$ auf eine Curve dritter Ordnung $\Gamma^{(3)}$ ab, die auf der Geraden z einen Wendepunkt hat, dessen harmonische Polare w sein mag. Bilden wir nun rückwärts durch dieselbe Möbius'che Verwandtschaft ab, so erhalten wir, weil die Verwandtschaft involutorisch ist, die Curve $C^{(3)}$ wieder als Bild von $\Gamma^{(3)}$, und der Geraden w entspricht ein Kegelschnitt ω, der durch P geht und XY enthält, aber nicht, wie (Th. § 15) von mir irrthümlich bemerkt wurde, der vierpunktig berührende Kegelschnitt ist. $\Gamma^{(3)}$ liegt symmetrisch zu XYw, ebenso $C^{(3)}$ symmetrisch zu $XY\omega$, wie die Abbildung unmittelbar ergiebt (Th. § 15).

Jetzt stellen wir eine zweizweideutige symmetrische Beziehung zwischen den Punktreihen (A) und (B_n) auf ω durch wiederholte Zusammensetzung der Verwandschaft $(A) \overset{2,2}{\sim} (B_1)$ mit sich selbst dadurch her, dass wir

$$(A) \overset{2,2}{\sim} (B_1),\ (B_1) \overset{2,2}{\sim} (B_2),\ \ldots\ (B_{n-1}) \overset{2,2}{\sim} (B_n)$$

setzen, wo die sämmtlichen Verwandtschaften dieselben sind, also dieselbe Leitcurve $C^{(3)}$ haben. — Die Construction des Punktes B_n aus A geschieht in folgender Weise. Man zieht die Geraden $XA\ YB_1\ XB_2\ YB_3\ XB_4\ YB_5 \ldots$, sie treffen die Curve $C^{(3)}$ in Punkten wie sie folgendes Schema angiebt.

Es geht	XA,	YB_1,	XB_2,	YB_3,	...
durch	MXM_1,	M_1YM_2,	M_2XM_3,	M_3YM_4,	...

Der Strahl XM_2 bestimmt den B_1 in der Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\sim} (B_1)$ entsprechenden von A verschiedenen Punkt B_2, weil die Verwandtschaft eine symmetrische und $C^{(3)}$ die Leitcurve ist. Der Strahl $M_{n-1}M_n$ geht durch X wenn n ungerade ist. Der Strahl MM_n geht durch einen von der Lage des Punktes M unabhängigen Punkt auf $C^{(3)}$, ist dieser der Punkt Y, so bilden MM_1, $M_1M_2, \ldots M_{n-1}M_n$, M_nM ein Steiner'sches Polygon von $n+1$ Seiten und es fällt der Punkt B_{n+1} mit dem Punkte A zusammen, was auch A für ein Punkt auf ω sein mag.

§ 2. *Beweis des Poncelet'schen Schliessungstheorems.* Verbindet man den Punkt A auf ω mit dem Punkte B_1 auf ω durch eine Gerade, ebenso B_1 mit B_2, B_2 mit B_3, ... B_{n-1} mit B_n, B_n mit A, und setzt man voraus, dass $MM_1\ M_2 \dots M_n$ ein STEINER'sches Polygon mit den Leitpunkten XY sei, so gehören diese Geraden sämmtlich (Th. § 19) dem Directionsbüschel der Curve $C^{(3)}$ an und stützen sich deshalb auf einen und denselben Kegelschnitt π, bilden ein PONCELET'sches Polygon, dessen Ecken auf ω liegen und dessen Seiten π berühren. Da aber das STEINER'sche Polygon seine charakteristischen Eigenschaften behält, wenn M verrückt wird, so behält auch das PONCELET'sche Polygon seine charakteristischen Eigenschaften, wenn A auf ω verrückt wird. Somit haben wir, zunächst für ein ungerades n, den PONCELET'schen Satz erwiesen:

Liegen die Seiten eines $(n+1)$-eck- $(n+1)$-seits auf einem Kegelschnitt ω, und berühren seine Seiten einen Kegelschnitt π, so lässt sich dieses Polygon so stetig bewegen, dass die Ecken fortwährend auf ω bleiben und die Seiten fortwährend π berühren.

Unter einem n-eck-n-seit verstehen wir ein Polygon von n Ecken und n Seiten, das auf jeder Seite zwei Ecken und in jeder Ecke zwei Seiten hat.

Der Satz gilt aber auch für ein gerades n. Denn ich habe bereits auf rein projectivem Wege (Th.[1]) § 23) den Satz erwiesen: zieht man von den Punkten des Kegelschnittes ω je zwei Tangenten an einen andern Kegelschnitt γ, so stützen sich die Verbindungslinien der beiden weiteren Schnittpunkte dieser Tangenten mit ω auf einen Kegelschnitt $\varkappa$ des Büschels (ω, γ). Verbinden wir demnach in dem PONCELET'schen $(n+1)$-eck $AB_1B_2 \dots B_n$ die Ecken $AB_2\ B_2B_4\ B_4B_6 \dots B_{n-1}A$ durch gerade Linien, so erhalten wir ein Polygon mit $\frac{1}{2}(n+1)$ Ecken und Seiten, für welches der PONCELET'sche Satz gilt und dies ist ein Polygon mit ungerader Ecken- und Seitenzahl, wenn n von der Form $2(2m+1) - 1$ ist.

Liegen die Ecken eines $(2m+1)$-eck-$(2m+1)$-seits auf einem Kegelschnitte ω und berühren seine Seiten einen Kegelschnitt π, so kann man, worauf ich nachher zurückkommen will, zwischen je zwei aufeinander folgende Ecken $B_\mu\ B_{\mu+1}$ einen Punkt B_μ' auf ω einschalten, den ich die Quasimitte zwischen B_μ

1) Lies dort auf Seite 494 Zeile 5 von unten ω statt γ.

und $B_{\mu+1}$ nennen will, und der die Eigenschaft hat, dass $B_\mu' B_\mu$ und $B_\mu' B_{\mu+1}$ denselben Kegelschnitt γ des Büschels (ω, π) berühren. Das Polygon $A B' B_1 B_1' B_2 B_2' \ldots B'_{n-1} B_n B'_n A$ hat dann eine gerade Anzahl von Ecken und Seiten und ist nach dem bewiesenen Satze ein Poncelet'sches, und also das gegebene $(2m+1)$-eck-$(2m+1)$-seit auch.

Von der Quasimitte brauchen wir im Grunde hier nur die Existenz, und diese ist durch eine Continuitätsbetrachtung leicht zu erweisen. Sie lässt sich aber auch wirklich construiren. Man findet nämlich (Schröter, Theorie der Kegelschnitte 1876. pag. 391) einen Kegelschnitt λ (es giebt deren drei reale), für den ω und π einander polar sind. Die harmonische Contravariante γ zu ω und λ ist der Kegelschnitt, der von $B_\mu' B_\mu$ und $B_\mu' B_{\mu-1}$ berührt wird.

§ 3. *Steiner'sche Punktpaare n^{ter} Ordnung.* Von dem Punkte X giebt es vier Tangenten an die Curve $C^{(3)}$, sie bestimmen auf ω diejenigen Punkte der Reihe (A) in der Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\wedge} (B_1)$, denen nur *ein* Punkt B_1 entspricht, die Verzweigungselemente der Verwandtschaft. Diese Punkte sind (Th. § 23) die Grundpunkte des Kegelschnittbüschels (ω, π). Der Wurf der vier Tangenten von einem Punkte von $C^{(3)}$ an diese Curve ist von der Wahl dieses Punktes unabhängig, wir wollen ihn den charakteristischen Wurf der Curve nennen. Wir können ihn aber auch den charakteristischen Wurf einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft nennen, als den Wurf, den die Verzweigungselemente der einen oder der andern Reihe bestimmen. Projicirt man $C^{(3)}$ von irgend zwei Punkten XY auf $C^{(3)}$ auf einen durch diese Punkte gehenden Kegelschnitt oder auf eine Gerade, so bestimmen die Projectionsstrahlen auf dem Kegelschnitte oder der Geraden eine zweizweideutige projective Verwandtschaft, mit dem charakteristischen Wurfe der der Curve auch zukommt, und der unabhängig von der Wahl der Punkte XY ist. Die Grundpunkte des Büschels (π, ω) bestimmen als Punkte von ω betrachtet den charakteristischen Wurf der Verwandtschaften, die durch die Tangenten der Kegelschnitte des Büschels auf ω bestimmt werden.

Es seien $A B_1 B_2 \ldots B_{2n-1}$ die auf dem Kegelschnitte ω liegenden Ecken eines Poncelet'schen Polygons, dessen Seiten den Kegelschnitt π berühren. Dann bestimmen die Tangenten auf ω eine zweizweideutige projective symmetrische Verwandt-

schaft $(A) \overset{2,2}{\curlywedge} (B_1)$, die von einem Paare XY derselben projicirt eine durch XY gehende Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ erzeugt mit dem charakteristischen Wurfe der Verwandtschaft, oder der Grundpunkte des Büschels (ω, π) als Punkten von ω. Auf dieser Curve $C^{(3)}$ bilden die Punkte XY ein Steiner'sches Paar n^{ter} Ordnung. Trifft nämlich der Strahl XA die Curve $C^{(3)}$ in den Punkten MM_1, so trifft der Strahl YM_1 ω in B_1 (oder in B_{2n-1}, was nur eine veränderte Zählung der Ecken bedeutet). Trifft YM_1 die Curve $C^{(3)}$ noch in M_2, so geht der Strahl XM_2 durch B_2, trifft XM_2 die Curve $C^{(3)}$ noch in M_3, so geht YM_3 durch B_3 u. s. w., der Strahl XM_{2n-2} geht durch B_{2n-2} und trifft $C^{(3)}$ noch in M_{2n-1}, der Strahl YM_{2n-1} trifft ω in B_{2n-1} und $C^{(3)}$ noch in M_{2n}, der Strahl XM_{2n} trifft ω in $B_{2n} \equiv A$ und ist also mit XM identisch, M_{2n} fällt auf M, die Punkte $MM_1M_2 \ldots M_{2n-1}$ bilden ein Steiner'sches Polygon von $2n$ Ecken und Seiten.

Ist nun eine Curve $C_1^{(3)}$ mit demselben charakteristischen Wurfe als $C^{(3)}$ gegeben, so kann man $C^{(3)}$ durch eine Collineation in $C_1^{(3)}$ verwandeln, die XY collinear entsprechenden Punkte X_1Y_1 auf $C_1^{(3)}$ sind ein Steiner'sches Punktpaar n^{ter} Ordnung, weil sich das Steiner'sche Polygon für $C^{(3)}$ in ein ebensolches für $C_1^{(3)}$ abbildet. — Ist nämlich W ein Wendepunkt auf $C^{(3)}$, W_1 ein Wendepunkt auf $C_1^{(3)}$ und sind die drei Tangentialpunkte von W bez. W_1, die Berührungspunkte der von WW_1 an $C^{(3)}$ bez. $C_1^{(3)}$ gezogenen Tangenten, $TT'T''$ bez. $T_1T_1'T_1''$, die auf den harmonischen Polaren der Punkte WW_1, den Geraden w bez. w_1 liegen, so kann man eine Collineation dadurch bestimmen, dass man den Punkten WTT' bez. die Punkte $W_1T_1T_1'$ entsprechen lässt, dass man ferner der Wendetangente t in W die Wendetangente t_1 in W_1 zuweist. Es wird dann von selbst dem Punkte (tw) der Punkt (t_1w_1) und dem Punkte T'' der Punkt T_1'' entsprechen, weil der Wurf $(tw)\,TT'T''$ nach der Voraussetzung dem Wurf $(t_1w_1)\,T_1T_1'T_1''$ projectiv gleich ist. Hierdurch ist die Collineation noch nicht völlig bestimmt. Einem Strahlenbüschel durch W ist ein bestimmter Strahlenbüschel durch W_1 durch die Projectivität

$$W((wt)\,TT'T'') \;\overline{\wedge}\; W_1((w_1t_1)\,T_1T_1'T_1'')$$

zugeordnet. Aber auf einem Paare entsprechender Strahlen kann noch einem beliebigen Punkte des einen Strahles ein beliebiger Punkt des andern zugewiesen werden. Die Gerade l

durch W treffe $C^{(3)}$ in L und der entsprechende Strahl l_1 durch W_1 treffe $C_1^{(3)}$ in L_1. Diese beiden Punkte lassen wir einander entsprechen und bestimmen dadurch die Collineation vollständig. Durch sie verwandelt sich die Curve $C^{(3)}$ in eine andere Curve dritter Ordnung, die mit $C_1^{(3)}$ an der Stelle W_1 drei Punkte gemein hat, weil der Punkt ein Wendepunkt ist, und die Tangenten zusammenfallen, an den Stellen $T_1 T_1' T_1''$ aber je zwei Punkte und an der Stelle L_1 einen Punkt. Sie hat also mit $C_1^{(3)}$ zehn Punkte gemein und fällt deshalb ganz mit $C_1^{(3)}$ zusammen. Die Curven $C^{(3)}$ und $C_1^{(3)}$ sind in der Collineation einander entsprechende, und die XY entsprechenden Punkte $X_1 Y_1$ sind ein Steiner'sches Paar n^{ter} Ordnung.

Man erkennt hieraus, wie sich die Aufgabe, ein Steiner'sches Punktpaar n^{ter} Ordnung auf einer Curve $C^{(3)}$ zu bestimmen, auf die Aufgabe zurückführen lässt, ein Poncelet'sches Polygon von $2n$ Ecken und $2n$ Seiten zu construiren.

§ 4. *Partieller Beweis des Poncelet'schen Diagonalensatzes.* Dass in einem Poncelet'schen Polygone jede Diagonale beim Drehen des Polygons fortwährend einen und denselben Kegelschnitt berührt, lässt sich in vielen Fällen mittels des von mir (Th. § 23) gegebenen Satzes erweisen, dass die dritte Seite eines Dreiecks, dessen Ecken auf ω liegen, und von dem zwei Seiten einen Kegelschnitt γ berühren, fortwährend einen Kegelschnitt π des Büschels (ω, γ) berührt, wenn das Dreieck den angegebenen Bedingungen gemäss variirt wird. Wir wollen ein solches Dreieck ein quasi-gleichschenkliges Dreieck nennen.

Für ein Poncelet'ches Fünfeckfünfseit $AB_1 B_2 B_3 B_4$ folgt die Richtigkeit des Satzes für die beiden Diagonalen AB_2, AB_3 unmittelbar aus dem quasi-gleichschenkligen Dreiecke.

Beim Siebenecksiebenseit $AB_1B_2 \ldots B_6$ folgt seine Richtigkeit für die Diagonalen AB_2 AB_5 aus demselben Satze unmittelbar. Die Diagonalen AB_2, B_2B_4 bilden ein quasi-gleichschenkliges Dreieck, mithin gilt der Satz auch für die Diagonale AB_4, und wenn man die Ecken in umgekehrter Folge nimmt, so folgt er daraus für die Diagonale AB_3. Der Satz ist also für alle Diagonalen richtig.

Beim Neuneckneunseit folgt er nur aus dem Satze vom quasi-gleichschenkligen Dreiecke durch wiederholte Anwendung für die Diagonalen AB_2 AB_4 AB_8 (was keine eigentliche Diagonale ist) für $AB_{16} \equiv AB_7$, für $AB_{14} \equiv AB_5$. Aber für AB_3 und AB_6 bleibt er unerwiesen.

Beim Elfeckelfseit folgt die Richtigkeit des Diagonalensatzes durch wiederholte Anwendung des Satzes vom quasi-gleichschenkligen Dreieck für die Diagonalen AB_2, AB_4, AB_8, $AB_{16} \equiv AB_5$, AB_{10}, $AB_{20} \equiv AB_9$, $AB_{18} \equiv AB_7$, $AB_{14} \equiv AB_3$, AB_6, also für alle Diagonalen.

Ist p eine Primzahl und ist 2 eine primitive Wurzel für dieselbe, so dass

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, und diese Congruenz für keine niedrigere Potenz von 2 erfüllt ist, oder auch, wenn zwar

$$2^{\frac{1}{2}(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, aber $\frac{1}{2}(p-1)$ eine Primzahl ist, so gilt der Satz für alle Diagonalen dieses Poncelet'schen p-eck-p-seits, wie die successive Anwendung des Satzes vom quasi-gleichschenkligen Dreiecke ergiebt. Dass es von der letzten Art unendlich viele Primzahlen giebt, theilt mir Herr Piltz mit, so dass es unendlich viele Polygone giebt, für deren sämmtliche Diagonalen die Richtigkeit des Satzes erwiesen ist.

Beim Sechsecksechsseit folgt die Richtigkeit aus dem Satze vom quasi-gleichschenkligen Dreiecke für die Diagonalen AB_2 AB_4, für die Diagonale AB_3 aber erweist er sich wie folgt. Im Dreiecke AB_1B_3 berührt die Seite AB_1 den Kegelschnitt π fortwährend, und B_1B_3 berührt einen Kegelschnitt π' des Büschels (ω, π) fortwährend, wenn A auf ω bewegt wird. Das Sechsecksechsseit lässt sich nun in eine solche Lage bringen, dass eine Ecke auf eine Seite des dem Büchel (ω, π) gemeinsamen Polardreiecks fällt. Dann kann es durch eine involutorische Collineation, für die die betreffende Polardreiecksseite Fluchtlinie, die gegenüberliegende Ecke Centrum ist, auf sich selbst, ω auf ω und π auf π, B_1B_3 auf B_5B_3 abgebildet werden. Es muss folglich die Diagonale AB_3 in dieser Lage mit jener Seite des Polardreiecks zusammenfallen. Betrachten wir nun das Dreieck AB_1B_3, so berühren zwei Seiten je einen festen Kegelschnitt des Büschels (ω, π) und die dritte geht durch einen Grenzpunkt des Büschels. Folglich muss bei jeder Lage von A (Th. § 25) die Diagonale AB_3 durch einen Grenzpunkt gehen, womit der Satz für alle Diagonalen des Sechsecksechsseits erwiesen ist.

§ 5. *Eine Cremona'sche Verwandtschaft dritter Ordnung.* Um den Diagonalensatz ganz allgemein zu beweisen, benutzen

wir wiederum die Curven dritter Ordnung, müssen jedoch etwas weiter ausholen.

Durch die Punkte $R_1 R_2 R_3 R_4$ werde ein Kegelschnittbüschel (*x*) gelegt und durch einen Punkt *Z* ein Strahlenbüschel (*z*). Jeder Strahl *z* bestimmt auf jedem Kegelschnitte *x* des Büschels zwei Punkte AA', und wenn wir diese einander zuweisen, so constituiren wir damit eine Cremona'sche involutorische Verwandtschaft dritter Ordnung, in der $R_1 R_2 R_3 R_4$ Hauptpunkte ersten Ranges sind, während *Z* ein Hauptpunkt zweiten Ranges ist.

Die Verwandtschaft ist von der dritten Ordnung, weil den Punkten einer Geraden *g* die Punkte einer Curve dritter Ordnung entsprechen, die in *Z* einen Doppelpunkt hat. Auf *g* bestimmen die Kegelschnitte (*x*) eine Involution, verbindet man die Schnittpunkte (*x g*) mit *Z*, so gehören zu jedem Kegelschnitte *x* zwei Strahlen *z*, umgekehrt gehört zu jedem Strahle *z* ein Kegelschnitt *x*. Der Strahlenbüschel ist dem Kegelschnittbüschel einzweideutig zugeordnet, solche Gebilde erzeugen im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte in *Z*. Hier aber spaltet sich von dieser Curve die Gerade *g* ab, es bleibt mithin als ihr entsprechende Curve eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte in *Z*, so dass die Verwandtschaft von der dritten Ordnung ist. Ob die Erzeugnisse einzweideutig einander zugeordneter Strahlen und Kegelschnittbüschel auf projectivem Wege bereits untersucht sind, lasse ich dahingestellt. Da die Eigenschaft der Verwandtschaft, von der dritten Ordnung zu sein, für unsere Zwecke unwesentlich ist, so könnten wir uns mit dieser Betrachtung begnügen, ich will aber gleichwohl nachher noch einmal darauf zurückkommen.

Die Geraden durch den Punkt *Z* entsprechen sich selbst, und dem Punkt *Z* entspricht jeder Punkt des durch ihn gehenden Kegelschnittes des Büschels (*x*), also eine Curve *zweiter* Ordnung. — Deshalb ist *Z* ein Hauptpunkt *zweiten* Ranges.

Auf einer Geraden *r* durch einen Punkt *R* der Punkte $R_1 R_2 R_3 R_4$ bestimmen die Kegelschnitte (*x*) eine ihnen projective Punktreihe (*Q*), die nach ihnen führenden Strahlen (z_q) durch *Z* sind den Kegelschnitten (*x*) projectiv, erzeugen also mit ihnen eine Curve dritter Ordnung. Diese enthält die Gerade *r*, es entspricht demnach dieser Geraden in der Verwandtschaft ein Kegelschnitt, der durch *Z* und diejenigen drei der Punkte $R_1 R_2 R_3 R_4$ geht, welche von *R* verschieden sind. Die Kegelschnitte (ϱ), die

den Geraden r entsprechen, sind, wie wir sogleich bemerken, diesen Geraden projectiv zugeordnet. Denn in unserer Verwandtschaft entsprechen den Punkten (R_{12}) der Geraden $R_1 R_2$ die Punkte (R_{34}) der Geraden $R_3 R_4$, und zwar folgt aus der Definition der Verwandtschaft, dass $(R_{12}) \barwedge (R_{34})$ ist. Bestimmen also die Strahlen (r) durch R_3 oder R_4 auf der Geraden $R_1 R_2$ die Punktreihe (R_{12}), so gehen die (r) entsprechenden Kegelschnitte (ϱ) durch die (R_{12}) entsprechenden Punkte und es ist

$$(r) \barwedge (R_{12}) \barwedge (R_{34}) \barwedge (\varrho),$$

w. z. b. w. — Der Geraden $R_3 R_4$ entspricht die Gerade $R_1 R_2$. — Einem Punkte R entspricht jeder Punkt der durch ihn und Z gehenden Geraden, wie aus der Verwandtschaftsdefinition unmittelbar folgt, also eine Curve *erster* Ordnung. Deshalb ist R ein Hauptpunkt *ersten* Ranges.

Nun kommen wir noch einmal auf die Ordnung der Verwandtschaft zurück. — Projiciren wir eine Gerade g von R_1 und R_2 aus, so erhalten wir zwei projective Strahlenbüschel $(r_1) \barwedge (r_2)$, in denen der gemeinsame, nach $(g, (R_1 R_2))$ führende Strahl sich selbst entspricht. Diesen Strahlenbüscheln entsprechen in unserer Verwandtschaft zwei unter sich projective Kegelschnittbüschel $(\varrho_1) \barwedge (\varrho_2)$ durch die Punkte $Z R_2 R_3 R_4$ bez. $Z R_1 R_3 R_4$. Sie erzeugen eine Curve vierter Ordnung $M^{(4)}$ (Th. § 10) mit drei Doppelpunkten $R_2 R_3 Z$. Dem sich selbst entsprechenden Strahle in (r_1) (r_2) der Geraden $R_1 R_2$ entspricht in (ϱ_1) (ϱ_2) die Gerade $R_3 R_4$, also enthält die Curve, die durch $(\varrho_1) \barwedge (\varrho_2)$ erzeugt wird, die Gerade $R_3 R_4$ und der Rest ist eine Curve dritter Ordnung, die in Z einen Doppelpunkt hat.

Es ist wichtig zu bemerken, dass in unserer Verwandtschaft ein Paar der Punkte R, z. B. $R_1 R_2$ zusammenrücken können, es muss dann die Richtung oder die Gerade in der $R_1 R_2$ zusammenrücken gegeben werden, und Curven die durch die zusammengefallenen Punkte $R_1 R_2$ hindurchgehen, sind solche, die die eben besprochene Gerade in R_1 berühren.

Alle Curven dritter Ordnung, für die Z der zu $R_1 R_2 R_3 R_4$ gegenüberliegende Punkt ist, entsprechen sich selbst. *Wir wollen solche Curven zu $Z R_1 R_2 R_3 R_4$ gehörige Curven dritter Ordnung nennen.*

Die Untersuchung der eben besprochenen Verwandtschaft lässt sich in elementarer Weise noch dadurch führen, dass man

sie aus zwei Möbius'schen oder Steiner'schen Verwandtschaften zusammensetzt, was wir jedoch nicht ausführen wollen. Ist Q ein fester Punkt und S ein beweglicher, so giebt es im Allgemeinen nur einen Kegelschnitt x des Büschels, für den QS conjugirte Punkte sind, und es giebt im Allgemeinen nur einen Strahl z durch S. Dieser Strahl und dieser Kegelschnitt bestimmen ein Punktpaar AA', welches dem Punkte S im Allgemeinen eindeutig zugeordnet ist. Dadurch wird eine einzweideutige Punktverwandtschaft in der Ebene bestimmt, deren Uebergangscurve ein Kegelschnitt ist, wenn Z auf einem zerfallenden Kegelschnitte des Büschels liegt. Diese Verwandtschaft soll jedoch ebenfalls hier nicht weiter untersucht werden.

§ 6. *Vollständiger Beweis des Poncelet'schen Diagonalensatzes.* Gehört die Curve $C^{(3)}$ zu $ZR_1R_2R_3R_4$ und sind LL' zwei auf $C^{(3)}$ liegende entsprechende Punkte unserer Cremona'schen Verwandtschaft, so entspricht der Geraden r_{1l}, die R_1 mit L verbindet, ein Kegelschnitt ϱ_{1l} durch $R_2R_3R_4Z$ und den Punkt L'. Die Geraden (R_2L') sind (Th. § 16) den Kegelschnitten (ϱ_{1l}) zweizweideutig projectiv zugeordnet. Ferner ist

$$(r_{1l}) \equiv (R_1L) \barwedge (\varrho_{1l}) \overset{2,2}{\barwedge} (R_2L')$$

und folglich ist

$$(R_1L) \overset{2,2}{\barwedge} (R_2L').$$

Sind R_1R_2Z drei Punkte einer Curve dritter Ordnung, so lassen sich immer auf ihr R_3R_4 so wählen, dass Z den Punkten $R_1R_2R_3R_4$ gegenüber liegt. Daraus fliesst der Satz:

Zieht man durch einen Punkt X auf einer Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ eine Gerade, die die Punkte MM_1 auf ihr bestimmt, legt durch M_1 und Z eine Gerade, die $C^{(3)}$ noch in M_2 trifft und verbindet man diesen Punkt mit Y, so stehen die Strahlen

$$(MXM_1) \quad (M_2YM_3)$$

in projectiv zweizweideutiger Beziehung zu einander, erzeugen eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in X und Y.

Liegen auf $C^{(3)}$ die Punkte $XZ_1Z_2 \ldots Z_{n-1}Y$ und zieht man die Geraden MXM_1, $M_1Z_1M_2$, $M_2Z_2M_3$, $\ldots$ $M_{n-1}Z_{n-1}M_n$, M_nYM_{n+1}, wo die Punkte $MM_1M_2 \ldots M_{n+1}$ auf $C^{(3)}$ liegen, und ist erstens n gerade, so geht die Verbindungslinie M_1M_n nach den Küpper'schen Sätzen, wenn M variirt, fortwährend durch einen festen Punkt Z auf $C^{(3)}$. Aus der Betrachtung des Liniensystems

$$(MXM_1) \quad (M_1ZM_n) \quad (M_nYM_{n+1})$$

folgt dann, dass

$$(MXM_1) \overset{2,2}{\wedge} (M_n Y M_{n+1})$$

sei. — Ist aber zweitens n ungerade, so geht die Verbindungslinie $M_1 M_{n+1}$ fortwährend durch einen festen Punkt Z auf $C^{(3)}$ und aus der Betrachtung des Liniensystems

$$(MXM_1) \quad (M_1 Z M_{n+1}) \quad (M_{n+1} Y M_n)$$

folgt wieder

$$(MXM_1) \overset{2,2}{\wedge} (M_{n+1} Y M_n) \,.$$

Hat man also eine Reihe von Punkten $XZ_1Z_2 \ldots Z_{n-1}Y$ auf einer Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, die sich übrigens wiederholen können, und verbindet einen Punkt M von $C^{(3)}$ mit X, den dritten Schnittpunkt M_1 dieser Geraden mit $C^{(3)}$ mit Z, den dritten Schnittpunkt M_2 dieser Geraden mit Z_2 und so fort, den Punkt M_n mit Y, und trifft diese Gerade die Curve $C^{(3)}$ noch in M_{n+1}, so stehen die Strahlen (XM) (YM_{n+1}) zu einander in zweizweideutiger projectiver Beziehung und erzeugen eine Curve vierter Ordnung mit den Doppelpunkten XY, die in besonderen Fällen in eine Curve dritter Ordnung plus (XY) ausarten kann.

Als specieller Fall fliesst hieraus weiter der Satz:

Zieht man von einem variablen Punkte M auf einer Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ eine Gerade durch X, die $C^{(3)}$ noch in M_1 trifft, bestimmt durch die Gerade $M_1 Y$ auf $C^{(3)}$ den Punkt M_2, zieht $M_2 X$ und bestimmt dadurch den Punkt M_3 auf $C^{(3)}$, bestimmt M_4 durch $M_3 Y$ u. s. f., so dass M_{2m-2} mit X den Punkt M_{2m-1} auf $C^{(3)}$ und M_{2m-1} mit Y den Punkt M_{2m} auf $C^{(3)}$ bestimmt, so besteht die Beziehung

$$(MXM_1) \overset{2,2}{\wedge} (M_{2m-1} Y M_{2m}) \,.$$

Projicirt man die auf einem Kegelschnitte ω liegende zweizweideutige symmetrisch projective Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\sim} (B)$ von einem Paare XY derselben aus und erzeugt durch die Schnittpunkte der Projectionsstrahlen eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ und zieht man die Geraden

$$MXM_1 \,, \quad M_1 Y M_2 \,, \quad M_2 X M_3 \,, \ \ldots \ M_{2m-2} X M_{2m-1} \,, \quad M_{2m-1} Y M_{2m} \,,$$

wo die Punkte M auf $C^{(3)}$ liegen, und bestimmen diese Strahlen auf ω der Reihe nach die Punkte

$$A B_1 B_2 \ldots B_{2m-1} \,,$$

so dass AB_1, B_1B_2, B_2B_3, . . ., B_{2m-2} B_{2m-1} Paare der Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\sim} (B)$ bilden, deren Leitcurve $C^{(2)}$ ist, so besteht zwischen den Punkten (A) und den Punkten (B_{2m-1}) eine zweizweideutige projective symmetrische Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\sim} (B_{2m-1}) \,.$$

Wir erhalten also dadurch, dass wir eine zweizweideutige projective symmetrische Verwandtschaft eine gerade Anzahl mal mit sich selbst zusammensetzen, wiederum eine zweizweideutige symmetrische projective Verwandtschaft.

Dass der Satz auch für eine ungerade Anzahl von Zusammensetzungen gilt, kann ebenso gefolgert werden, wenn man die Bemerkung des vorigen Paragraphen heranzieht, dass zwei Punkte R zusammenfallen können. Wir können aber auch die folgende Schlussweise dazu anwenden.

Dass der Satz für einmalige Zusammensetzung der Verwandtschaft mit sich selbst gilt, ist bekannt (Th. § 23).

Zieht man die Geraden AB_1 B_1B_2 B_2B_3 . . . B_{2m-2} B_{2m-1}, bildet also die Directionsbüschel der Verwandtschaften

$$(A) \overset{2,2}{\sim} (B_1) \quad (B_1) \overset{2,2}{\sim} (B_2) \; . \; . \; . \; (B_{2m-2}) \overset{2,2}{\sim} (B_{2m-1}) \;,$$

so stützen sich diese Geraden, wenn man A bewegt, fortwährend auf einen Kegelschnitt π, und da $(A) \overset{2,2}{\sim} (B_{2m-1})$ ist, so berührt auch die Gerade (AB_{2m-1}) fortwährend einen Kegelschnitt π', der zum Büschel (ω, π) gehört, weil die Verzweigungsstellen der Verwandtschaft (A, B_{2m-1}) mit denen der Verwandtschaft $(A; B)$ zusammenfallen. Haben wir also ein Polygon mit gerader Seitenzahl, und liegen seine Ecken auf einem Kegelschnitt ω, und berühren seine Seiten bis auf eine einen Kegelschnitt π, so berührt diese letzte Seite fortwährend einen Kegelschnitt π' des Büschels (ω, π), wenn das Polygon unter Erhaltung der angegebenen Eigenschaften gedreht wird.

Haben wir ein Polygon mit ungerader Seitenzahl $AB_1, B_1B_2, \ldots$ B_{2m-3} B_{2m-2}, B_{2m-2} A, so dass $2m - 1$ die Seitenzahl ist, so ziehen wir die Geraden AB_2, B_2B_4, . . . B_{2m-4} B_{2m-2}, B_{2m-2} A, sie bilden ein Polygon mit m Seiten, dessen $m - 1$ erste Seiten einen und denselben Kegelschnitt des Büschels (ω, π) berühren, und es berührt mithin, wenn m gerade ist, B_{2m-2} A fortwährend einen und denselben Kegelschnitt π' des Büschels (ω, π). Ist m noch nicht gerade, so wiederholt man dasselbe Verfahren für

das eben abgeleitete Polygon und fährt so fort, bis man zu einem Polygon mit gerader Seitenzahl gelangt, oder zum Dreieck, für welches der Satz (Th. § 23) bekannt ist. So erhält man die Allgemeingültigkeit des noch einmal auszusprechenden Satzes:

Zieht man von einem Punkte A eines Kegelschnittes ω *eine Tangente an einen Kegelschnitt* π, *die* ω *noch in* B_1 *trifft, zieht man von* B_1 *eine weitere Tangente an* π, *die* ω *noch in* B_2 *trifft u. s. w., vom Punkte* B_{n-1} *eine Tangente an* π, *die* ω *noch in* B_n *trifft, so berührt, wenn A auf* ω *bewegt wird, die Gerade* AB_n *fortwährend einen Kegelschnitt* π' *des Büschels* (ω, π), *was auch n für eine ganze Zahl sein mag.*

Daraus folgt ohne Weiteres:

Die sämmtlichen Diagonalen eines Poncelet'schen Polygons berühren feste Kegelschnitte eines und desselben Büschels, wenn das Polygon seinen charakteristischen Bedingungen gemäss gedreht wird.

Durch beliebig vielmalige Zusammensetzung einer zweizweideutigen symmetrischen projectiven Verwandtschaft mit sich selbst erhält man eine ebensolche Verwandtschaft mit demselben charakteristischen Wurfe.

§ 7. *Der allgemeinste Poncelet'sche Satz.* Damit ist im Grunde der allgemeinste Poncelet'sche Satz erweisbar, welcher so lautet:

Liegen die Ecken eines Dreiecks auf einem Kegelschnitte ω, *und berühren seine Seiten drei Kegelschnitte eines und desselben* ω *enthaltenden Büschels, so lässt sich dieses Dreieck unter Erhaltung dieser Eigenschaften drehen*[1]).

Die Beweismittel, die wir zur Erhärtung dieses Satzes hier benutzen, sind allerdings qualitativ von den bisher verwendeten verschieden, wie man bemerken wird, ich möchte daher den folgenden Beweis nicht als den letzten ansehen, glaube aber, dass er als genügend wird anerkannt werden müssen. Der principielle Unterschied zwischen diesem und den früheren Sätzen liegt darin, dass jetzt zwei *verschiedene* symmetrische zweizweideutige projective Verwandtschaften zusammenzusetzen sind, allerdings von gleichem charakteristischen Wurfe. Das Resultat der Zusammensetzung ist nicht mehr zweizweideutig, sondern

1) So etwa pflegt der Satz ausgesprochen zu werden, im Grunde nicht ganz präcis. Denn von den Dreiecksseiten berührt jede *zwei* Kegelschnitte des Büschels (ω, π). Der Satz gilt aber nur für ganz bestimmte Tripel der sechs berührten Kegelschnitte.

viervierdeutig, und es ist der Nachweis zu erbringen, dass die viervierdeutige Verwandtschaft in zwei projective zweizweideutige Verwandtschaften zerfällt.

Um die Vorstellung an ein bestimmteres Bild zu heften, machen wir folgende Annahmen. Die Ecken des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ sollen auf einem Kegelschnitt ω liegen, die Geraden $A_2 A_3 \equiv a_1$, $A_3 A_1 \equiv a_2$, $A_1 A_2 \equiv a_3$ sollen bez. die Kegelschnitte $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ eines Büschels (ω, π) berühren, der vier *ideale* Grundpunkte hat, und $\pi_1 \pi_2 \pi_3$ sollen im Innern von ω verlaufen.

Lassen sich die Geraden $a_1 a_2 a_3$ als die Diagonalen eines Poncelet'schen Polygons ansehen, so ist der Satz erwiesen, er besteht also in unendlich vielen Fällen zu Recht. Auch besteht er (Th. § 25), wenn eine der Geraden durch den im Innern von ω liegenden Grenzpunkt des Büschels (ω, π) geht.

Es ist evident, dass wir die Gerade $a_3 \equiv A_1 A_2$ als letzte Seite eines Polygons mit beliebig vielen Seiten $A_1 B_1 B_2 \dots B_{n-1} A_2$ ansehen dürfen, dessen $n - 1$ erste Seiten alle einen und denselben Kegelschnitt π des Büschels (ω, π) berühren. Wir können zu einem solchen Polygon dadurch gelangen, dass wir zwischen $A_1 A_2$ die Quasimitte nehmen, und zwar da es mehrere Quasimitten giebt, diejenige, die vom Punkt A_3 durch $A_1 A_2$ getrennt ist. Zu dieser Quasimitte und zu A_1 sowohl als auch zu A_2 bestimmen wir wieder die Quasimitte und erhalten so zwischen $A_1 A_2$ drei Theilpunkte. So fahren wir fort und schalten auf diese Weise zwischen $A_1 A_2$ beliebig viele Punkte $B_1 B_2 \dots B_{n-1}$ derart ein, dass alle Geraden $A_1 B_1, B_1 B_2, \dots B_{n-1} A_2$ denselben Kegelschnitt π des Büschels (ω, π) berühren. Dann setzen wir das Polygon $A_1 B_1, B_1 B_2, \dots B_{n-1} A_2$ dadurch fort, dass wir wieder von A_2 eine Tangente an π ziehen, die ω in B_{n+1} trifft, von da wieder eine Tangente, die ω in B_{n+2} trifft u. s. w., so wird der Punkt A_3 entweder auf eine Ecke B_q oder zwischen zwei aufeinander folgende Ecken etwa zwischen B_q und B_{q+1} dieses Polygons fallen. Die Geraden $A_1 B_q$, $A_1 B_{q+1}$ berühren fortwährend, wenn das Polygon gedreht wird, bez. die Kegelschnitte $\pi_q \pi_{q+1}$ des Büschels (ω, π), und $A_1 A_3$ geht durch den Schnittpunkt dieser beiden Geraden, und durch einen Punkt zwischen B_q und B_{q+1} auf ω, eben den Punkt A_3. Die Poncelet'sche Construction des Kegelschnittes π_2 des Büschels (ω, π), den die Gerade $A_1 A_3$ berührt, wenn die Kegelschnitte π_1 π_3 die a_1 und a_3 berühren, gegeben sind, habe ich in meinem Buche, »Die

Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung (Halle 1892)« auf Seite 178 in rein projectiver Methode verificirt. Es geht daraus hervor, dass dieser Kegelschnitt mit stetiger Aenderung von $A_1 A_3$ sich stetig ändert. Dreht man nun die Figur $A_1 A_2 A_3$ sammt dem Polygon $A B_1 B_2 \ldots B_{q+1} \ldots$ mit Erhaltung ihrer Eigenschaften in Bezug auf $\omega \pi \pi_1 \pi_3$, so könnte sich π_2 noch ändern, und etwa für das Dreieck $A_1' A_2' A_3'$ der Kegelschnitt π_2', für das Dreieck $A_1'' A_2'' A_3''$ der Kegelschnitt π_2'' sein, es muss aber, wenn das Dreieck aus der Lage $A_1' A_2' A_3'$ in die Lage $A_1'' A_2'' A_3''$ stetig übergeführt wird, $a_2 \equiv A_1 A_3$ jeden Kegelschnitt π_2 zwischen π_2'' und π_3'' mindestens einmal berühren. Nun lässt sich aber die Zahl n so gross annehmen, dass die Geraden $A_1 B_q$, $A_1 B_{q+1}$ einen zwischen π_2' und π_2'' liegenden Kegelschnitt berühren. Es muss mithin einmal $A_1 A_3$ mit $A_1 B_q$ zusammenfallen, und folglich nach den eben bewiesenen Sätzen immer mit $A_2 B_q$ zusammenfallen. Daraus folgt, dass die Gerade $A_1 A_3$ bei ihrer Bewegung nicht verschiedene im Innern von ω verlaufende Kegelschnitte berühren kann, sondern immer denselben Kegelschnitt π_2 des Büschels (ω, π) berühren muss, w. z. b. w.

Vom Punkte A_2 lassen sich zwei Tangenten an π_2 ziehen. Der Satz gilt für beide so entstehenden Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, und für die zweizweideutigen symmetrischen Verwandtschaften ergiebt sich der Satz:

Sind

$$(A_1) \overset{2,2}{\sim} (A_2) \quad (A_2) \overset{2,2}{\sim} (A_3)$$

zwei projective symmetrische zweizweideutige Verwandtschaften mit demselben charakteristischen Wurfe, und setzt man die Verwandtschaften dadurch mit einander zusammen, dass man A_1 erst A_2 dann durch dieses Punktes Vermittelung A_3 zuweist, so erhält man eine viervierdeutige Verwandtschaft

$$(A_1) \overset{4,4}{\overline{\wedge}} (A_3)$$

die in zwei symmetrische zweizweideutige projective Verwandtschaften, etwa in

$$(A_1) \sim (A_3') \quad (A_1) \overset{2,2}{\sim} (A_3'')$$

zerfällt.

Sind $(A) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B)$ $(B) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (C)$ zwei projective zweizweideutige Verwandtschaften mit demselben charakteristischen Wurfe, so

kann man dieselben mit zwei andern (Th. § 15) symmetrischen Verwandtschaften durch Beziehungen von der Form

$$(A)\,\overline{\wedge}\,(A') \quad (C)\,\overline{\wedge}\,(C')$$

so in Correspondenz setzen, dass

$$(A')\overset{2,2}{\sim}(B) \quad (B)\overset{2,2}{\sim}(C')$$

wird. Setzt man die Verwandtschaften $(A;B)$ $(B;C)$ und zugleich die Verwandtschaften $(A';B)$ $(B;C')$ in der oben beschriebenen Weise zusammen, so erhält man zwei viervierdeutige Verwandtschaften

$$(A)\overset{4,4}{\overline{\wedge}}(C) \quad (A')\overset{4,4}{\overline{\wedge}}(C')$$

und es ist $(A)\,\overline{\wedge}\,(A')$ $(C)\,\overline{\wedge}\,(C')$. Da nun die Verwandtschaft $(A')\overset{4,4}{\overline{\wedge}}(B')$ in zwei projective zweizweideutige Verwandtschaften zerfällt, so muss auch die Verwandtschaft $(A;C)$ in zwei projective zweizweideutige Verwandtschaften zerfallen. — Der algebraische Nachweis dieses Satzes, wenn man nicht doppeltperiodische Functionen heranziehen will, ist vielleicht nicht ganz einfach.

Ich habe (Th. § 26) eine Curve achter Ordnung mit zwei vierfachen und acht einfachen Doppelpunkten dadurch construirt, dass ich zwei projective zweizweideutige Verwandtschaften mit denselben Verzweigungselementen in der Reihe (B), die Verwandtschaften

$$(A)\overset{2,2}{\overline{\wedge}}(B) \quad (B)\overset{2,2}{\overline{\wedge}}(C)$$

zusammensetzte und von zwei Punkten XY des Kegelschnittes, auf dem diese Verwandtschaften liegen, oder von zwei beliebigen, wenn die Verwandtschaften auf einer Geraden liegen, die Punkte (A) und (C) projicirte und die entsprechenden Projectionsstrahlen zum Schnitt brachte. Es kann hier hinzugefügt werden, dass diese Curve achter Ordnung in zwei Curven vierter Ordnung mit den Doppelpunkten XY zerfällt.

Hieran schliesse ich eine Betrachtung, die zwar nicht mit den Poncelet'schen Sätzen in unmittelbarem Zusammenhange steht, wohl aber mit den zweizweideutigen Verwandtschaften.

§ 8. *Erzeugung zweizweideutiger Verwandtschaften durch projective Projectivitätenreihen.* Auf einem Kegelschnitte γ oder einer Geraden g sei die Punktreihe $G G_1 G_2 \ldots$ der Reihe $A A_1 A_2 \ldots$ projectiv zugeordnet, und es werde diese Zuordnung als Projectivität (G, A) bezeichnet. Ferner werden die Projectivitäten

$$\Phi \Psi A B C \ldots \barwedge \Phi \Psi A_1 B_1 C_1 \ldots \barwedge \Phi \Psi A_2 B_2 C_2 \ldots \barwedge \ldots$$

gebildet, so kann man sagen, es sei die Punktreihe $G G_1 G_2 \ldots$ einer Reihe von Projectivitäten projectiv zugeordnet, wobei die Projectivitäten der Reihe zwei allen gemeinsame entsprechende Elemente $\Phi \Psi$ haben.

Ordnen wir ebenso die Punktreihe $G G_1 G_2 \ldots$ der Projectivitätenreihe

$$\Phi' \Psi' A' B' C' \ldots \barwedge \Phi' \Psi' A_1' B_1' C_1' \ldots \barwedge \Phi' \Psi' A_2' B_2' C_2' \ldots \barwedge \ldots$$

zu, so dass $G G_1 G_2 \ldots \barwedge A' A_1' A_2' \ldots$ ist, so werden dadurch zwei Projectivitätenreihen mit je zwei allen gemeinsamen entsprechenden Elementen einander, wie wir sagen wollen, projectiv zugeordnet.

Zwei Projectivitätenreihen[1])

---

1) Algebraisch wird diese Beziehung so festgelegt. Es sei $f(A, G)$ eine bilineare Gleichung, der $A G, A_1 G_1, A_2 G_2, \ldots$ genügen, und die Gleichungen

$$\frac{\Phi - A}{A - \Psi} \frac{S - \Psi}{\Phi - S} = \frac{\Phi - A_1}{A_1 - \Psi} \frac{S_1 - \Psi}{\Phi - S_1} = \frac{\Phi - A_2}{A_2 - \Psi} \frac{S_2 - \Psi}{\Phi - S_2} = \ldots$$

mögen durch die Reihen $S = A B C \ldots$, $S_1 = A_1 B_1 C_1 \ldots$, $S_2 = A_2 B_2 C_2 \ldots$ befriedigt werden. Ersetzt man die A mittels der Gleichung $f(A, G) = 0$ durch die G, so erhält man eine Reihe von Projectivitäten, die bez. $G G_1' G_2 \ldots$ als lineare Parameter enthalten und $\Phi \Psi$ als allen gemeinsame Elemente. Diese Projectivitäten sind den Elementen G projectiv zugeordnet. Die Gleichung

$$\frac{\Phi - A}{A - \Psi} \frac{S - \Psi}{\Phi - S} = \frac{\Phi - A_1}{A_1 - \Psi} \frac{S_1 - \Psi}{\Phi - S_1}$$

kann mit Unterdrückung des Factors $\Phi - \Psi$ geschrieben werden

$$\Phi \Psi (A - A_1 + S_1 - S) + (\Phi + \Psi)(S A_1 - A S_1) + A A_1 (S_1 - S) + S S_1 (A - A_1) = 0 .$$

Ersetzt man darin $A_1 S_1$ bez. durch $A_2 S_2$ und $A_\lambda S_\lambda$, so erhält man drei Gleichungen, aus denen Φ, Ψ, $\Phi + \Psi$ eliminirt werden können. Die Resultante ist

$$(\Phi\Psi ABC\,.\,.\barwedge \Phi\Psi A_1B_1C_1\,.\,.\barwedge \Phi\Psi A_2B_2C_2\,.\,.\barwedge\,.\,.)$$
$$\barwedge (\Phi'\Psi'A'B'C\barwedge \Phi'\Psi'A_1'B_1'C_1'\,.\,.\barwedge \Phi'\Psi'A_2'B_2'C_2'\,.\,.\barwedge\,.\,.)$$

sind also einander projectiv zugeordnet, wenn $AA_1A_2\ldots \barwedge A'A_1'A_2'\ldots$ ist. Sind die beiden Reihen $GG_1G_2\ldots$ projectiv, so kann $GG_1G_2\ldots$ die Leitreihe genannt werden, und es sind ihr auch die Reihen $BB_1B_2\ldots$, $CC_1C_2\ldots$, $B'B_1'B_2'\ldots$, $C'C_1'C_2'\ldots, \ldots$ projectiv zugeordnet, wie in meinen »Kegelschnitten in projectiver Behandlung« auf Seite 30 erwiesen ist.

Nimmt man $ABCD\ldots$ als willkürlich gegeben an, so kann man $A'B'C'$ noch willkürlich wählen und dadurch eine Projectivität

$$ABCD\,.\,.\barwedge A'B'C'D'\,.\,.$$

bestimmen. Es ist dann auch

$$A_1B_1C_1D_1\,.\,.\barwedge A_1'B_1'C_1'D_1'\,.\,.$$
$$A_2B_2C_2D_2\,.\,.\barwedge A_2'B_2'C_2'D_2'\,.\,.$$

u. s. w.

Projiciren wir die Reihe $GG_1G_2\ldots$ von einem Punkte X des Kegelschnittes γ, die Reihen $\Phi\Psi AA_1A_2\ldots$, $\Phi\Psi BB_1B_2\,.\,.,\,.$ von einem Punkte Y auf γ (XY sind frei, wenn für γ eine Gerade eintritt), so erzeugen wir dadurch einen Kegelschnittbüschel ($\varkappa$) durch XY und zwei andere feste Punkte UV, die Schnittpunkte der Strahlen $XG_\varphi\, XG_\psi$ mit $Y\Phi$ bez. $Y\Psi$, wenn $G_\varphi G_\psi$ die Punkte sind, denen die Punkte $\Phi\Psi$ der Reihen $AA_1A_2\ldots$, $BB_1B_2\ldots$ entsprechen. Es mögen die Strahlenbüschel $(XG)\barwedge(YA)$ den Kegelschnitt $\varkappa_a$, $(XG)\barwedge(YB)$ den Kegelschnitt $\varkappa_b$ u. s. w. erzeugen.

Auf der Geraden XG bestimmen die Strahlen YA, YB, $YC,\ldots$ eine Punktreihe, die den Kegelschnitten ($\varkappa$) projectiv ist, auf XG_1

$$\begin{vmatrix} A-A_1+S_1-S & A-A_2+S_2-S & A-A_\lambda+S_\lambda-S \\ SA_1-AS_1 & SA_2-AS_2 & SA_\lambda-AS_\lambda \\ AA_1(S_1-S)+SS_1(A-A_1) & . & . \end{vmatrix} = 0.$$

Diese hat den Factor $(S-A)^2$ und lässt sich mit Unterdrückung desselben auf die Form bringen

$$\begin{vmatrix} S-S_1 & S-S_2 & S-S_\lambda \\ A-A_1 & A-A_2 & A-A_\lambda \\ (A-A_1)S_1 & (A-A_2)S_2 & (A-A_\lambda)S_\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

hieraus folgt die Gleichheit der Doppelverhältnisse $(AA_1A_2A_\lambda)=(SS_1S_2S_\lambda)$ und es sind mithin die S den A projectiv zugeordnet, was sich geometrisch viel einfacher erweist.

bestimmen die Strahlen YA_1, YB_1, YC_1, ... eine Reihe, die (x) ebenfalls projectiv ist, und da die Reihen auf XG, XG_1 einander perspectiv liegen, so erfolgt, wie es unsere Voraussetzung will,

$$\Phi\Psi ABC \ldots \barwedge \Phi\Psi A_1B_1C_1 \ldots \barwedge \Phi\Psi A_2B_2C_2 \ldots \barwedge \ldots \quad .$$

Projiciren wir von X aus die Reihen $GG_1G_2\ldots$, von Y aus die Reihen $A'A_1'A_2'\ldots$, $B'B_1'B_2'\ldots,\ldots$, so erhalten wir einen zweiten Kegelschnittbüschel (x') mit vier festen Grundpunkten $XYU'V'$, wo $U'V'$ auf $Y\Phi'$, $Y\Psi'$ liegen. Wie vorhin ist auch hier

$$\Phi'\Psi'A'B'C' \ldots \barwedge \Phi'\Psi'A_1'B_1'C_1' \ldots \barwedge \Phi'\Psi'A_2'B_2'C_2' \ldots \barwedge \ldots,$$

und wir haben so zwei projectiv aufeinander bezogene Projectivitätenreihen, deren Leitreihe $GG_1G_2\ldots$ ist, nämlich

$$(\Phi\Psi ABC \ldots \barwedge \Phi\Psi A_1B_1C_1 \ldots \barwedge \Phi\Psi A_2B_2C_2 \ldots \barwedge \ldots)$$
$$\barwedge (\Phi'\Psi'A'B'C' \ldots \barwedge \Phi'\Psi'A_1'B_1'C_1' \ldots \barwedge \Phi'\Psi'A_2'B_2'C_2' \ldots \barwedge \ldots).$$

Man kann nun noch die Reihen $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$, oder was dasselbe ist, die Kegelschnittbüschel (x) (x') einander projectiv zuordnen, und es ist dann auch

$$A_1B_1C_1 \ldots \barwedge A_1'B_1'C_1' \ldots \barwedge A_2B_2C_2 \ldots \barwedge A_2'B_2'C_2' \ldots$$

u. s. w., weil die linken Seiten (x), die rechten (x') projectiv zugeordnet sind. Bestimmen wir nun in den Projectivitäten

$$ABC \ldots \barwedge A'B'C' \ldots, \quad A_1B_1C_1 \ldots \barwedge A_1'B_1'C_1' \ldots, \ldots$$

die Doppelpunkte LL', L_1L_1', L_2L_2', .. so ist

$$(G) \overset{2,2}{\barwedge} (L)$$

zugeordnet. Die Büschel (x) (x') erzeugen nämlich eine Curve $M^{(4)}$ mit den Doppelpunkten XY. Auf einem Strahle XG bestimmen die Kegelschnittbüschel (x) (x') zwei einander projective Punktreihen, deren Doppelpunkte die Punkte von $M^{(4)}$ auf XG sind. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit Y treffen γ (bez. g) in Punkten, die (G) zweizweideutig zugeordnet sind. Diese Treffpunkte sind aber offenbar die Doppelpunkte der Verwandtschaften $ABC \ldots \barwedge A'B'C' \ldots$, $A_1B_1C_1 \ldots \barwedge A_1'B_1'C_1' \ldots$, u. s. w.

§ 9. *Doppelte Erzeugung einer Curve achter Ordnung mit zwei vierfachen und vier einfachen Doppelpunkten.* Es seien M_λ und $\mathfrak{M}_\lambda$ Curven vierter Ordnung (mit den Doppelpunkten XY, sie

mögen die Punkte UV, $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ mit einander gemein haben, die zu XY und einem Kegelschnitt γ paarweise symmetrisch liegen, und M_λ $\mathfrak{M}_\lambda$ seien selbst für $XY\gamma$ symmetrische Curven. Die Curve M_λ gehe noch durch die symmetrisch liegenden Punktpaare $U'V'$, $U''V''$ und werde durch die Kegelschnittbüschel $(K) \,\overline{\wedge}\, (K')_\lambda$ erzeugt, wo die (K) durch die Punkte $XYUV$, die $(K')_\lambda$ durch die Punkte $XYU'V'$ gehen. Der zweite Kegelschnittbüschel werde dem ersten so projectiv zugeordnet, dass die beiden Kegelschnittpaare sich entsprechen, die durch die Punkte $U''V''$ und $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ gehen, und dass einem festgewählten Kegelschnitt K^* der Reihe (K) ein willkürlich gewählter Kegelschnitt K_λ' der Reihe $(K')_\lambda$ entspricht. Indem man nach und nach für K_λ' jeden durch $XYU'V'$ gehenden Kegelschnitt wählt, erhält man einen Büschel symmetrischer Curven (M_λ) durch acht feste Punkte $UVU'V'$ $U''V''\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ und die Doppelpunkte XY, von denen wir sagen, dass sie (K_λ') projectiv zugeordnet seien.

In ähnlicher Weise erzeugen wir den Curvenbüschel $(\mathfrak{M}_\lambda)$ mit den Grundpunkten UV, $\mathfrak{U}\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{U}''\mathfrak{V}''$ und den Doppelpunkten XY durch Kegelschnittbüschel $(\mathfrak{K}')$ durch $XY\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'$ und $(\mathfrak{K})_\lambda$ durch $XY\mathfrak{U}\mathfrak{V}$, und $(\mathfrak{M}_\lambda)$ sei den Kegelschnitten $(\mathfrak{K}_\lambda)$ projectiv zugeordnet. Wird nun noch (K_λ') zu $(\mathfrak{K}_\lambda)$ in projective Beziehung gesetzt, so erhalten wir zwei Büschel symmetrischer Curven vierter Ordnung, von denen wir sagen, dass sie einander projectiv zugeordnet seien. Sie erzeugen durch ihre Schnittpunkte eine Curve achter Ordnung $C^{(8)}$, die zwei vierfache Doppelpunkte in XY und vier einfache Doppelpunkte in $UV\mathfrak{U}\mathfrak{V}$ hat, und die zu $XY\gamma$ symmetrisch liegt.

Greifen wir einen Kegelschnitt, etwa K^* aus der Reihe der (K) heraus, so wird er von den Curven (M_λ) neben den Punkten $XYUV$ noch in Punktpaaren einer Involution J_λ getroffen, denn alle K^* entsprechenden Kegelschnitte (K_λ') liegen in einem Büschel, der zwei seiner Grundpunkte auf K^* hat. Die Involution J_λ ist (K_λ') und also (M_λ) projectiv zugeordnet. Ersetzen wir K^* durch einen andern Kegelschnitt durch $XYUV$, so ist die durch (M_λ) auf ihm bestimmte Involution der Leitreihe (K_λ') projectiv. Da $(\mathfrak{M}_\lambda)$ ebenfalls Curven durch $XYUV$ sind, so erzeugen die Curven $(\mathfrak{M}_\lambda)$ auf K^* ebenfalls eine Involution $\mathfrak{J}_\lambda$, die $(\mathfrak{M}_\lambda)$ projectiv ist, und daraus folgt $J_\lambda \,\overline{\wedge}\, \mathfrak{J}_\lambda$. Die beiden projectiven Involutionen J_λ und $\mathfrak{J}_\lambda$ haben vier Elemente entsprechend gemein, die in zwei Paare symmetrischer zerfallen, weil die Involutions-

paare symmetrisch liegen. Die beiden sich selbst entsprechenden Paare dieser Involutionen bestimmen im Büschel ($\mathfrak{K}$) die beiden Kegelschnitte, die K^* in Punkten der Curve achter Ordnung $C^{(8)}$ treffen, die durch $(M_\lambda) \barwedge (\mathfrak{M}_\lambda)$ erzeugt wird. Zu einem Kegelschnitte K (mit Fortlassung des Sternchens) gehören daher zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und umgekehrt, zu einem $\mathfrak{K}$ gehören zwei K, wenn sich diese Kegelschnitte in Punkten der Curve $C^{(8)}$ schneiden sollen. Es findet zwischen den $C^{(8)}$ erzeugenden Kegelschnitten eine zweizweideutige Verwandtschaft statt, es erübrigt nur noch nachzuweisen, dass die Verwandtschaft in dem von mir aufgestellten Sinne (Th. § 8) eine projective ist.

Die beiden Involutionen J_λ und $\mathfrak{J}_\lambda$ auf K haben dasselbe Involutionscentrum C, den Pol der Geraden XY für γ, oder wenn für γ eine Gerade eintritt, den Punkt, der vom Schnittpunkte der Geraden g mit (XY) durch XY harmonisch getrennt ist, und es bleibt C ungeändert, wenn K sich ändert. Die Involutionen J_λ und $\mathfrak{J}_\lambda$ bestimmen in C zwei projective Strahlenbüschel

$$a\,b\,c\,d\,.. \barwedge \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,..$$

die auch (M_λ) und $(\mathfrak{M}_\lambda)$ projectiv sind. Die Doppelelemente dieser projectiven Strahlenreihen bestimmen die sich selbst entsprechenden Elemente der Involutionen und somit die zu K gehörenden beiden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$.

Geht K in $K_1\,K_2\,K_3$ ... über, so erhält man in C eine Reihe von Projectivitäten

$$(a) \barwedge (\mathfrak{a})\,, \quad (a_1) \barwedge (\mathfrak{a}_1)\,, \quad (a_2) \barwedge (\mathfrak{a}_2)\,, ..$$

mit zwei allen gemeinsamen Elementen. Der Kegelschnitt $U'\,V'XY\,U\,V$ nämlich als Kegelschnitt des Büschels $(K')_\lambda$ bestimmt, was auch K sein mag, stets denselben Strahl, die Gerade $\varphi \equiv U\,V$, und der Kegelschnitt $(U'\,V').(XY)$ bestimmt stets denselben Strahl, nämlich den Strahl $\psi \equiv U'\,V'$, und diese Kegelschnitte sind in allen Büscheln $(K')_\lambda$ enthalten. Die Strahlenreihen

$$\varphi\,\psi\,a\,b\,c\,..\,, \quad \varphi\,\psi\,a_1\,b_1\,c_1\,..\,, \quad \varphi\,\psi\,a_2\,b_2\,c_2\,..$$

sind $K_1\,K_2\,K_3$ ... also unter sich projectiv.

Ebenso sind die Reihen $\varphi'\,\psi'\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ..., $\varphi'\,\psi'\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1$ ... $\varphi'\,\psi'\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2$ ..., ... unter sich und $K_1\,K_2\,K_3$ ... projectiv. Wir haben also zwei einander projective Projectivitätenreihen

$$(\varphi\psi abc \ldots \overline{\wedge}\, \varphi\psi a_1 b_1 c_1 \ldots \overline{\wedge}\, \varphi\psi a_2 b_2 c_2 \ldots \overline{\wedge} \ldots)$$
$$\overline{\wedge}\, (\varphi'\psi' \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c} \ldots \overline{\wedge}\, \varphi'\psi' \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \ldots \overline{\wedge}\, \varphi'\psi' \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \ldots \overline{\wedge} \ldots,$$

die Doppelstrahlen ll', $l_1 l_1'$, ... der Projectivitäten

$$abcd \ldots \overline{\wedge}\, \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \ldots, \quad a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots \overline{\wedge}\, \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{d}_1 \ldots, \ldots$$

sind $K K_1 K_2 \ldots$ so zugeordnet, wie es im vorigen Paragraphen zur Erzeugung einer zweizweideutigen projectiven Verwandtschaft als nöthig erfunden wurde, und es ist also

$$(K) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (l)$$

und da $(l) \overline{\wedge} (\mathfrak{K})$ ist, so ergiebt sich, dass die durch die projectiven Curvenbüschel $(M_\lambda) \overline{\wedge} (\mathfrak{M}_\lambda)$ erzeugte Curve auch durch die Kegelschnittbüschel

$$(K) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (\mathfrak{K})$$

erzeugt wird.

SITZUNG VOM 17. JUNI 1895.

Vorträge hielten:

1. Herr **F. Stohmann**, o. M., über den Wärmewerth der Hippursäure, ihrer Homologen und der Anisursäure.
2. Herr **S. Lie**, o. M.: Ueber seine aus dem Jahre 1874 herrührende Integrationstheorie.
3. Herr **H. Bruns**, o. M., reichte die in der vorigen Sitzung angekündigte Abhandlung von F. Hausdorff »über die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre« zum Druck ein.

F. Stohmann, *Calorimetrische Untersuchungen.* Fünfunddreissigste Abhandlung.

Ueber den Wärmewerth der Hippursäure, ihrer Homologen und der Anisursäure,

von F. Stohmann und Raymund Schmidt.

Die vorliegende Arbeit reiht sich an die in Abhandlung XXXI[1]) behandelten Aminsäuren. Ebenso wie sich das Glycocoll, Amidoessigsäure oder Glycolaminsäure von Ammoniak und Essigsäure ableiten lässt, indem Ammoniak und Essigsäure sich unter Austritt von zwei Wasserstoffatomen zu Glycocoll verbinden:

$$NH_3 + C_2H_4O_2 = N{<}^{H_2}_{CH_2\,.\,COOH} + H_2,$$

so ist die Hippursäure auf gleiche Weise vom Benzamid $C_6H_5.CO.NH_2$ abzuleiten:

$$C_6H_5.CO.NH_2 + C_2H_4O_2 = C_6H_5.CO.N{<}^{H}_{CH_2\,.\,COOH} + H_2.$$

Oder was dasselbe ist: Hippursäure kann als ein Benzamid betrachtet werden, in welchem ein an Stickstoff gebundenes Wasserstoffatom durch die einwerthige Atomgruppe $-CH_2.COOH$ ersetzt ist. Da der thermische Werth dieser Reaction aus

1) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1894, S. 49; Journ. prakt. Chem. [2] **49**, 483.

Früherem bekannt ist und im Mittel 162,7 Cal. beträgt, so lässt sich der Wärmewerth der Hippursäure im Voraus berechnen.

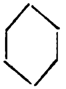
An die Hippursäure $C_9H_9NO_3$ schliessen sich die ihr homologen Tolursäuren $C_{10}H_{11}NO_3$ und eine Reihe von Isomeren dieser Säuren, welche von Kraut dargestellt worden sind, deren Beschreibung von ihrem Entdecker demnächst zu erwarten ist, sowie weitere Homologe von der Zusammensetzung $C_{11}H_{13}NO_3$.

Das ganze Material zu dieser Untersuchung ist uns von Herrn Prof. Kraut geliefert worden, dem unser wärmster Dank für die Ueberlassung seiner schönen Präparate gesagt sei.

Alle Ermittelungen der Wärmewerthe sind, wie immer, in auf 25 Atm. verdichtetem Sauerstoff, durch Verbrennung meist im Berthelot'schen, einzeln im Mahler'schen Apparate ausgeführt. Die völlige Uebereinstimmung der mit den beiden Apparaten erzielten Resultate ist ein neuer Beweis für die Gleichwerthigkeit beider.

I. Hippursäure,

$C_9H_9NO_3$. $CO.N{<}^{H}_{CH_2.COOH}$ . . . . . 179.



Der Wärmewerth der Hippursäure ist von uns bereits früher (Abhdlg. XXV)[1]) und zwar zu 1014,5 Cal. ermittelt worden, während Berthelot und André dafür 1012,9 Cal. gefunden hatten. Die fast völlige Uebereinstimmung beider Zahlen liess die eine wie die andere als richtig betrachten. Die Berechnung des Wärmewerthes rief jedoch die Vermuthung hervor, der früher von uns gefundene Werth könne um ein weniges zu hoch sein. Um jeden Zweifel hierüber zu beseitigen, wurde eine ganze Reihe von neuen Bestimmungen vorgenommen.

Nach der oben angeführten Weise der Rechnung ergiebt sich der Wärmewerth der Hippursäure folgendermassen:

Benzamid, gefunden[2])	847,8 Cal.
Constante für $-H + CH_2.COOH$	162,7 »
	1010,5 Cal.

während, wie erwähnt, früher für Hippursäure 1014,5 Cal. ge-

1) Journ. prakt. Chemie [2] 44, 385.
2) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1895 S. 13.

funden wurde. Ist die Differenz von 1 Cal. zwischen Rechnung und Befund auch nicht gross, so lag uns doch daran zu ermitteln, ob diese Differenz auf einen kleinen Fehler der angenommenen Constante, die ein Mittelwerth aus verschiedenen Beobachtungen ist, oder auf eine nicht völlig richtige Beobachtung zurückzuführen ist. Es wurden daher folgende neun Bestimmungen vorgenommen, zu denen für 1 bis 5 der Mahler'sche, dagegen für 6 bis 9 der Berthelot'sche Apparat verwandt wurde. Die angewandte Hippursäure war von uns selbst aus Ziegenharn dargestellt und durch vielfache Krystallisationen, unter Zuhilfenahme von aschenfreier Blutkohle, gereinigt worden, bis sie absolut farblos und geruchlos war.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz						
	Hippursäure Grm.	Zusätze Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0404	—	17,8035	15,6964	2,1071	2804,6	5909,6
2.	1,0146	—	17,8007	15,7458	2,0549	2804,6	5763,2
3.	1,0175	—	17,9462	15,8869	2,0593	2804,6	5775,5
4.	1,1394	—	18,3239	16,0184	2,3055	2804,6	6466,0
5.	1,1531	—	17,9247	15,5906	2,3341	2804,6	6546,2
6.	1,0268	—	17,9494	15,6235	2,3259	2507,6	5832,4
		Collodium					
7.	0,9096	0,0009	17,7149	15,6504	2,0645	2507,6	5176,9
8.	1,0220	0,0028	17,6627	15,3441	2,3186	2507,6	5814,1
		Naphtalin					
9.	0,9925	0,0053	18,0959	15,8271	2,2688	2507,6	5689,2

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Zusätze cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	15,5	—	24,6
2.	9,1	14,0	—	23,1
3.	9,1	13,0	—	22,1
4.	9,1	7,5	—	16,6
5.	9,1	14,2	—	23,3
6.	9,1	12,5	—	21,6
7.	9,1	14,5	2,5	26,1
8.	9,1	15,7	7,8	32,6
9.	9,1	15,6	51,0	75,7

Wärmewerth

	der Hippursäure cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5885,0	5656,5	1012,5	99,97
2.	5740,1	5657,5	1012,7	99,99
3.	5753,4	5654,5	1012,2	99,94
4.	6449,4	5660,4	1013,2	100,05
5.	6522,9	5656,9	1012,6	99,98
6.	5810,8	5659,1	1013,0	100,02
7.	5150,8	5662,8	1013,8	100,09
8.	5781,5	5657,0	1012,6	99,99
9.	5613,5	5655,9	1012,4	99,97
	Mittel	5657,8	1012,7	für constant. Volum
			1012,6	» » Druck
			143,9	Bildungswärme.

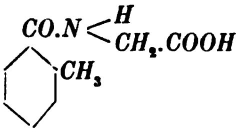
Nach Obigem haben wir:

Hippursäure berechnet . . . . . 1010,4 Cal.

» gefunden . . . . . . 1012,6 »

II. Isomere Säuren von der Zusammensetzung $C_{10}H_{11}NO_3$ . . 193.

1. Ortho-Tolursäure,



Auf gleiche Weise wie sich Hippursäure vom Benzamid ableitet, so entsteht die Tolursäure durch Eintritt der Atomgruppe $-CH_2.COOH$, an Stelle eines an Stickstoff gebundenen Wasserstoffatomes, in das Amid der Ortho-Toluylsäure.

Der Wärmewerth des Amides dieser Säure ist nicht direct ermittelt. Derselbe ist aber durch Rechnung zu finden, da der Wärmewerth der Amide der einbasischen Säuren nach Abhandlung XXXIV[1]) um 75,9 Cal. höher liegt, als der der zugehörigen Säuren. Es ist demnach:

1) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1895 S. 34.

Ortho-Toluylsäure, gefunden Abhdlg. XVIII[1]) 929,4 Cal.
Constante der Amide . . . . 75,9 »
Ortho-Toluylamid. . . . . 1005,3 »

Hierzu kommt die Constante für $-CH_2.COOH$ und liefert den Werth der Ortho-Tolursäure:

Ortho-Toluylamid . . . . 1005,3 Cal.
Constante für $-CH_2.COOH$ . . . . 162,7 »
Ortho-Tolursäure, berechnet . . . 1168,0 »

Nach folgenden Bestimmungen ist
der gefundene Werth 1168,2 Cal.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz O.-Tolursäure Grm.	Substanz Collodium Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,8833	0,0010	18,3668	16,2248	2,1420	2507,6	5371,3
2.	0,7503	0,0014	17,7493	15,9286	1,8207	2507,6	4565,6
3.	0,8992	0,0011	18,6387	16,4570	2,1817	2507,6	5470,8

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Collodium cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	15,6	2,8	27,5
2.	9,1	13,3	4,3	26,7
3.	9,1	15,2	3,1	27,4

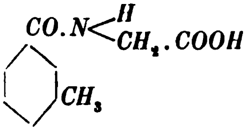
Wärmewerth

	der O.-Tolursäure. cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5343,8	6049,8	1167,6	99,98
2.	4538,9	6049,4	1167,5	99,98
3.	5443,4	6053,6	1168,3	100,04

Mittel 6050,9 1167,8 für const. Volum
1168,2 » » Druck
151,3 Bildungswärme.

1) Journ. prakt. Chem. [2] 40, 133.

2. Meta-Tolursäure,



Der Wärmewerth berechnet sich wie bei der Ortho-Tolursäure:

Metatoluylsäure, gefunden (Abhdlg. XVIII)[1]	929,1 Cal.
Constante der Amide	75,9 »
Meta-Toluylamid	1005,0 »
Constante für $-CH_2.COOH$	162,7 »
Meta-Tolursäure, berechnet	1167,7 »
» gefunden	1167,6 »

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz M.-Tolursäure. Grm.	Substanz Collodium Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,9977	0,0008	18,2889	15,8719	2,4170	2507,6	6060,9
2.	0,8567	0,0009	18,6058	16,5295	2,0763	2507,6	5206,5
3.	0,8629	0,0011	18,7758	16,6832	2,0926	2507,6	5247,4

Correctionen.

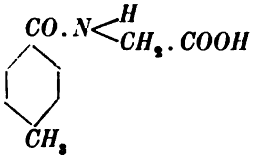
	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Collodium cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	17,5	2,2	28,8
2.	9,1	15,3	2,5	26,9
3.	9,1	13,9	3,1	26,1

Wärmewerth

	der M.-Tolursäure cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6032,1	6046,0	1166,9	99,97
2.	5179,6	6046,0	1166,9	99,97
3.	5221,3	6050,9	1167,8	100,05
	Mittel	6047,6	1167,2 für const. Volum	
			1167,6 » » Druck	
			151,9 Bildungswärme.	

1) Journ. prakt. Chem. [2] 40, 134.

3. Para-Tolursäure,



Die Berechnung ergiebt:

Para-Toluylsäure, gefunden (Abhdlg. XVIII)[1]	927,4	Cal.
Constante der Amide	75,9	»
Para-Toluylamid	1003,3	»
Constante für $-CH_2COOH$	162,7	»
Para-Tolursäure, berechnet	1166,0	»
» gefunden	1168,1	»

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz P.-Tolursäure Grm.	Substanz Collodium Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,9846	—	17,6258	15,2403	2,3855	2507,6	5981,9
2.	0,9718	0,0020	17,8794	15,5227	2,3567	2507,6	5909,7
3.	0,8688	0,0027	17,5533	15,4439	2,1094	2507,6	5289,5

Correctionen.

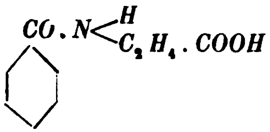
	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Collodium cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	16,3	—	25,4
2.	9,1	16,0	5,6	30,7
3.	9,1	15,5	7,6	32,2

Wärmewerth

	der P.-Tolursäure cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5956,5	6049,7	1167,6	99,99
2.	5879,0	6049,6	1167,6	99,99
3.	5257,3	6051,2	1167,9	100,02
	Mittel	6050,2	1167,7 für const. Volum	
			1168,1 » » Druck	
			151,4 Bildungswärme.	

1) Journ. prakt. Chem. [2] 40, 134.

4. Benzoyl-Alanin,



Ebenso wie Hippursäure sich von Benzamid und Essigsäure herleiten lässt, so steht das Benzoyl-Alanin in gleicher Beziehung zum Benzamid und der Propionsäure. Und da die homologen aliphatischen Säuren im festen Zustand sich um 156,6 Cal. von einander unterscheiden (Abhdlg. XXX)[1], so wird auch die Constante für $CH_2.COOH$ einen um 156,6 Cal. höheren Werth annehmen, indem sie in die Constante $C_2H_4.COOH$ übergeht. Der letztere Werth wird demnach 319,3 Cal.

Hiernach berechnet sich der Wärmewerth des Benzoyl-Alanins:

Benzamid	847,8 Cal.
Constante $C_2H_4.COOH$	319,3 »
Benzoyl-Alanin, berechnet	1167,1 Cal.
» » gefunden	1168,7 »

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Benzoyl-Alanin Grm.	Collodium Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,8721	0,0007	18,9710	16,8559	2,1151	2507,6	5303,8
2.	0,8032	0,0013	18,1439	16,1940	1,9499	2507,6	4889,6
3.	0,9199	0,0009	18,6952	16,4630	2,2322	2507,6	5597,5

Correctionen.

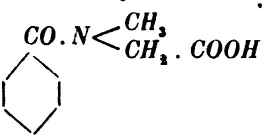
	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Collodium cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	15,5	2,0	26,6
2.	9,1	14,1	3,6	26,8
5.	9,1	16,6	2,5	28,2

1) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1893 S. 627; Journ. prakt. Chem. [2], 48, 110.

Wärmewerth

	des Benzoyl-Alanins cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5277,2	6051,1	1167,9	99,97
2.	4862,8	6054,3	1168,5	100,02
3.	5569,3	6054,2	1168,5	100,02
	Mittel	6053,2	1168,3	für const. Volum
			1168,7	» » Druck
			150,8	Bildungswärme.

5. Benzoyl-Sarkosin,



Das Benzoyl-Sarkosin ist ein Methylbenzamid, in dem ein an Stickstoff gebundenes Wasserstoffatom durch $-CH_2.COOH$ ersetzt ist. Der uns unbekannte Werth des Methylbenzamids ergiebt sich aus dem des Benzamids, zu welchem für die am Stickstoff substituirte CH_3 - Gruppe nach Abhdlg. XXV[1]), XXXI[2]), XXXIII[3]) der Werth von 166,6 Cal. hinzuzurechnen ist:

Benzamid	847,8	Cal.
Constante für CH_3	166,6	»
Methylbenzamid	1014,4	»
Constante für $CH_2.COOH$	162,7	»
Benzoyl-Sarkosin, berechnet	1177,1	»
» » gefunden	1180,9	»

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Benzoyl-Sarkosin Grm.	Collodium Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n-\vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n-\vartheta_1)$ cal.
1.	0,6211	0,0007	17,6950	16,1712	1,5238	2507,6	3821,1
2.	0,6408	0,0010	18,1284	16,5553	1,5731	2507,6	3944,7
3.	0,5847	0,0010	18,2003	16,7655	1,4348	2507,6	3597,9

1) Journ. prakt. Chem. [2] **44**, 394.
2) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1894 S. 57; Journ. prakt. Chem. [2] **49**, 490.
3) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1894 S. 245; Journ. prakt. Chem. [2] **50**, 395.

Correctionen.

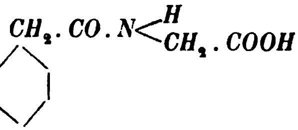
	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Collodium cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	11,5	2,0	22,6
2.	9,1	11,7	2,8	23,6
3.	9,1	10,7	2,8	22,6

Wärmewerth

	des Benzoyl-Sarkosins cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	3798,5	6115,8	1180,3	99,99
2.	3921,1	6119,1	1181,0	100,04
3.	3575,3	6114,8	1180,2	99,97

Mittel 6116,5 1180,5 für const. Volum
1180,9 » » Druck
138,6 Bildungswärme.

6. Phenacetursäure,



Die Phenacetursäure ist Phenylacetamid, in welchem ein Atom Wasserstoff der NH_2-Gruppe durch $CH_2.COOH$ ersetzt ist. Sie leitet sich daher von der Phenylessigsäure ab, indem zu dem Wärmewerthe derselben die Constante der Amide und die Constante der $CH_2.COOH$-Gruppe hinzugezählt wird. Der Wärmewerth der Phenylessigsäure ist früher (Abhdlg. XVIII) [1]) von uns zu 933,2 Cal. gefunden worden. Verschiedene Gründe sprechen aber dafür, dass diese Zahl um etwas zu hoch liegt. Namentlich der für Phenacetursäure hiernach berechnete Werth liess uns die Richtigkeit dieser Zahl unmöglich erscheinen. Wir haben daher neue Ermittelungen mit einem neu hergestelllen Präparate, über welche im Anhange (s. S. 395) berichtet werden soll, vor-

1) Journ. prakt. Chem. [2] 40, 134.

genommen. Bei diesen Bestimmungen ist der Werth der Phenylessigsäure zu 930,7 Cal. gefunden worden. Ganz bestimmte Erwägungen, auf welche wir unten eingehen werden, lassen auch diese Zahl noch um etwas zu hoch erscheinen und bestimmen uns den richtigen Werth dieser Säure zu 927,6 Cal. anzunehmen. Hiernach berechnet sich der Wärmewerth der Phenacetursäure:

Phenylessigsäure.	927,6 Cal.
Constante der Amide	75,9 »
Constante für $CH_2.COOH$	162,7 »
Phenacetursäure, berechnet . . .	1166,2 Cal.
» gefunden . . .	1165,5 »

Bestimmung des Wärmewerthes der Phenacetursäure.

	Substanz Phenacetursäure Grm.	Collodium Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,8967	—	18,1426	15,9724	2,1702	2507,6	5442,0
2.	0,8937	0,0019	17,9140	15,7502	2,1638	2507,6	5425,9
3.	0,9180	0,0012	18,2336	16,0121	2,2215	2507,6	5570,6

Correctionen.

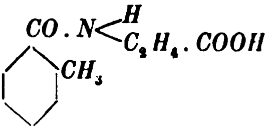
	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Collodium cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	20,6	—	29,7
2.	9,1	15,9	5,3	30,3
3.	9,1	15,9	3,4	28,4

Wärmewerth

	der Phenacetursäure cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5412,3	6035,8	1164,9	99,98
2.	5395,6	6037,4	1165,2	100,01
3.	5542,2	6037,2	1165,2	100,01
	Mittel	6036,8	1165,1 für const. Volum	
			1165,5 » » Druck	
			154,0 Bildungswärme.	

III. Isomere Säuren von der Zusammensetzung $C_{11}H_{13}NO_3$ . . . 207

1. Ortho-Toluyl-Alanin.



Das O.-Toluyl-Alanin kann als O.-Toluylamid betrachtet werden, in welchem ein Wasserstoffatom der NH_2-Gruppe durch die Atomgruppe -$C_2H_4.COOH$ ersetzt ist.

Der Werth des O.-Toluylamids ist oben S. 379 ermittelt, derselbe beträgt 1005,3 Cal. Der Werth für die Constante -$C_2H_4.COOH$ ist nach S. 382 319,3 Cal. Darnach berechnet sich der Werth des O.-Toluyl-Alanin:

O. Toluylamid	1005,3	Cal.
Constante für $C_2H_4.COOH$	319,3	»
O.-Toluyl-Alanin, berechnet . . .	1324,6	»
» » gefunden . . .	1322,3	»

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz O.-Toluyl-Alanin Grm.	Collodium Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,8845	0,0011	18,6656	16,4024	2,2632	2507,6	5675,2
2.	0,8116	0,0010	18,0747	15,9982	2,0765	2507,6	5207,0
3.	0,8465	0,0011	18,1546	15,9873	2,1673	2507,6	5434,7

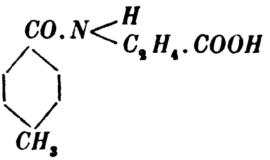
Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Collodium cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	16,7	3,1	28,9
2.	9,1	15,1	2,8	27,0
3.	9,1	15,3	3,1	27,5

Wärmewerth

	des O.-Toluyl-Alanin cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5646,3	6383,6	1321,4	99,98
2.	5180,0	6382,4	1321,2	99,97
3.	5407,2	6387,7	1322,3	100,05
	Mittel	6384,6	1321,6	für const. Volum
			1322,3	» » Druck
			160,2	Bildungswärme.

2. Para-Toluyl-Alanin,



Der Werth des Para-Toluyl-Alanin berechnet sich aus dem Para-Toluylamid (S. 381) und der Constanten für $-C_2H_4.COOH$:

Para-Toluylamid	1003,3	Cal.
Constante für $-C_2H_4.COOH$	319,3	»
Para-Toluyl-Alanin, berechnet	1322,6	»
» » » gefunden	1320,0	»

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz P.-Toluyl-Alanin Grm.	Collodium Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0160	0,0010	19,2273	16,6327	2,5946	2507,6	6506,2
2.	0,8561	0,0007	18,5203	16,3329	2,1874	2507,6	5485,1
3.	0,7214	0,0012	17,9253	16,0818	1,8435	2507,6	4622,8

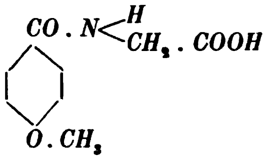
Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Collodium cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	19,5	2,8	31,4
2.	9,1	15,9	2,0	27,0
3.	9,1	13,5	3,4	26,0

Wärmewerth

	des P.-Toluyl-Alanin cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	6474,8	6372,8	1319,2	99,99
2.	5458,1	6375,5	1319,7	100,03
3.	4596,8	6372,0	1319,0	99,98
	Mittel	6373,4	1319,3 für const. Volum	
			1320,0 » » Druck	
			162,5 Bildungswärme.	

IV. Anisursäure, $C_{10}H_{11}NO_4$ . . . . 209.



Anisursäure ist Anisamid, in welchem ein Wasserstoff der NH_2-Gruppe durch $CH_2.COOH$ ersetzt ist.

Da der Wärmewerth des Anisamids nicht ermittelt ist, so ist derselbe aus dem der Anissäure zu berechnen.

Anissäure (Abhdlg. XVIII)[1] . . .	895,2 Cal.
Constante der Amide	75,9 »
Anisamid	971,1 »

Hierzu kommt die Constante für $CH_2.COOH$, um den Wärmewerth der Anisursäure zu finden:

Anisamid	971,1 Cal.
Constante für $CH_2.COOH$	162,7 »
Anisursäure, berechnet	1133,8 »
» gefunden	1135,7 »

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Substanz Anisursäure Grm.	Collodium Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	0,9482	0,0008	18,9275	16,8639	2,0636	2507,6	5174,7
2.	0,6398	0,0006	18,2370	16,8420	1,3950	2507,6	3498,1
3.	0,5847	0,0010	18,6693	17,3933	1,2760	2507,6	3199,7

1) Journ. prakt. Chem. [2] **40**, 131.

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Collodium cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	15,1	2,2	26,4
2.	9,1	10,2	1,7	21,0
3.	9,1	9,4	2,8	21,3

Wärmewerth

	der Anisursäure cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	5148,3	5429,6	1134,8	99,93
2.	3477,1	5434,7	1135,9	100,02
3.	3178,4	5435,9	1136,1	100,05
	Mittel	5433,4	1135,6 für const. Volum	
			1135,7 » » Druck	
			183,8 Bildungswärme.	

Uebersicht.

In nachstehender Tabelle finden sich die direct durch Verbrennung ermittelten mit den berechneten Werthen zusammengestellt. Die Uebereinstimmung beider ist in den meisten Fällen geradezu überraschend. Durch dieselbe wird der Beweis der Richtigkeit einerseits der für die Ausgangspunkte der Rechnungen angewandten, direct gefundenen Zahlen und andererseits der Richtigkeit der eingeführten Constanten erbracht.

Der Berechnung der Bildungswärme aus den Elementen sind hier, wie früher überall, die Werthe C 94 Cal. und H_2 69 Cal. zu Grunde gelegt.

Die Bestimmungen des elektrischen Leitvermögens, in der Columne 100 k, hat Herr Dr. Franke im Ostwald'schen Laboratorium auszuführen die Güte gehabt, dem dafür unser verbindlichster Dank gebracht sei.

		Mol.-Gew.	Wärmewerth bei const. Druck Gefunden Cal.	Berechnet Cal.	Bildungswärme Cal.	100 k
Hippursäure	$C_9H_9NO_3$	179	1012,6	1010,5	143,9	0,0222
O.-Tolursäure	$C_{10}H_{11}NO_3$	193	1168,2	1168,0	151,3	0,0192
M.-Tolursäure	$C_{10}H_{11}NO_3$	193	1167,6	1167,7	151,9	0,0208
P.-Tolursäure	$C_{10}H_{11}NO_3$	193	1168,1	1166,0	151,4	0,0199
Benzoylalanin	$C_{10}H_{11}NO_3$	193	1168,7	1167,1	150,8	0,0194
Benzoylsarkosin ...	$C_{10}H_{11}NO_3$	193	1180,9	1177,1	138,6	0,0499
Phenacetursäure ...	$C_{10}H_{11}NO_3$	193	1165,5	1166,2	154,0	0,0203
O.-Toluyl-Alanin...	$C_{11}H_{13}NO_3$	207	1322,3	1324,6	160,2	0,0165
P.-Toluyl-Alanin...	$C_{11}H_{13}NO_3$	207	1320,0	1322,6	162,5	0,0168
Anisursäure.......	$C_{10}H_{11}NO_4$	209	1135,7	1133,8	183,8	0,0161

Isomerie.

Die drei *Tolursäuren* unterscheiden sich von einander nur durch die verschiedene Stellung der Methylgruppen zu den Seitenketten. Gemäss früherer Mittheilungen (Abhdlg. XX[1], Abhdlg. XXVI[2]), Abhdlg. XXXIII)[3]) unterscheiden sich stellungsisomere Verbindungen von einander dadurch, dass der Wärmewerth der Orthoverbindungen am höchsten, der der Paraverbindungen am tiefsten, der der Metaverbindungen zwischen beiden liegt und Gleiches, nur noch in viel mehr ausgesprochenem Maasse, trifft zu in Bezug auf die Aviditätsgrösse, ausgedrückt in dem elektrischen Leitvermögen der Säuren. Die Tolursäuren machen eine Ausnahme von dieser Regel. Liegt auch der Wärmewerth der Metasäure (1167,6 Cal.) um etwas tiefer als der der Orthosäure (1168,2 Cal.), so steht doch der Werth der Parasäure (1168,1 Cal.) dem der Orthosäure so nahe, dass die Verschiedenheit völlig im Bereiche der Beobachtungsfehler liegt. Der Wärmewerth der drei Tolursäuren ist so wenig von einander verschieden, dass derselbe für alle drei Säuren als wesentlich gleich bezeichnet werden kann. Ebenso verhält sich das Leitvermögen. Während die Orthotoluylsäure um etwa 2,5 mal stärker ist als die Meta- und Parasäure, findet bei den drei

1) Journ. prakt. Chem. [2] **40**, 357.
2) Daselbst **45**, 339.
3) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1894 S. 240; Journ. prakt. Chem. [2] **50**, 390.

Tolursäuren kaum eine Verschiedenheit statt. Wenn auf die ganz kleinen Zahlendifferenzen noch Gewicht zu legen ist, so würde gerade das Umgekehrte von der allgemeinen Regel zutreffen, insofern als das Leitungsvermögen der Orthosäure um etwas geringer als das der beiden anderen ist. Die Differenzen sind aber so verschwindend, dass die Aviditätsgrösse der drei Säuren, ebenso wie deren Wärmewerth, als wesentlich gleich bezeichnet werden kann.

Benzoyl-Alanin und *Benzoyl-Sarkosin* sind sehr von einander verschieden, sowohl in Betreff des Wärmewerthes, wie betreffs des Leitungsvermögens.

	Wärmewerth Cal.	100*k*
Benzoyl-Alanin	1168,7	0,0194
Benzoyl-Sarkosin	1180,9	0,0499

Während das Benzoyl-Alanin, sowohl in seinem Wärmewerthe wie im Leitvermögen, den Tolursäuren so gut wie gleich ist, liegt der Wärmewerth des Benzoyl-Sarkosins um 12,2 Cal. höher als der des entsprechenden Alanins und es ist die Aviditätsgrösse des Benzoyl-Sarkosins um 2,6 mal grösser als die des Benzoyl-Alanins.

In Bezug auf ihre Wärmewerthe verhalten sich die beiden benzoylirten Verbindungen auf gleiche Weise wie Alanin und Sarkosin. Die Wärmewerthe der letzteren sind nach Abhdlg. XXV[1])

Alanin	387,7	13,5 Cal.
Sarkosin.	401,2	

Die Differenz beider ist bedingt durch die verschiedene Lage der CH_3-Gruppe. Im Alanin ist dieselbe an ein Kohlenstoffatom, im Sarkosin an ein Stickstoffatom gebunden. Je nach der Art dieser Bindung beträgt aber der Werth dieser Gruppe 156,6, resp. 166,6 Cal. (Abhdlg. XXXIV)[1]). Der gleiche Einfluss, welcher die Höhe des Wärmewerthes bedingt, macht sich also auch in dem Leitvermögen geltend, ebenso wie dieses früher für Diglycolaminsäure und Asparaginsäure, wo gleiche Beziehungen obwalten, gezeigt worden ist[2]).

1) Journ. prakt. Chem. [2] **44**, 393.
2) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1895 S. 32.
3) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1894 S. 61; Journ. prakt. Chem. [2] **49**, 493.

Für die beiden letzteren isomeren Säuren sind uns von Herrn Dr. Hans Wislicenus folgende Messungen des Leitvermögens mitgetheilt worden:

Diglycolaminsäure.

v	μ	$100m$	$100k$
32	59,49	16,81	0,1062
64	87,41	24,69	0,1265
128	125,1	35,34	0,1546
256	170,6	48,19	0,1751
512	218,0	61,58	0,1928
1024	265,0	74,85	0,2176

Asparaginsäure.

v.	μ	$100m$	$100k$
32	23,72	6,701	0,0150
64	34,13	9,665	0,0162
128	50,19	14,18	0,0183
256	71,92	20,32	0,0202
512	101,6	28,69	0,0225
1024	141,3	40,84	0,0275

Aus dem Leitvermögen einerseits des Benzoyl-Alanins und des Benzoyl-Sarkosins, sowie andererseits der Asparaginsäure und der Diglycolaminsäure ist daher zu folgern, dass das Leitvermögen bei der Bindung eines Radicales an ein Stickstoffatom ebenso einen Zuwachs erfährt, wie dieses für den Wärmewerth von uns nachgewiesen worden ist.

Die *Phenacetursäure* steht sowohl hinsichtlich des Wärmewerthes wie des Leitvermögens den Tolursäuren sehr nahe.

Ortho-Toluyl-Alanin und *Para-Toluyl-Alanin* zeigen im Wärmewerthe das normale Verhalten der Ortho- und Paraverbindungen, insofern der Werth des Ortho-Toluyl-Alanin höher als der der Paraverbindung liegt. Dagegen ist das Leitvermögen beider Körper als gleich zu betrachten.

2. Homologie.

Vergleichen wir den Wärmewerth der Hippursäure mit dem der Tolursäuren und der Toluyl-Alanine, so erhalten wir folgende Zahlenwerthe:

Hippursäure	1012,6	155,6 Cal.
O.-Tolursäure	1168,2	
O.-Toluyl-Alanin	1322,3	154,1 »

Hippursäure	1012,6	155,1 Cal.
M.-Tolursäure	1167,7	

Hippursäure	1012,6	155,5 Cal.
P.-Tolursäure.	1167,1	
P.-Toluyl-Alanin	1320,0	151,9 »

Bei dem Vergleiche der Benzoësäure mit den drei Toluylsäuren und bei dem Vergleiche der Salicylsäure mit den Oxytoluylsäuren (Abhdlg. XXXIII)[1]) sind wir zu ganz ähnlichen Beziehungen gekommen. Dieselben zeigen, dass die strengen Regelmässigkeiten, welche in der aliphatischen Reihe vorhanden sind, wo sowohl die festen einbasischen Säuren (Abhdlg. XXX)[2]) wie deren Amide und Anilide (Abhdlg. XXXIV)[3]) eine ganz regelmässige Erhöhung des Wärmewerthes von 156,6 Cal. für jeden Zuwachs von CH_2 zeigen, in der aromatischen Reihe nicht in gleichem Maasse vorhanden sind. Andererseits kommt aber auch die einzige Anomalie im thermischen Verhalten der Ameisensäure zur Essigsäure in der aromatischen Reihe nicht vor.

3. Thermischer Werth des Benzoyls $C_6H_5.CO$ bei der Bindung an Stickstoff.

Hippursäure ist ein Glycocoll, in welchem ein Wasserstoff der NH_2-Gruppe durch Benzoyl ersetzt ist. Ebenso leitet sich Benzoyl-Alanin und Benzoyl-Sarkosin vom Alanin und Sarkosin durch Ersatz eines Wasserstoffatomes durch Benzoyl her. Durch Vergleichung der thermischen Werthe der drei Verbindungen muss sich daher eine Constante für diese Reaction ergeben. Wir haben:

Hippursäure	1012,6	778,0 Cal.
Glycocoll (Abhdlg. XXV)[4]) . . .	234,6	

1) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1894 S. 242; Journ. prakt. Chem. [2] **50**, 392.
2) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1893 S. 627; Journ. prakt. Chem. [2] **49**, 110.
3) Ber. Kgl. Sächs. Ges. 1895 S. 25; Journ. prakt. Chem. [2] **52**, 61.
4) Journ. prakt. Chem. [2] **44**, 381.

Benzoyl-Alanin	1168,7	781,0 Cal.
Alanin (Abhdlg. XXV)[1]	387,7	
Benzoyl-Sarkosin	1180,9	779,8 Cal.
Sarkosin (Abhdlg. XXV)[2]	401,1	

Durch Eintritt einer Benzoylgruppe an Stelle eines Wasserstoffatomes einer NH_2-Gruppe wird daher der Wärmewerth im Mittel um 779,6 Cal. erhöht.

4. Thermischer Werth des Toluyls $C_7H_7.CO$ bei der Bindung an Stickstoff.

Die Tolursäuren sind Glycocoll, in welchem ein Stickstoffatom der NH_2-Gruppe durch Toluyl ersetzt ist; ebenso sind die Toluyl-Alanine als Alanine zu betrachten, in denen je ein Wasserstoff der NH_2-Gruppe durch Toluyl vertreten ist. Demnach wird der Werth des Toluyls:

Ortho-Tolursäure	1168,2	933,6 Cal.
Glycocoll	234,6	
Meta-Tolursäure	1167,6	933,0 Cal.
Glycocoll	234,6	
Para-Tolursäure	1168,1	933,5 Cal.
Glycocoll	234,6	
Ortho-Toluyl-Alanin	1322,3	934,6 Cal.
Alanin	387,7	
Para-Toluyl-Alanin	1320,0	932,3 Cal.
Alanin	387,7	

Im Durchschnitte beträgt die Differenz 933,4 Cal., und um diesen Betrag wird also der Wärmewerth einer Verbindung beim Ersatze eines Wasserstoffs einer NH_2-Gruppe durch Toluyl erhöhet.

Die beiden homologen Atomgruppen haben also bei der Stickstoffbindung die Werthe:

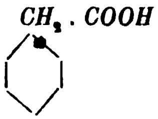
Benzoyl C_6H_5CO	779,6	153,8 Cal.
Toluyl C_7H_7CO	933,4	

Auf die Werthe, welche diese Atomgruppen bei der Bindung an Kohlenstoff und an Sauerstoff annehmen, wird in einer späteren Arbeit zurückzukommen sein.

1) Journ. f. prakt. Chem. [2] **44**, 382. 2) Daselbst S. 384.

Anhang.

Wärmewerth der Phenylessigsäure



$C_8H_8O_2$ . . . . 136.

Der Wärmewerth der Phenylessigsäure ist, wie oben erwähnt, früher von uns zu 933,2 Cal. ermittelt worden. Dieser Werth hat seit Langem unser Befremden erregt, da derselbe auf keine Weise mit den Gesetzen der Homologie in Einklang zu bringen ist. Vergleichen wir nämlich die für Benzoësäure, Phenylessigsäure und Phenylpropionsäure gefundenen Werthe, so erhalten wir folgende Differenzen:

Benzoësäure $C_7H_6O_2$	771,7	160,5 Cal.
Phenylessigsäure $C_8H_8O_2$	933,2	
Phenylpropionsäure $C_9H_{10}O_2$ . .	1085,5	152,2 »

Wir haben daher hier zwischen Benzoësäure und Phenylessigsäure eine viel grössere, zwischen Phenylessigsäure und Phenylpropionsäure eine viel kleinere Differenz, als nach Analogie anderer homologer Säuren zu erwarten ist, während beim Vergleiche von Benzoësäure und Phenylpropionsäure sich ein durchaus normales Verhalten ergiebt:

Benzoësäure $C_7H_6O_2$	771,7	$2 \times 156,9$ Cal.
Phenylpropionsäure $C_9H_{10}O_2$ . .	1085,5	

Es muss daher der Werth der Phenylessigsäure wahrscheinlich um etwas zu hoch gefunden sein.

Schon ehe wir die vorliegende Untersuchung begannen, haben wir die Bestimmungen des Wärmewerthes der Phenylessigsäure mehrfach, theils mit dem früheren, theils mit einem anderen Präparate wiederholt, ohne aber zu wesentlich anderen Zahlen zu kommen, bis wir jetzt fanden, dass der gewöhnlichen Phenylessigsäure eine fremde Substanz äusserst hartnäckig anhaftet, welche durch Krystallisation auf keine Weise von ihr zu trennen ist, wohl aber, wenn die mit Ammoniak neutralisirte Lösung der Säure mit Aether ausgeschüttelt wird, wobei die fremde Materie in Lösung geht und beim Verdunsten der

ätherischen Lösung als schwarzes Oel von widerwärtigem Geruche zurückbleibt.

Auf Grund dieser Beobachtung wurde ein neues Präparat hergestellt. Die mit Aether von den fremden Stoffen befreite ammoniakalische Lösung wurde bis zur Ausscheidung der Phenylessigsäure angesäuert, die krystallinisch gefällte Säure wurde an der Saugpumpe möglichst von anhängender Flüssigkeit befreit, mit kaltem Wasser gewaschen und mit dem wenigen anhängenden Wasser bis zum Schmelzen erwärmt. Nach dem Erkalten wurde das Wasser von der krystallinisch erstarrten Säure abgegossen und diese in heissem Benzol gelöst. Die beim Erkalten sich abscheidenden Krystalle dienten zur Bestimmung 1 und 2. Die dabei verbleibende Lösung wurde mit Petroleumäther, worin die Säure schwer löslich ist, versetzt und lieferte dabei Krystalle, welche zur Bestimmung 3 und 4 verwandt wurden. Die von diesen getrennte Flüssigkeit gab, nachdem das Lösungsmittel zum Theile abdestillirt war, eine dritte Krystallisation, mit der Bestimmung 5 und 6 vorgenommen wurden. Die Krystalle der ersten Fraction wurden dann von neuem mit siedendem Petroleumäther behandelt und davon nach einander vier einzelne Krystallisationen gewonnen, von denen die beiden ersten zu Bestimmung 7 und 8 verwandt wurden. Die beiden letzten Krystallisationen wurden nicht mehr untersucht, da sowohl die drei Hauptfractionen wie auch die aus der ersten Fraction gewonnenen beiden Fractionen unter sich völlig übereinstimmende Werthe ergeben hatten.

Bestimmung des Wärmewerthes.

	Phenylessigsäure Grm.	ϑ_n (corr.) Grad	ϑ_1 Grad	$\vartheta_n - \vartheta_1$ Grad	Wasserwerth W_a Grm.	$W_a(\vartheta_n - \vartheta_1)$ cal.
1.	1,0653	17,6511	15,0397	2,6114	2800	7311,9
2.	1,0686	17,5957	14,9769	2,6188	2800	7332,6
3.	1,0120	17,3345	14,8516	2,4829	2800	6952,1
4.	1,0275	17,4105	14,8929	2,5176	2800	7049,3
5.	1,0373	17,4845	14,9400	2,5445	2800	7124,6
6.	1,0990	17,7206	15,0248	2,6958	2800	7548,2
7.	1,0127	17,4902	15,0088	2,4814	2800	6947,9
8.	1,0321	17,5549	15,0257	2,5292	2800	7081,8

Correctionen.

	Eisen cal.	Salpetersäure cal.	Im Ganzen cal.
1.	9,1	17,8	26,9
2.	9,1	16,8	25,9
3.	9,1	19,5	28,6
4.	9,1	17,8	26,9
5.	9,1	17,8	26,9
6.	9,1	17,5	26,6
7.	9,1	16,5	25,6
8.	9,1	16,5	25,6

Wärmewerth

	der Phenylessigsäure cal.	pro Grm. cal.	pro Grm.-Mol. Cal.	Mittel = 100
1.	7285,0	6838,5	930,0	99,99
2.	7306,7	6837,7	929,9	99,98
3.	6923,5	6841,4	930,4	100,04
4.	7022,4	6834,4	929,5	99,93
5.	7097,7	6842,5	930,6	100,05
6.	7521,6	6844,1	930,8	100,08
7.	6922,3	6835,7	929,7	99,95
8.	7056,2	6836,7	929,8	99,97
	Mittel	6838,9	930,1	für const. Volum
			930,7	» » Druck
			97,3	Bildungswärme.

Vergleichen wir den hier gefundenen Werth mit dem der Benzoësäure und der Phenylpropionsäure:

Benzoësäure	771,7	159,0 Cal.
Phenylessigsäure	930,7	154,8 »
Phenylpropionsäure	1085,5	

so erhalten wir zwar eine weit regelmässiger verlaufende Reihe als vorher, aber immer bleibt der für Phenylessigsäure gefundene Werth noch um etwas höher als zu erwarten war.

Wir haben nun die Möglichkeit, diesen Werth auf doppeltem Wege einer Controlle zu unterziehen, indem wir einmal

den Werth der Phenylessigsäure durch Abbau aus dem gefundenen Werthe der Phenacetursäure und ausserdem durch Aufbau aus dem Benzole ableiten.

Aus der Phenacetursäure erhalten wir den Werth der Phenylessigsäure, indem von ersterer der Werth der Constante für die $CH_2.COOH$-Gruppe und ausserdem der Werth der Constante der Amide abgezogen wird, also

Phenacetursäure, gefunden . . .	1165,5 Cal.
Constante für $CH_2.COOH$	—162,7 »
Constante der Amide	— 75,9 »
Phenylessigsäure, berechnet . .	926,9 Cal.

Vom Benzol leitet sich der Werth der Phenylessigsäure ab, indem ein Atom Wasserstoff durch die $CH_2.COOH$-Gruppe ersetzt wird. Bei der Bindung an ein Kohlenstoffatom beträgt der Werth der $CH_2.COOH$-Gruppe 150,9 Cal. Es wird also der Werth der Phenylessigsäure:

Benzol (fest)	777,3
Constante für $CH_2.COOH$.	150,9
Phenylessigsäure berechnet	928,2

Beide auf ganz verschiedenem Wege ermittelten Werthe liegen sich daher sehr nahe, sie unterscheiden sich von einander nur um 1,3 Cal., so dass es gestattet ist einen Mittelwerth von 927,6 Cal. dafür anzunehmen.

Vergleichen wir nunmehr die drei homologen Säuren miteinander, so bekommen wir folgende Reihe:

Benzoësäure.	771,7 Cal.	
		} 155,9 Cal.
Phenylessigsäure . .	927,6 Cal.	
		} 157,9 Cal.
Phenylpropionsäure	1085,5 Cal.	

Es ergiebt sich daher hier eine weit bessere Uebereinstimmung als oben und es wird die für Phenylessigsäure berechnete Zahl ausserdem durch deren Leitfähigkeit bestätigt.

Die Leitfähigkeit der der Phenylessigsäure isomeren Toluylsäuren ist nach Ostwald's Messungen:

	$100k$
O.-Toluylsäure	0,0120
M.-Toluylsäure	0,00514
P.-Toluylsäure	0,00515

Die Leitfähigkeit der Phenylessigsäure beträgt nach neuen Messungen, welche Herr Dittrich für uns im Ostwald'schen Laboratorium ausgeführt hat,

Phenylessigsäure 0,00502

Vergleichen wir hiermit die Wärmewerthe der vier Säuren, so ergiebt sich eine gleiche Richtung der Zahlenreihe, wenn wir für Phenylessigsäure den berechneten Werth einsetzen:

O.-Toluylsäure	929,4 Cal.
M.-Toluylsäure	929,1 »
P.-Toluylsäure	927,4 »
Phenylessigsäure	927,6 »

Wäre der aus unseren Bestimmungen sich ergebende Wärmewerth der Phenylessigsäure von 930,7 Cal. richtig, so würde die schwächste der vier Säuren den höchsten Energiegehalt besitzen, was sehr unwahrscheinlich ist, während der berechnete Werth in vollem Einklange mit der Aviditätsgrösse dieser Säure steht.

Wir müssen daher annehmen, dass es uns trotz aller Bemühungen nicht gelungen ist, die Phenylessigsäure in absolut reiner Form zu erhalten. Indem wir uns vorbehalten gelegentlich darauf zurückzukommen, nehmen wir vorläufig die berechnete Zahl 927,6 Cal. als dem wahren Werthe der Phenylessigsäure entsprechend an.

Sophus Lie berichtet über seine aus dem Jahre 1874 herrührende Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Durch Betrachtungen, die vollständig nur in seinen Vorlesungen veröffentlicht worden sind, zeigte er, dass diese Integrationstheorie wirklich, wie von ihm in den Jahren 1874, 1877 und 1884 angekündigt wurde, das Grösstmögliche leistet. Eine vollständige Darstellung seiner Entwicklungen wird demnächst in diesen Berichten unter dem Titel: »Discussion der Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen« erscheinen.

F. Hausdorff, *Ueber die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre.*

Bei der Vergleichung theoretischer Absorptionsformeln mit den empirisch abgeleiteten Extinctionstafeln zeigen sich Widersprüche systematischer Natur, die namentlich in den mittleren Zenithdistanzen zu gross sind, um ohne Weiteres der Beobachtung zur Last gelegt zu werden. Eine Nachprüfung der Laplace'schen Theorie, die einen gewissen einfachen Zusammenhang zwischen Absorption nnd Refraction annimmt, ist daher um so mehr am Platze, als in ihr nicht einmal die strengen Consequenzen aus den gewählten Prämissen gezogen werden; eine schärfere Entwicklung ist im ersten Abschnitt der folgenden Untersuchungen gegeben. Das Resultat ist bezüglich des Anschlusses an die Beobachtungen negativ; es wird daher die bisherige Voraussetzung, nämlich die Proportionalität zwischen der lichtbrechenden und der lichtschwächenden Kraft der Atmosphäre, weiterhin beseitigt und eine Reihe selbständiger Anschlussformeln für den Verlauf der Absorption in verschiedenen Zenithdistanzen aufgestellt. Die Lambert'sche Formel, die auf der Entwicklung nach Potenzen von tang(Zenithdistanz) beruht, war hierbei nicht direct zu verwenden, weil sie keiner angebbaren Constitution der Atmosphäre entspricht; wohl aber bestimmt sie bei einer gewissen Anwendung die erreichbaren Grenzen für den Anschluss anderer Formeln. Nachdem im zweiten Abschnitt eine Versuchsreihe erledigt ist, die zwar zu scharfer Uebereinstimmung mit der Beobachtung, aber zu keiner physikalisch möglichen Constitution der Atmosphäre führt, bringt der dritte in mehrfacher Variation eine Darstellung der Beobachtungen, die physikalisch genommen eine starke Absorption in den oberen Luftschichten voraussetzt. Als empirisches Material hat bis dahin die von Herrn G. Müller abgeleitete mittlere Potsdamer-Extinctionstabelle ge-

dient; im vierten Abschnitt werden zur nothwendigsten Controlle einige andere Reihen herangezogen, worunter namentlich die Müller'schen Säntisbeobachtungen in Frage kommen. Den Schluss bilden einige Untersuchungen über den Langley'schen Einwand gegen die monochromatische Absorptionstheorie.

I.

Es soll zunächst unter der Voraussetzung, dass die optische Dichtigkeit der Atmosphäre für Brechung und Absorption dieselbe sei, die Absorption in einem concentrisch geschichteten Medium genauer dargestellt werden, als es von Laplace geschehen ist.

Wir nennen r den Radius einer Kugel, die den Erdmittelpunkt zum Centrum hat. In der Luftschicht zwischen den Radien r und $r + dr$ liege das Element ds des betrachteten Lichtstrahls; ds soll in der Richtung von innen nach aussen, vom Beobachter nach dem Object, positiv gezählt werden. Ist ϑ der Winkel zwischen $+ ds$ und $+ dr$, also die scheinbare Zenithdistanz des Objects in der betrachteten Höhe, so gilt die Gleichung.

$$ds = dr \sec \vartheta .$$

Ist ferner μ der Brechungsexponent und R die Refraction in der betrachteten Höhe, und wird das Product $r\mu$ mit ν bezeichnet, so führt das Snellius'sche Brechungsgesetz oder das Fermat'sche Princip, angewandt auf concentrische Schichtung, zu den bekannten Formeln

$$(1) \qquad dR = - \operatorname{tg} \vartheta \, d \log \mu , \quad \nu \sin \vartheta = \text{constans} = N .$$

Die letzte Gleichung besagt, dass N längs eines und desselben Strahles constant ist; die erste liefert R durch Integration von der betrachteten Luftschicht bis zur oberen Grenze der Atmosphäre, an der $\mu = 1$ wird.

Ist endlich D die Luftdichtigkeit, J die Lichtintensität in der betrachteten Höhe und Q eine Constante der Atmosphäre, so wird durch die Formel

$$(2) \qquad \frac{dJ}{J} = QDds$$

die Annahme ausgesprochen, dass die absorbirte Intensität, in Theilen der ursprünglichen, proportional sei der Luftdichtigkeit

und der Weglänge des Strahles. Bei unserer Annahme über das Vorzeichen von ds ist Q positiv.

Um sowohl die Absorption als auch die Refraction in Formen zu erhalten, die für beliebige Höhen gelten, wollen wir festsetzen, dass die Grössen r, μ, ν, ϑ, R, J, D, wie auch die weiterhin einzuführenden, sich auf einen beliebigen Ort in der Atmosphäre beziehen sollen, dieselben Grössen mit Accent ebenfalls auf einen beliebigen; und zwar sollen die accentuirten Grössen bei der Integration variabel, die ungestrichenen ihre unteren Grenzwerthe sein. Die obere Grenze endlich soll durch den Index 1 angedeutet werden, sodass also $D_1 = 0$ und $\mu_1 = 1$.

Für den Zusammenhang zwischen Dichtigkeit und brechender Kraft gelte die Relation

$$(3) \qquad D : (\mu^\alpha - 1) = \text{constans}\,,$$

wo α eine reine Zahl bedeutet, für die man aus Gründen der Emanationstheorie bisher $\alpha = 2$ gesetzt hat[1]). Die Gleichung (3) stellt einerseits den Zusammenhang zwischen Absorption und Refraction her; andererseits ist sie eine der Relationen, die von der Constitution der Atmosphäre zu einem Ausdruck für die Refraction, oder umgekehrt von diesem zu jener führen. Wenn dieser letzte Weg, wie Bruns gezeigt hat[2]), der zweckmässigere ist, so kommt (3) erst in Frage bei der physikalischen Discussion einer Refractionsformel, während zur blossen Ableitung einer solchen aus den Gleichungen (1) es nur nöthig ist, μ als Function von ν zu kennen. Man erhält, indem man die Zahl α verschieden wählt, zu einer und derselben Refraction verschiedene Brechungsexponenten und Lufttemperaturen, während man nach dem früheren Verfahren zu einem und demselben Zustand der Atmosphäre verschiedene Refractionen erhalten würde. Dass die bisherigen Refractionstafeln unter der Annahme $\alpha = 2$ gerechnet wurden, ist also für uns kein Grund, bei dieser Annahme zu bleiben, und da den physikalischen Bestimmungen wie den theoretischen Vorstellungen durch verschiedene Werthe von α genügt wird, so hindert uns nichts, über α beliebig zu verfügen.

---

1) Noch allgemeiner könnte man setzen $D : f(\mu) = \text{constans}$, wo von der brechenden Kraft $f(\mu)$ nur angenommen wird, dass $f(1)$ von der Ordnung $\mu - 1$ verschwindet.

2) Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung, Berichte der K. Sächs. Ges. d. Wissensch. 1891.

Uebrigens sind unter der Annahme $\alpha = 1$ Refractionstafeln gerechnet worden[1]), die mit den gewöhnlichen nahe genug übereinstimmen. In manchen Fällen ist es zweckmässig, $\alpha = -1$ zu setzen, weil dann im Allgemeinen zu geschlossenen Refractionsformeln geschlossene Formeln für Druck und Temperatur gehören; hier ist eine andere Annahme günstiger.

Ist q eine neue, positive Constante der Atmosphäre, so folgt aus (2) und (3)

$$\begin{aligned} d \log J &= q \frac{\mu^\alpha - 1}{\alpha} \sec \vartheta \, dr \\ &= q \frac{\mu^\alpha - 1}{\alpha\mu} \frac{\mu^2 r dr}{\sqrt{\mu^2 r^2 - N^2}} \\ &= d\left[q \cdot \frac{\mu^\alpha - 1}{\alpha\mu} \sqrt{\mu^2 r^2 - N^2}\right] - q \frac{\mu^\alpha - 1}{\alpha\mu} \frac{r^2 \mu d\mu}{\sqrt{\mu^2 r^2 - N^2}} \\ &\qquad - q\sqrt{\mu^2 r^2 - N^2}\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \mu^{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha} \mu^{-2}\right) d\mu, \end{aligned}$$

$$d\left[\log J - q \frac{\mu^\alpha - 1}{\alpha\mu} \nu \cos \vartheta\right] =$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{q d\mu}{\alpha \nu \cos \vartheta} \{\nu^2(\mu^{\alpha-2} - \mu^{-2}) + (\nu^2 - N^2)(\alpha\mu^{\alpha-2} - \mu^{\alpha-2} + \mu^{-2})\} \\ &= -\frac{q d \log \mu}{\nu \cos \vartheta}\left\{\nu^2 \mu^{\alpha-1} - N^2 \frac{(\alpha - 1)\mu^\alpha + 1}{\alpha\mu}\right\} \\ &= q N dR\left[\frac{\nu^2}{N^2} \mu^{\alpha-1} - \frac{(\alpha - 1)\mu^\alpha + 1}{\alpha\mu}\right]. \end{aligned}$$

Es treten also Integrale von der Form

$$\int f(\mu) dR \quad \text{und} \quad \int f(\mu) \nu^2 dR$$

auf, worin nur der Factor $f(\mu)$ die Entwicklung erschwert. Im Interesse der Einfachheit liegt es hier offenbar, $\alpha = 1$ zu wählen. Das Differential der Absorption $d \log J = q(\mu - 1) ds$ setzt sich dann in einfacher Weise zusammen aus den Differentialen der Bogenlänge s und der Lichtzeit t; ist c die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum, so ist $\mu ds = c dt$ und $d \log J = q(c dt - ds)$. Man erhält unter dieser Annahme, bei der wir stehen bleiben,

1) Thomas Young im Nautical Almanac für 1822.

(4) $$d\left[\log J - q\frac{\mu-1}{\mu}\nu\cos\vartheta\right] = qNdR\left(\frac{\nu^2}{N^2}-\frac{1}{\mu}\right).$$

Versehen wir die Grössen, die bei der Integration variiren, mit Accenten und integriren zwischen den Radien r und r_1, so wird

(5) $$\log\frac{J_1}{J} + q\frac{\mu-1}{\mu}\nu\cos\vartheta = qN\int dR'\left(\frac{\nu'^2}{N^2}-\frac{1}{\mu'}\right),$$

wobei angenommen ist, dass $(\mu-1)\nu$ unter allen Umständen an der Grenze verschwindet, selbst wenn $\nu_1 = \infty$ wird; bei der nachher zu besprechenden Refractionsformel ist diese Voraussetzung erfüllt.

Bevor wir eine specielle Wahl treffen, möge die allgemeine Form der auftretenden Integrale

$$\int\frac{\nu'^2}{\nu^2}dR' \quad \text{und} \quad \int\frac{dR'}{\mu'}$$

charakterisirt werden. In der Gleichung (1) oder

$$R = -\int\frac{Nd\log\mu'}{\sqrt{\nu'^2-N^2}}$$

ist für $\log\mu'$ eine Function von ν' zu setzen, die auch von ν_1 und gewissen constanten Parametern p_λ, aber nicht von ν (dem Orte des Beobachters auf dem Strahle) und nicht von ϑ abhängen darf. Wir wollen ansetzen

$$\log\mu = \sum p_\lambda m_\lambda\left(\frac{\nu}{\nu_1}\right),$$

$$\log\mu' = \sum p_\lambda m_\lambda\left(\frac{\nu'}{\nu_1}\right),$$

wo unter den m_λ irgendwelche analytische Functionen (z. B. die steigenden oder fallenden Potenzen) ihres Arguments zu verstehen sind, die wir natürlich mit Rücksicht auf möglichst einfache Ausführbarkeit der Quadraturen

$$R_\lambda = -\int\frac{N}{\sqrt{\nu'^2-N^2}}dm_\lambda\left(\frac{\nu'}{\nu_1}\right), \quad R = \sum p_\lambda R_\lambda$$

wählen werden. R_λ hängt ab von $\frac{\nu}{\nu_1}$ und $\frac{N}{\nu_1} = \sin\vartheta_1$, oder wenn wir

(6) $\nu = \nu_1 \cos\varphi\,, \quad \sin\vartheta_1 = \cos\varphi \sin\vartheta$

setzen, von φ und ϑ. Man sieht ohne Weiteres, dass der Integraltypus

$$R^\delta = \int \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)^\delta dR'\,,$$

dessen Specialfall für $\delta = 2$ im Ausdrucke der Absorption auftritt, in derselben Weise

$$R^\delta = \sum p_\lambda R_\lambda{}^\delta\,(\varphi,\,\vartheta)$$

dargestellt wird. Hingegen führt das Integral $\int \frac{dR'}{\mu'}$ oder das allgemeinere $\int f(\mu')\,dR'$ durch Entwicklung von $f(\mu')$ nach steigenden Potenzen von $\log\mu'$ auf den Typus

$$\int (\log\mu')^\varepsilon\,dR'\,,$$

der eine ganze homogene Function $(\varepsilon + 1)^{\text{ten}}$ Grades der p_λ ist, mit Coefficienten, die von φ und ϑ abhängen. Wegen der Kleinheit von $\log\mu$ (< 0.0003) genügen von dieser Entwicklung die ersten Glieder $\varepsilon = 0, 1, \ldots$

Nennen wir also die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_l$, deren Anzahl wir als endlich voraussetzen, die linearen Refractionsconstanten (andere Parameter können noch innerhalb der Functionen m_λ auftreten) und definiren als Grössenordnung eines Ausdrucks seine Dimension in den p_λ, so können wir sagen: $\log\mu$, R und $\int \frac{\nu'^2}{\nu^2}\,dR$ sind Glieder erster Ordnung, $\int \frac{dR'}{\mu'}$ führt entwickelt auf Glieder erster, zweiter und folgender Ordnung; jedes Glied ist ein geschlossener Ausdruck und hängt ausser von den p_λ von der scheinbaren Zenithdistanz ϑ und dem Winkel φ ab ($\log\mu$ bloss von φ). Da auch der auf der linken Seite von (5) stehende Ausdruck $\frac{\mu - 1}{\mu}\cos\vartheta$ von derselben Form ist, so findet man

$$\log\frac{J_1}{J} = q\nu_1\,(P_1 + P_2 + \cdots)\,,$$

wo der Index von P die Grössenordnung in den p_λ angiebt.

Die p_λ sind absolute Constanten der Atmosphäre, d. h. von der Lage des Beobachtungsortes unabhängig. Mit den Coefficienten $q_1, q_2, \ldots q_l$ einer Entwicklung von der Form

$$\log \mu' = \sum q_\lambda n_\lambda \left(\frac{\nu'}{\nu}\right)$$

hängen sie, bei passender Wahl der Functionen n_λ, durch lineare auflösbare Gleichungen zusammen, die auch φ enthalten. In dieser letzten Form, die auf den Beobachtungsort bezogen ist, pflegt $\log \mu$ und R gewöhnlich angesetzt zu werden; es muss sich jedoch stets in der ersten Art darstellen lassen, wenn man eine für beliebige Höhen anwendbare Refractionsformel erhalten will. Die Grössenordnung eines Ausdrucks ist nunmehr seine Dimension in den q_λ.

Verzichtet man auf geschlossene Darstellung, so kann wenigstens formell die Absorption auf die Refraction zurückgeführt werden, ohne dass eine bestimmte Gestalt für R zu Grunde gelegt wird. Ich führe an, ohne es zu beweisen, dass bis auf einen constanten Factor die Coefficienten A, A', A'', ... der Lambert'schen Absorptionsformel

$$\log \frac{J_1}{J} = \sec \vartheta (A - A' \operatorname{tg} \vartheta^2 + A'' \operatorname{tg} \vartheta^4 - \cdots)$$

sich durch die Coefficienten Z, Z', Z'' ... der bekannten Refractionsentwicklung

$$R = Z \operatorname{tg} \vartheta - Z' \operatorname{tg} \vartheta^3 + Z'' \operatorname{tg} \vartheta^5 - \cdots$$

einerseits und die Coefficienten ungerader Ordnung H', H''', H^V.. der Cotangentenreihe

$$R = H + H'' \operatorname{cotg} \vartheta^2 + H^{IV} \operatorname{cotg} \vartheta^4 + \cdots$$
$$- H' \operatorname{cotg} \vartheta - H''' \operatorname{cotg} \vartheta^3 - H^V \operatorname{cotg} \vartheta^5 - \cdots$$

andererseits ohne Hülfe des Winkels φ ausdrücken lassen. Es wäre zwecklos, diese sehr complicirten Ausdrücke aufzustellen, da eine Ermittlung der H', H''', ... aus den Beobachtungen direct (ohne Zugrundelegung eines geschlossenen Ausdrucks für R) wegen der Unsicherheit der Messungen im Horizont ganz illusorisch wäre.

Bevor wir weitergehen, mögen einige Benennungen eingeführt werden. Schreiben wir das Integral der Gleichung (2) in der Form[1])

---

1) Ein für alle Mal soll für die natürlichen Logarithmen das Zeichen log, für die Brigg'schen das Zeichen Log zur Anwendung kommen.

(7) $$\text{Log}\,(J_1 : J) = P,$$

so ist, für die betrachtete Höhe, J die beobachtete Intensität und P eine Function der scheinbaren Zenithdistanz ϑ; J_1 ist die ungeschwächte Intensität des Strahles vor dem Eintritt in die Atmosphäre. Bezieht sich der Index 0 auf das Zenith ($\vartheta = 0$), so heisse

$$P_0 = \text{Log}\,\frac{J_1}{J_0}$$

kurz die *Zenithabsorption*, und

$$p = \frac{J_0}{J_1} = 10^{-P_0}$$

der *Transmissionscoefficient*; p ist also, in Theilen der ursprünglichen, die bis zum Beobachtungsort durchgelassene Lichtmenge eines Zenithstrahles. Statt (7) lässt sich schreiben

$$\frac{J}{J_1} = 10^{-P} = p^{\frac{P}{P_0}};$$

der Quotient $\frac{P}{P_0}$ würde die Weglänge des Strahles in einer idealen Atmosphäre sein, die bei überall gleicher Durchsichtigkeit p dieselbe Absorption ausübte wie die wirkliche, und mag als *reducirte Weglänge* des Strahles bezeichnet werden (die im Zenith $= 1$ gesetzt). Endlich ist zu beachten, dass die Grösse

$$P - P_0 = \text{Log}\,\frac{J_0}{J}$$

diejenige ist, die direct aus den Messungen hervorgeht und aus deren Verlauf in verschiedenen Zenithdistanzen P_0 erst theoretisch zu extrapoliren ist; diese Grösse heisst die *Reduction auf das Zenith*, der Kürze halber auch Zenithreduction, und wird entweder, wie hier im Allgemeinen geschehen soll, in Helligkeitslogarithmen oder in Grössenclassen (Helligkeitslogarithmen dividirt durch 0.4) angesetzt.

Wir entwickeln nun die Gleichung (5) für eine specielle Refractionsformel, die sich den Beobachtungen für unseren Zweck hinreichend genau anschliesst und die Glieder höherer Ordnung, die in der Laplace'schen Formel vernachlässigt sind, mit zu berücksichtigen erlaubt. Es seien a und b zwei sogleich zu definirende Functionen von ν, die Constanten a_1 und b_1 ihre

Grenzwerthe für $\nu = \nu_1$, φ der durch (6) eingeführte Winkel, ferner

$$x = b \cos \vartheta\,, \quad x_1 = b_1 \cos \vartheta_1\,.$$

Aus der Grundformel

$$R = \int -\frac{\nu \sin \vartheta \, d \log \mu'}{\sqrt{\nu'^2 - \nu^2 \sin \vartheta^2}}$$

erhält man durch die Substitution

$$\frac{b}{\nu} = \frac{b'}{\nu'} = \frac{b_1}{\nu_1} \quad \text{oder} \quad b_1 = b \sec \varphi = b' \sec \varphi'$$

$$R \operatorname{cosec} \vartheta = -\int \frac{b \, d \log \mu'}{\sqrt{b'^2 - b^2 + x^2}}\,.$$

Ferner sei

$$\frac{a}{b} e^{bb} = \frac{a'}{b'} e^{b'b'} = \frac{a_1}{b_1} e^{b_1 b_1}$$

und für den Zusammenhang zwischen μ und ν werde die Formel

(8) $$\log \mu = \frac{a}{2b} - \frac{a_1}{2b_1}\,, \quad \log \mu' = \frac{a'}{2b'} - \frac{a_1}{2b_1}$$

angenommen, die, wie es sein soll, eine vom Beobachtungsort unabhängige Constitution der Atmosphäre darstellt. Führt man die Integrationsvariable

$$w = b'^2 - b^2$$

ein, deren Grenzwerthe sind

$$w = 0$$

und

$$w = c^2 = b_1^2 - b^2 = b^2 \operatorname{tg} \varphi^2\,,$$

so wird

$$\log \mu' = \frac{a}{2b} (e^{-w} - h)\,, \quad h = e^{-cc}\,,$$

$$-d \log \mu' = \frac{a}{2b} e^{-w} dw\,,$$

(9) $$R \operatorname{cosec} \vartheta = \int_0^{cc} \frac{a}{2} \frac{e^{-w} dw}{\sqrt{w + x^2}} = a\,\Phi(x) - a h \Phi\left(\sqrt{c^2 + x^2}\right).$$

Hier ist

$$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-w}\,dw}{\sqrt{w+x^2}} = e^{xx}\int_x^\infty e^{-tt}\,dt$$

die sogenannte KRAMP'sche Function, für die sich mehrfach Tafeln finden. Die Formel (9) lässt sich noch etwas anders schreiben; wegen

$$c^2 + x^2 = b_1^2 - b^2 \sin\vartheta^2 = b_1^2 \cos\vartheta_1^2 = x_1^2$$

wird

(10) $$R = a \sin\vartheta[\Phi(b\cos\vartheta) - h\Phi(b_1 \cos\vartheta_1)]$$
$$= a\sin\vartheta[\Phi(x) - h\Phi(x_1)]\,.$$

Definirt man ausser ϑ_1 zwei andere Winkel ψ und ω (von denen ψ erst später gebraucht wird) durch die Gleichungen

(11) $$\begin{cases} \sin\vartheta_1 = \cos\varphi\sin\vartheta\,, & \sin\vartheta_1 = \cos\varphi\sin\vartheta\,, \\ \cos\omega\cos\vartheta_1 = \cos\varphi\cos\vartheta\,, & \cos\psi\cos\vartheta_1 = \cos\vartheta\,, \\ \sin\omega\cos\vartheta_1 = \sin\varphi\,, & \sin\psi\cos\vartheta_1 = \sin\varphi\sin\vartheta\,, \end{cases}$$

so folgt

(12) $$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\varphi\sec\vartheta\,, \quad \operatorname{tg}\psi = \sin\varphi\operatorname{tg}\vartheta\,,$$
$$b\cos\vartheta = c\operatorname{cotg}\omega\,, \quad b_1\cos\vartheta_1 = c\operatorname{cosec}\omega\,,$$

(13) $$R = a\sin\vartheta[\Phi(c\operatorname{cotg}\omega) - h\Phi(c\operatorname{cosec}\omega)]\,.$$

Diese Formel, mit den numerischen Parametern a, b, c, h, φ, zwischen denen die Relationen

$$c = b\operatorname{tg}\varphi\,, \quad h = e^{-cc}$$

bestehen, schliesst sich, wie die Versuche lehren, den gebräuchlichen Refractionstafeln recht genau an. Wird die Höhe der Atmosphäre, also auch $\operatorname{tg}\varphi$ und c hinlänglich gross oder unendlich angenommen, so wird das Glied mit h unmerklich und man erhält die einfachere Formel

(14) $$R = a\sin\vartheta\,\Phi(b\cos\vartheta)$$

mit den zwei Parametern a, b, ein Analogon zu der v. OPPOLZER-schen Formel [1]). Zahlenwerthe sind weiterhin mitgetheilt.

Nach Kenntniss der Constitution der Atmosphäre, die der Formel (13) oder (14) zu Grunde liegt, lassen sich nun ohne

1) Astr. Nachrichten Nr. 2135.

Weiteres die Bestandtheile der Absorptionsformel entwickeln. Die Grösse a entspricht hier dem, was wir in der allgemeinen Vorbetrachtung eine lineare Refractionsconstante nannten; es handelt sich also einfach um Entwicklung nach Potenzen von a. Dabei wollen wir zunächst annehmen, dass $\varphi = 90^0$ oder nahe an 90^0, also h unmerklich sei; wir erhalten dann diejenige Absorption, die als die strenge Consequenz der Refraction (14) anzusehen ist.

Man findet sofort

$$\int \frac{\nu'^2}{\nu^2}\,dR' = \int \frac{b'^2}{b^2}\,dR' = \int_0^\infty \frac{a \sin\vartheta}{2} \frac{e^{-w}dw}{\sqrt{x^2+w}}\left(1+\frac{w}{b^2}\right)$$

$$= a \sin\vartheta\,\Phi + \frac{a}{b^2}\sin\vartheta\left[\Phi(\tfrac{1}{2}-x^2)+\frac{x}{2}\right],$$

wo unter Φ schlechthin $\Phi(x)$ zu verstehen ist.

Weiter wird

$$\int \frac{dR'}{\mu'} = \sum_\delta \frac{(-1)^\delta}{\Pi(\delta)} \int (\log\mu')^\delta dR', \quad \delta = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\int (\log\mu')^\delta dR' = \frac{a\sin\vartheta}{2}\left(\frac{a}{2b}\right)^\delta \int \frac{e^{-w}dw}{\sqrt{w+x^2}}\,e^{-\delta w}.$$

Hier treten also die Kramp'schen Functionen der Argumente x, $\sqrt{2}x$, $\sqrt{3}x$, ... auf. Setzt man

$$\Phi_\delta(x) = \sqrt{\delta}\,\Phi(\sqrt{\delta}x) = \frac{\delta}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\delta w}dw}{\sqrt{w+x^2}},$$

so wird

$$\int (\log\mu')^\delta dR' = a \sin\vartheta \left(\frac{a}{2b}\right)^\delta \frac{\Phi_{\delta+1}(x)}{\delta+1},$$

$$\int \frac{dR'}{\mu'} = a\sin\vartheta \sum \frac{(-1)^\delta}{\Pi(\delta+1)}\left(\frac{a}{2b}\right)^\delta \Phi_{\delta+1}(x).$$

Entwickelt man in

(15) $$\frac{1}{q\nu}\log\frac{J_1}{J} =$$

$$= -\frac{\mu-1}{\mu}\cos\vartheta + \operatorname{cosec}\vartheta \int \frac{\nu'^2}{\nu^2}\,dR' - \sin\vartheta \int \frac{dR'}{\mu'}$$

auch das erste Glied rechterhand nach Potenzen von

$$\log \mu = \frac{a}{2b},$$

so folgt

$$\frac{1}{q\nu} \log \frac{J_1}{J} = -\frac{a}{2b} \cos \vartheta + \sum_{\delta} \frac{(-1)^{\delta}}{\Pi(\delta+2)} \left(\frac{a}{2b}\right)^{\delta+2} \cos \vartheta$$

$$+ a\Phi\left(\sin \vartheta^2 + \frac{1}{2b^2}\right) + \frac{a}{2b} \cos \vartheta$$

$$- a \sin \vartheta^2 \Phi + \sum_{\delta} \frac{(-1)^{\delta}}{\Pi(\delta+2)} a \sin \vartheta^2 \left(\frac{a}{2b}\right)^{\delta+1} \Phi_{\delta+2}.$$

Der Index δ geht von 0 an; das Glied erster Ordnung ist besonders geschrieben. Zieht man es zusammen, so wird

$$(16) \qquad \frac{1}{q\nu} \log \frac{J_1}{J} =$$

$$= \frac{a}{2b^2} \Phi + \sum_{\delta} \frac{(-1)^{\delta}}{\Pi(\delta+2)} a \left(\frac{a}{2b}\right)^{\delta+1} \left[\Phi_{\delta+2} \sin \vartheta^2 + \frac{\cos \vartheta}{2b}\right]$$

$$= \frac{a}{2b^2} \Phi + \frac{a^2}{4b}\left(\frac{\cos \vartheta}{2b} + \Phi_2 \sin \vartheta^2\right) - \frac{a^3}{24 b^2}\left(\frac{\cos \vartheta}{2b} + \Phi_3 \sin \vartheta^2\right) + \ldots$$

Hieraus sieht man zunächst, dass das Glied dritter Ordnung gegen dasjenige zweiter wirklich vernachlässigt werden kann; der Quotient beider liegt zwischen den Grenzen

$$\frac{a}{6b} = \tfrac{1}{3} \log \mu = 0.0001 \qquad \text{(im Zenith)}$$

$$\text{und } \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{a}{6b} \qquad \text{(im Horizont)}.$$

Dagegen ist das Verhältniss des zweiten Gliedes zum ersten im Zenith $= \frac{ab}{2} : 2b\Phi(b)$ oder nahe $= \frac{ab}{2} \sim \frac{1}{10}$, im Horizont $= \sqrt{2}\,\frac{ab}{2} \sim \frac{1}{7}$; die Laplace'sche Formel

$$\log \frac{J_1}{J} = CR \operatorname{cosec} \vartheta,$$

die hier dem Gliede erster Ordnung entspricht, ist also ent-

schieden unvollständig. Dass sie trotzdem, wie wir sehen werden, nahezu dieselben Resultate ergiebt wie die strengere Formel (16), liegt daran, dass die von ϑ abhängigen Coefficienten

$$\Phi\,, \quad \frac{\cos\vartheta}{2b}+\Phi_2 \sin\vartheta^2\,, \quad \frac{\cos\vartheta}{2b}+\Phi_3 \sin\vartheta^2\,, \ldots$$

bis zu hohen Zenithdistanzen einander nahezu proportional laufen, sodass eine Aenderung des constanten Factors q genügt, um in beiden Fällen fast dieselben Zahlenwerthe zu erhalten. Mit

$$A = q\nu \frac{a}{2b^2} M\,,$$

$M =$ Modulus der Brigg'schen Logarithmen ,

können wir schreiben

$$(17) \qquad P = \operatorname{Log} \frac{J_1}{J} = A\,\Phi(b\cos\vartheta) + A\cdot\frac{ab}{2}\left(\frac{\cos\vartheta}{2b}+\Phi_2 \sin\vartheta^2\right),$$

$$\Phi_2 = \sqrt{2}\,\Phi(\sqrt{2}b\cos\vartheta)\,.$$

Um numerische Werthe für a und b zu erhalten, aus denen die Absorption für eine Flachlandstation hergeleitet werden soll, genügt es, die Formel (14) an die mittlere Refraction einer der gebräuchlichen Tafeln anzuschliessen; wir wählen die von Herrn Gyldén für Pulkowa entworfene. Setzt man in (14) $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so erhält man als Zenith- und Horizontconstante

$$Z = \lim\,(R \operatorname{cotg} \vartheta) \text{ für } \vartheta = 0$$
$$= a\Phi(b)\,,$$

$$H = \lim R \text{ für } \vartheta = \frac{\pi}{2}$$
$$= a\,\Phi(o) = a\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

Mit den Gyldén'schen Werthen

$$\operatorname{Log} Z = 1.760\;320$$
$$\operatorname{Log} H = 3.311\;860$$

findet man leicht

$$\operatorname{Log} a = 3.364\;315$$
$$\operatorname{Log} b = 1.302\;427$$

(Z, H und a in Bogensecunden). Zahlenwerthe der hiermit nach (14) gerechneten Refraction enthält die dritte Columne des folgenden Täfelchens, die zweite giebt die Werthe (G) der Gyldén-schen Tafel. Einheit ist die Bogensecunde, Argument hier wie im Folgenden stets die scheinbare Zenithdistanz ϑ.

ϑ	(G)	R	(G) — R	ϑ	(G)	R	(G) — R
0°	0″.00	0″.00	0″.00	85°	585″.0	582″.4	+ 2″.6
60	99.40	99.38	+ 0.02	86	696.7	693.0	3.7
70	156.86	156.78	0.08	87	853.4	848.3	5.1
75	211.59	211.39	0.20	87.5	956.9	951.0	5.9
80	315.51	314.92	0.59	88	1084.4	1077.6	6.8
81	348.60	347.84	0.76	88.5	1243.3	1236.0	7.3
82	388.86	387.85	1.01	89	1445.2	1438.0	7.2
83	438.79	437.48	1.31	89.5	1706.3	1700.8	5.5
84	502.20	500.41	1.79	90	2050.5	2050.5	0.0

Als Anschlussobject für die nach (17) zu berechnende Reduction auf das Zenith

$$\mathrm{Log}\,\frac{J_0}{J} = P - P_0$$

soll die von Herrn G. Müller gegebene mittlere Extinctionstabelle für Potsdam[1]) benutzt werden, deren Argument die wahre Zenithdistanz ist. Hieraus sind die Werthe für runde scheinbare Zenithdistanzen entnommen, die in der folgenden Tafel unter M aufgeführt sind; diese Werthe sind Logarithmen von Helligkeitsverhältnissen, nicht Grössenklassen. Schliesst man die Laplace'sche Formel nach der Methode der kleinsten Quadrate an die Müller'schen Zahlen an, so erhält der constante Factor einen Werth, der etwa für $\vartheta = 85°$ Uebereinstimmung zwischen Tafel und Formel ergiebt[2]). Um die wiederholte Anwendung der M. d. kl. Qu. zu ersparen, mag einfach $\vartheta = 85°$ als Coincidenzstelle zwischen Tafel und Formel festgesetzt werden. Die Formel (17) giebt dann

$$\mathrm{Log}\,A = 0.44282$$

und die unter H zusammengestellten Werthe von $P - P_0$. Zur

1) Publikationen des Astrophys. Observ. zu Potsdam, Band III, p. 285.
2) Vgl. Seeliger, Ueber die Extinction des Fixsternlichtes in der Atmosphäre; Berichte der k. bayr. Akademie d. Wissensch. 1891, Bd. XXI.

Vergleichung mit der Laplace'schen Theorie sind unter L die nach der Formel

$$P = B\Phi(b\cos\vartheta)\,,$$
$$\mathrm{Log}\,B = 0.49185$$

berechneten Werthe von $P - P_0$ aufgeführt.

ϑ	M	H	L	$M-H$	$M-L$
0°	0	0	0	0	0
20	0.004	0.005	0.005	− 1	− 1
40	0.024	0.023	0.024	+ 1	0
50	0.048	0.042	0.043	+ 6	+ 5
60	0.092	0.076	0.077	+ 16	+ 15
70	0.180	0.146	0.147	+ 34	+ 33
75	0.261	0.215	0.216	+ 46	+ 45
80	0.394	0.350	0.352	+ 44	+ 42
81	0.432	0.394	0.395	+ 38	+ 37
82	0.477	0.447	0.448	+ 30	+ 29
83	0.533	0.513	0.514	+ 20	+ 19
84	0.607	0.597	0.598	+ 10	+ 9
85	0.707	0.707	0.707	0	0
86	0.846	0.856	0.855	− 10	− 9
87	1.045	1.068	1.062	− 23	− 17
87.5	1.176	1.209	1.200	− 33	− 24

Die Vergleichung der Widersprüche zeigt, dass die Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung erst in den ganz hohen Zenithdistanzen merklich wird; der Grund dafür ist bereits genannt. Die systematische Abweichung zwischen Theorie und Beobachtung, namentlich um $\vartheta = 75°$ herum, bleibt somit für die verbesserte Laplace'sche Formel bestehen; die geringe Differenz zwischen H und L hat sogar entschieden die Tendenz, den Anschluss noch zu verschlechtern. Die Zahlen L weichen von denen, die Herr Seeliger a. a. O. p. 251 giebt, um geringe Beträge ab, die sich aus der Benutzung verschiedener Refractionstafeln erklären. Die Transmissionscoefficienten $p = 10^{-P_0}$ ergeben sich für H und L resp. zu $p = 0.838$ und 0.837.

Bei der Refraction (14) und der daraus folgenden Absorption (17) ist die Höhe der Atmosphäre sehr gross oder unendlich angenommen, d. h. die Glieder mit $h = e^{-cc}$ vernachlässigt; wir wollen versuchen, ob durch deren Mitnahme der Anschluss verbessert wird. Hierzu genügt es, das Glied erster Ordnung zu vervollständigen, da nach der eben gewonnenen Ueberzeugung die Einführung der Glieder höherer Ordnung nichts ändert.

Statt (15) können wir, wenn die Glieder mit a^1 herausgesucht werden, schreiben

$$(18)\quad \frac{1}{q\nu}\log\frac{J_1}{J} = -\log\mu\,.\cos\vartheta + \operatorname{cosec}\vartheta\int\frac{\nu'^2}{\nu^2}\,dR' - R\sin\vartheta,$$

wo für R der Ausdruck (13), und $\log\mu = \frac{a}{2b}(1-h)$ zu setzen ist. Bezeichnet man für den Moment den Ausdruck $\Phi(x) - h\Phi(x_1)$ durch Ψ, so ist

$$R = a\sin\vartheta\,\Psi$$

$$\int\frac{\nu'^2}{\nu^2}\,dR' = \int_0^\infty \frac{a\sin\vartheta}{2}\,\frac{e^{-w}\,dw}{\sqrt{w+x^2}}\left(1+\frac{w}{b^2}\right)$$

$$= a\sin\vartheta\left\{\Psi + \frac{1}{b^2}\left[\Psi\left(\frac{1}{2}-x^2\right)+\frac{x}{2}-\frac{hx_1}{2}\right]\right\},$$

$$\frac{1}{q\nu}\log\frac{J_1}{J} = -\frac{a}{2b^2}(1-h)\,x + a\Psi\left(\frac{1}{2b^2}+\sin\vartheta^2\right)$$

$$+\frac{a}{2b^2}(x-hx_1) - a\sin\vartheta^2\,\Psi$$

$$= \frac{a}{2b^2}\Psi - \frac{a}{2b^2}h(x_1-x).$$

In den Gliedern höherer Ordnung $(a^2, a^3, \ldots)$ würden die Ausdrücke

$$\Psi_2 = \Phi_2(x) - h^2\Phi_2(x_1),$$
$$\Psi_3 = \Phi_3(x) - h^3\Phi_3(x_1)$$

. . . . .

auftreten. Benutzen wir wieder den durch (11) eingeführten Winkel ω, so wird

$$x_1 - x = c\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}$$

und wir erhalten die Absorptionsformel

$$(19)\quad \mathrm{Log}\,\frac{J_1}{J} = A\Psi - Ahc\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}$$

$$= A\left[\Phi(c\,\mathrm{cotg}\,\omega) - h\Phi(c\,\mathrm{cosec}\,\omega) - hc\,\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2}\right].$$

Auch hier also, im Fall endlicher Atmosphärenhöhe, finden wir ausser der Laplace'schen Formel ein Zusatzglied (das mit $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$); ein ähnliches Glied hat Maurer in seiner Inauguraldissertation[1]) aufgestellt, ohne übrigens in der Ableitung über den herkömmlichen Grad von Strenge hinauszugehen.

Schliesst man die Formel (13) im Zenith und Horizont an eine gegebene Tafel an, so hat man zwei Gleichungen

$$Z = a\left[\Phi(b) - h\Phi(b_1)\right],$$

$$H = a\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - h\Phi(c)\right]$$

zur Bestimmung der drei Parameter. Den unbestimmt bleibenden dritten kann man zur Erfüllung einer dritten Coincidenz (zu empfehlen ein Werth in der Nähe von $\vartheta = 87^\circ$) oder sonstwie zur Verbesserung des Anschlusses benutzen. Ich erhalte mit den Werthen

$$\operatorname{Log} a = 3.368710 \quad \operatorname{Log} b = 1.290727 \quad \operatorname{Log} c = 0.260000,$$

woraus

$$\varphi = 5^\circ 19' 22'' \quad \operatorname{Log} b_1 = 1.292603 \quad \operatorname{Log} h = 8.56192$$

und eine Atmosphäre von 29.5 km Höhe folgt[2]), die hier unter R zusammengestellten Werthe der Formel (13), deren Abweichung von (G), gegenüber den oben mitgetheilten Werthen, stark verkleinert und ihres systematischen Characters entkleidet erscheint.

ϑ	R	$(G)-R$	ϑ	R	$(G)-R$
0°	0.″00	0.″00	87°	853.5	— 0.1
60	99.41	— 0.01	87.5	956.9	0.0
70	156.89	— 0.03	88	1084.1	+ 0.3
75	211.63	— 0.04	88.5	1242.8	+ 0.5
80	315.61	— 0.10	89	1444.4	+ 0.8
83	439.04	— 0.25	89.5	1705.4	+ 0.9
85	585.3	— 0.3	90	2050.5	0.0
86	696.9	— 0.2			

1) Die Extinction des Fixsternlichtes in der Atmosphäre, Zürich 1882.

2) Aus $\nu_1 = \nu \sec\varphi$ ergiebt sich $r_1 - r = \mu r \sec\varphi - r = r(\mu - 1) +$

Hingegen wird der früher gewonnene Anschluss an die Müller'schen Zahlen nur unwesentlich geändert, und auch diesmal im verschlechternden Sinne. Bestimmt man aus (19) A durch Coincidenz in 85° Zenithdistanz, so erhält man

$$\text{Log } A = 0.54616$$

und die unter H angegebenen Zenithreductionen; zur Vergleichung sind unter L wieder die Laplace'schen Werthe, diesmal natürlich nach der Formel

$$\text{Log } \frac{J_1}{J} = B\Psi = B\left[\Phi(c \operatorname{cotg} \omega) - h\,\Phi(c \operatorname{cosec} \omega)\right],$$

$$\text{Log } B = 0.49393$$

gerechnet, daneben gestellt. Die Transmissionscoefficienten für H und L sind 0.840 und 0.838.

ϑ	H	L	$M-H$	$M-L$
0°	0	0	0	0
40	0.023	0.023	+ 1	+ 1
60	0.075	0.076	+ 17	+ 16
70	0.144	0.146	+ 36	+ 34
75	0.213	0.215	+ 48	+ 46
80	0.348	0.351	+ 46	+ 43
83	0.511	0.513	+ 22	+ 20
85	0.707	0.707	0	0
86	0.859	0.855	— 13	— 9
87	1.074	1.063	— 29	— 18
87.5	1.217	1.201	— 41	— 25

Als Ergebniss der angestellten Versuche können wir den Satz aussprechen, *dass die systematischen Widersprüche zwischen der Potsdamer Absorptionstabelle und der Laplace'schen Formel sich nicht durch die (thatsächlich vorhandene) Ungenauigkeit der Formel erklären lassen, sondern bei strengerer Entwicklung eher noch vergrössert werden.*

Für Ueberschlagsrechnungen kann immerhin die Refraction

$+\mu r \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, worin für log μ sein Werth $\frac{a}{2b}(1-h)$, für r der Erdradius oder genauer das Mittel der Hauptkrümmungsradien für den Beobachtungsort (Pulkowa) zu setzen ist.

(14) und die aus ihr folgende Absorption (17) als genügende Annäherung angesehen werden. Ich gebe deshalb anhangsweise die Formeln für die Refraction und Absorption in beliebiger Höhe, wie sie aus den Entwicklungen dieses Abschnitts folgen. Gegeben sind a und b; mit Werthen des Arguments $\frac{\nu'}{\nu}$ berechnet man daraus

$$b' = b\frac{\nu'}{\nu}, \quad w = b'^2 - b^2, \quad a' = a\frac{\nu'}{\nu}e^{-w},$$

$$\log\mu = \frac{a}{2b}, \quad \log\mu' = \frac{a'}{2b'} = \log\mu\cdot e^{-w}.$$

Die Kenntniss von μ' $\left(\text{als Function von}\frac{\nu'}{\nu}\right)$ erlaubt, allerdings nur numerisch, auf das Radienverhältniss $\frac{r'}{r} = \frac{\nu'}{\nu}\cdot\frac{\mu}{\mu'}$ oder auf die Höhe $r' - r$ als unabhängige Variable überzugehen; wir denken uns zu jeder beliebigen Höhe das zugehörige $\frac{\nu'}{\nu}$ gefunden. Ist ϑ die Zenithdistanz des Strahles am Beobachtungsorte, ϑ' die desselben Strahles in der Höhe $r' - r$, so gilt weiter

$$\nu'\sin\vartheta' = \nu\sin\vartheta,$$

$$R = a\sin\vartheta\,\Phi(b\cos\vartheta), \quad R' = a'\sin\vartheta'\,\Phi(b'\cos\vartheta'),$$

R und R' die Refractionen am Beobachtungsort und in der Höhe $r' - r$. Für die entsprechenden Lichtintensitäten J und J' (J_1 ist die ursprüngliche Intensität) folgt

$$\frac{1}{A}\operatorname{Log}\frac{J_1}{J} = \Phi(b\cos\vartheta) + \frac{ab}{2}\left[\frac{\cos\vartheta}{2b} + \sin\vartheta^2\,\Phi_2(b\cos\vartheta)\right],$$

und dasselbe mit Accenten; hierbei ist A bekannt und

$$A' = Ae^{-w}.$$

Ein Anschluss von R' an Refractionsbeobachtungen einer Höhenstation würde natürlich nicht genauer sein als der Anschluss von R an Gyldén oder Bessel; ebenso würde vermuthlich jeder Anschluss zwischen Absorptionsformel und -tafel auf Höhenstationen Widersprüche von der Art und Ordnung der $M - L$ oder $M - H$ übrig lassen. Die Extinctionstabelle für den

Säntis, die Herr G. Müller im VIII. Bande der Potsdamer Publicationen gegeben hat, ist selbst nach der Laplace'schen Formel berechnet, also nicht wie die Potsdamer Tafel als directes Resultat der Beobachtungen anzusehen; wir kommen hierauf zurück.

Für die horizontale Refraction und Absorption $\left(\vartheta' = \frac{\pi}{2}\right)$ in der Höhe $r' - r$ ergeben sich die Formeln

$$H' = a' \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\operatorname{Log}(J_1 : J'_H) = A' \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 + \frac{a'b'}{\sqrt{2}}\right).$$

Diese Gleichungen mit 2 multiplicirt, geben die Ablenkung und Schwächung, die ein Lichtstrahl, der in der Höhe $r' - r$ horizontal steht, beim Durchgange durch die Erdatmosphäre erleidet, also Grössen, die in der Theorie der Mondfinsternisse gebraucht werden.

Für den Transmissionscoefficienten p' in beliebiger Höhe findet man

$$\operatorname{Log} \frac{1}{p'} = A'\left[\Phi(b') + \frac{a'}{4}\right].$$

Endlich wollen wir noch den Druck P berechnen. Aus der Differentialgleichung

$$dP = -g D dr$$

(g Schwere, D Dichtigkeit) folgt durch Integration

$$P = \int_r^{r_1} g' D' dr'$$

und wenn wir $gr^2 = \text{constans}$, $D : (\mu - 1) = \text{constans}$ setzen,

$$P = \frac{gr^2 D}{\mu - 1}\int \frac{\mu' - 1}{r'^2}\, dr' = C\int \frac{\mu' - 1}{r'^2}\, dr',$$

C eine Constante der Erde und ihrer Atmosphäre. Also

$$\frac{P}{C} = -\int (\mu' - 1)\, d\left(\frac{1}{r'}\right) = \frac{\mu - 1}{r} + \int \frac{d\mu'}{r'},$$

$$\frac{P\nu}{C} = \mu(\mu - 1) + \int \frac{\nu}{\nu'} \mu'^2 d \log \mu'.$$

Die rechte Seite lässt sich wieder nach Potenzen von a entwickeln; man hat

$$-\int (\log \mu')^\delta \frac{\nu}{\nu'} d \log \mu' = \left(\frac{a}{2b}\right)^{\delta+1} \int e^{-w-\delta w} dw \frac{b}{\sqrt{b^2 + w}}$$

$$= a \cdot \left(\frac{a}{2b}\right)^\delta \frac{\Phi_{\delta+1}(b)}{\delta + 1},$$

$$-\int \frac{\nu}{\nu'} \mu'^2 d \log \mu' = -\sum \frac{2^\delta}{\Pi(\delta)} \int \frac{\nu}{\nu'} (\log \mu')^\delta d \log \mu'$$

$$= \sum \frac{2^\delta}{\Pi(\delta + 1)} a \cdot \left(\frac{a}{2b}\right)^\delta \Phi_{\delta+1}(b).$$

Damit folgt

$$\frac{P\nu}{C} = \frac{a}{b}\left[\frac{1}{2} - b\Phi(b)\right] + \frac{a^2}{2b^2}\left[\frac{3}{4} - b\Phi_2(b)\right] + \frac{a^3}{6b^3}\left[\frac{7}{8} - b\Phi_3(b)\right] + \cdots$$

und entsprechend P'. Da b in der Nähe der Zahl 20 liegt, können wir für $\Phi(b)$ die semiconvergente Reihe

$$\Phi(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{8x^5} - \cdots$$

anwenden; nimmt man dann nur die Hauptglieder mit, so hat man

$$\frac{P\nu}{C} \sim \frac{a}{4b^3} + \frac{a^2}{8b^2},$$

ebenso für den Transmissionscoefficienten aus (15) oder (16)

$$-\frac{1}{q\nu} \log p = \frac{a}{2b^2} \Phi(b) + \frac{1}{\mu} - 1 + \log \mu$$

$$\sim \frac{a}{4b^3} + \frac{a^2}{8b^2},$$

also näherungsweise

$$-\log p = \frac{q}{C} \nu^2 P,$$

(20) $$\log p' : \log p = \nu'^2 P' : \nu^2 P = \nu'^2 B' : \nu^2 B,$$

wenn B und B' die Barometerstände bezeichnen. Nach Laplace verhalten sich die Logarithmen der Transmissionscoefficienten in verschiedener Höhe wie die Barometerstände; wir erhalten hier eine etwas andere Beziehung, wonach die Durchsichtigkeit der Luft mit wachsender Höhe etwas rascher zunehmen würde. Die Differenz ist übrigens numerisch unerheblich, solange es sich um zugängliche Höhen handelt.

II.

Zur Erklärung der systematischen Widersprüche zwischen Theorie und Beobachtung — Widersprüche, deren Realität auch durch eine Vergleichung der Laplace'schen Formel mit der Seidel'schen Extinctionstabelle[1]) bestätigt wird — bleibt, da die Vervollständigung der Theorie nichts ergeben hat, nur die Anfechtung ihrer Voraussetzungen übrig. In der That kann man fragen, ob die Einführung des Zusammenhanges zwischen Refraction und Absorption ein Fortschritt war; zunächst ist sie eine blosse Hypothese, die weder zu ganz einfachen Rechnungsvorschriften noch zu einer genügenden Darstellung der Beobachtungen führt. Abgesehen davon hat die Gleichsetzung zwischen absorbirender und brechender Kraft sogar elementare Thatsachen gegen sich; es ist zweifellos, dass sich die Atmosphäre als lichtbrechendes, lichtschwächendes, lichtreflectirendes Medium ganz verschieden verhält. Die optischen »Dichtigkeiten«, die jeder dieser Reactionen entsprechen, sind nicht nothwendig identisch, und sind wiederum verschieden von Dichtigkeiten, die auf anderem Wege (thermisch, mechanisch) gefunden werden. Es genügt hier, an Thatsachen zu erinnern wie die, dass sich die Höhe der Atmosphäre aus dem Erscheinen von Meteoren zu mehr als 160 km, aus dem Dämmerungsbogen zu 70 km, aus Anschluss an Refractionsbeobachtungen unter Umständen zu 30 km ergiebt; es genügt, auf den verschiedenen Einfluss der

---

1) Die Seidel'sche Tafel ist nur theilweise zur Vergleichung mit Formeln geeignet, da sie aus heterogenem Material zusammengesetzt, im Gange der Differenzen starke Anomalien zeigt. Aus diesem Grunde ist bei den Anschlüssen die besser ausgeglichene Müller'sche Tafel benutzt und die Seidel'sche nur gelegentlich zur Controlle herangezogen worden.

meteorologischen Vorgänge hinzuweisen, wonach z. B. hoher Druck bei trockener Luft vorzugsweise auf die Refraction, Feuchtigkeit und Staubgehalt vorzugsweise auf die Absorption wirkt. Man braucht nur an locale Anhäufungen fein vertheilten Meteorstaubes zu denken, um es ganz plausibel zu finden, dass dieselbe Luftschicht einen geringen Beitrag zur Strahlenbrechung, einen sehr merklichen zur Extinction liefert. Erwägungen dieser Art führen dazu, die Abhängigkeit der Absorption von der Höhe als unbekannte Function anzusetzen und aus den Beobachtungen zu erschliessen, statt umgekehrt sich durch eine willkürliche Hypothese Rechnung und Anschluss zu erschweren. Wir haben es dann in der Hand, selbständig, d. h. ohne Beziehung zur Refraction, verschiedene Annahmen über die Constitution der absorbirenden Atmosphäre zu prüfen und, statt mit Reihenentwicklungen, mit geschlossenen Formen zu operiren.

In Zeichen übersetzt, läuft dies daraus hinaus, in der Grundformel (2) oder

$$d \log J = f ds$$

nicht mehr $f = q(\mu - 1)$ zu setzen, sondern f als unbekannte Function von r oder μ oder ν anzusehen. Die Refractionstheorie, die nun als selbständiges Problem zurücktritt, liefert μ oder r als Function von ν; wir können auch hier ν als unabhängige Variable zu Grunde legen und $f = f(\nu)$ setzen. Im Uebrigen behalten alle Zeichen ihre Bedeutung; auch die Festsetzung bezüglich der accentuirten und unaccentuirten Buchstaben bleibe dieselbe. Die Grenze der absorbirenden Atmosphäre, durch den Index 1 bezeichnet (also $f_1 = 0$), fällt nicht nothwendig mit der Grenze der lichtbrechenden ($\mu_1 = 1$) zusammen. Es folgt

$$\log \frac{J_1}{J} = \int_s^{s_1} f' ds' = \int_r^{r_1} f' \sec \vartheta' dr'$$

$$= \int f' \frac{dr'}{d\nu'} \nu' d\nu' (\nu'^2 - \nu^2 \sin \vartheta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

oder

$$\log \frac{J_1}{J} = \int \frac{F \nu' d\nu'}{\sqrt{\nu'^2 - \nu^2 \sin \vartheta^2}}, \tag{21}$$

wo

(22) $$F = f\frac{dr}{d\nu} = \frac{f}{\mu}\,\frac{d\log r}{d\log\nu} = \frac{f}{\mu}\left(1 - \frac{d\log\mu}{d\log\nu}\right).$$

Diese Formel giebt f, die »absorbirende Kraft«, als Function von ν, sobald aus der Refractionstheorie μ, aus der Absorptionstheorie F als Function von ν bekannt ist. Auf den directen Zusammenhang zwischen f und ν (oder f und r) braucht also erst am Schlusse eingegangen zu werden, während zur Darstellung von Absorptionsbeobachtungen nur die Grösse F, die als einfacher Factor unter dem Integralzeichen auftritt, als Function von ν bekannt sein muss. Aus der Bedeutung von f und der Relation (22) ergeben sich von vornherein beschränkende Bedingungen für F; es muss im Intervall ν bis ν_1 $F > 0$ und an der Grenze $\nu = \nu_1$ $F_1 = 0$ sein. Denn in unsererer Erdatmosphäre ist $\frac{dr}{d\nu} > 0$, f hat also das Zeichen von F und würde es mit ihm zugleich wechseln; negative Werthe der Absorption sind aber in einer dunklen Atmosphäre unzulässig. Uebrigens zeigt die Refractionstheorie, dass $\frac{dr}{d\nu}$ stets in der Nähe von 1 (etwa zwischen 1.0 und 1.1) liegt; es sei daher erlaubt, der Kürze wegen nebst f auch die ähnlich verlaufende Function F als absorbirende Kraft zu bezeichnen.

Aus (21) folgt, dass eine Function u, die den Verlauf der Zenithreduction

(23) $$u = \log\frac{J_0}{J} = \int\frac{F'\nu'\,d\nu'}{\sqrt{\nu'^2 - \nu^2\sin\vartheta^2}} - \int F'd\nu'$$

in verschiedenen Zenithdistanzen geben soll, einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügen muss, die ein Analogon ist zu der von Bruns aufgestellten partiellen Differentialgleichung der Refraction. Die Grösse F' ist bloss von ν', nicht von ν (dem Orte des Beobachters) abhängig, muss wenigstens so dargestellt werden können; daher ist

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} = -F\sec\vartheta + F + \frac{\partial u}{\partial\sin\vartheta}\,\frac{\sin\vartheta}{\nu},$$

(24) $$F\nu(\sec\vartheta - 1) = \operatorname{tg}\vartheta\,\frac{\partial u}{\partial\vartheta} - \frac{\partial u}{\partial\log\nu}.$$

Diese partielle Differentialgleichung der Absorption löst die Aufgabe, zu einem vorgelegten u das zugehörige F zu finden. Gegeben ist u als Function von ϑ, mit Parametern $a, b, c, \ldots$, die für den Beobachtungsort bestimmte numerische Werthe annehmen. Man sieht sie als unbekannte Functionen von ν an und bildet in diesem Sinne

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{da}{d\nu} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{db}{d\nu} + \cdots,$$

sowie den Ausdruck

$$\left(\operatorname{tg}\vartheta\,\frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{\partial u}{\partial \log \nu}\right) : (\sec\vartheta - 1) = F\nu,$$

der von ϑ unabhängig sein muss. Diese Bedingung liefert eine Reihe gewöhnlicher Differentialgleichungen für $a, b, c \ldots$ und nach deren Integration die Ausdrücke von F und $u(\nu, \vartheta)$; wenn die gewählte Form für u eine zulässige war, so muss durch Einsetzung von F in das Integral (23) wiederum $u(\nu, \vartheta)$ reproducirt werden. Die Grössen $F, a, b, c, \ldots$ gehen durch Vertauschung von ν mit ν' in $F', a', b', c', \ldots$ über; führt man an Stelle der Integrationsconstanten, die aus der Lösung jener gewöhnlichen Differentialgleichungen resultiren, die Anfangswerthe $a, b, c, \ldots$ ein, so nimmt die erhaltene Constitution der Atmosphäre die Form einer »Hauptlösung für $\nu' = \nu$« an, eine Form, in der sie scheinbar, aber auch nur scheinbar vom Beobachtungsorte ν abhängig wird. — Die numerischen Werthe der $a, b, c, \ldots$ müssen überdies so beschaffen sein, dass F die oben ausgesprochenen Bedingungen erfüllt.

Ich verfolge den hier angegebenen Weg nicht weiter, weil ich dabei nur die Entwicklungen aus meinen Arbeiten über Refraction [1]) zu wiederholen hätte. Der numerische Zusammenhang zwischen Refraction und Absorption, wie ihn Laplace voraussetzt, hat sich hier zu einer formellen Analogie erweitert, die dazu dienen kann, Resultate des einen Gebietes auf das andere zu übertragen; es handelt sich im Folgenden, wie gleich bemerkt werden soll, nur um die Gestalt der Functionen, nicht um die Werthe der Parameter. Vergleichen wir z. B. (21) mit der Refractionsformel

1) Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung I. II. Berichte der K. S. Gesellschaft er Wissensch. 1891 und 1893.

$$\frac{R}{\nu \sin \vartheta} = \int -\frac{d \log \mu'}{\nu' d\nu'} \frac{\nu' d\nu'}{\sqrt{\nu'^2 - \nu^2 \sin \vartheta^2}},$$

so erhalten wir als erste Methode, zu jeder zulässigen Refractionsformel eine entsprechende Absorptionsformel zu finden, die folgenden Gleichungen:

$$(25) \quad \begin{cases} F = -\dfrac{d \log \mu}{\nu d\nu} + \left(\dfrac{d \log \mu}{\nu d\nu}\right)_1, \\ \log \dfrac{J_1}{J} = \dfrac{R}{\nu \sin \vartheta} + \left(\dfrac{d \log \mu}{\nu d\nu}\right)_1 (\nu_1 \cos \vartheta_1 - \nu \cos \vartheta). \end{cases}$$

Hier kann man sogar die Constante $\left(\dfrac{d \log \mu}{\nu d\nu}\right)_1$ direct aus dem Ausdruck für R bilden, ohne erst die zugehörige Constitution der Atmosphäre aufsuchen zu müssen, nämlich durch Differentiation nach ϑ mit darauf folgender imaginärer Substitution

$$\sin \vartheta = \sec \varphi .$$

Ich will mich nicht mit einer allgemeinen Behandlung dieses Nebenpunktes aufhalten; für zwei specielle, aber sehr umfassende Formen von R ist das Nöthige in den citirten Abhandlungen zu finden. Es ergiebt sich: wenn R von der Form ist

$$R = \text{ungerade Function von } \tau = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2},$$

oder

$$R \operatorname{cosec} \vartheta = \text{ungerade Function von } \sigma = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2},$$

wo ψ und ω durch die Gleichungen (11) oder (12) definirt sind, so wird einfach

$$\varrho = -\left(\frac{d \log \mu}{d \log \nu}\right)_1 = \operatorname{cotg} \varphi \left| \frac{dR}{d\tau} \right|_{\tau^2 = -1}$$

$$= \sec \varphi \operatorname{cosec} \varphi \left| \frac{d(R \operatorname{cosec} \vartheta)}{d\sigma} \right|_{\sigma^2 = -1}.$$

Daraus folgt

$$(26) \quad \begin{cases} \nu \log \dfrac{J_1}{J} = R \operatorname{cosec} \vartheta - \varrho \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{tg} \dfrac{\omega}{2} \\ \qquad = R \operatorname{cosec} \vartheta - \sigma \left| \dfrac{d(R \operatorname{cosec} \vartheta)}{d\sigma} \right|_{\sigma = i}. \end{cases}$$

Unter Umständen kann man den Parametern von R die Bedingung $\varrho = 0$ auferlegen, soweit sie nicht etwa identisch erfüllt ist; dann reducirt sich (26) auf

$$\nu \log \frac{J_1}{J} = R \operatorname{cosec} \vartheta \,, \tag{27}$$

eine Formel, die, gleichlautend mit der Laplace'schen, den viel weiteren Sinn einer Functionalbeziehung, eines »heuristischen Princips« hat. Um zu erkennen, dass daneben andere solche Principien gleichberechtigt sind, bilde man folgende Ausdrücke

$$\log \frac{J_1}{J} = -F\nu \cos \vartheta - \int d F' \sqrt{\nu'^2 - \nu^2 \sin \vartheta^2} \,,$$

$$\int_0^\vartheta \nu R \cos \vartheta \partial \vartheta = \int d \log \mu' \left(\sqrt{\nu'^2 - \nu^2 \sin \vartheta^2} - \nu'\right) ,$$

$$\int \frac{\nu'^2}{\nu^2} d R' = -\int \frac{\sin \vartheta}{\nu} d \log \mu' \sqrt{\nu'^2 - \nu^2 \sin \vartheta^2} + R \sin \vartheta^2 \,;$$

man erhält daraus als zweiten zulässigen Uebergang von Refraction zu Absorption

$$F = \log \mu$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \log \frac{J_1}{J} &= -F \cos \vartheta - \int \frac{\nu'}{\nu} d F' - \int_0^\vartheta R \cos \vartheta \partial \vartheta \\ &= -F \cos \vartheta + \operatorname{cosec} \vartheta \int \frac{\nu'^2}{\nu^2} d R' - R \sin \vartheta . \end{aligned}\right. \tag{28}$$

In der letzten Gestalt ist die (strenge) Formel (28) mit der Approximation (18) gleichlautend, der Bedeutung nach aber ebenso unterschieden wie (27) von der Laplace'schen Formel. In der zweiten Formel (28) treten die Grössen F und $\int \frac{\nu'}{\nu} dF'$ auf, die wiederum durch imaginäre Substitution direct aus R gebildet werden können; man hat

$$F = [R \operatorname{cotg} \vartheta]$$

$$-\int \frac{\nu'}{\nu} d F' = \left[Z + \int_0^\vartheta \cos \vartheta d (R \operatorname{cotg} \vartheta)\right] ,$$

wo Z wie früher die erste Zenithconstante und die Einschliessung in [ ] die Substitution $\operatorname{tg}\vartheta = i$ bedeutet. Damit kann man (28) auch so schreiben

$$S = R \operatorname{cotg} \vartheta, \qquad T = \int_0^\vartheta \cos\vartheta \frac{dS}{d\vartheta} d\vartheta,$$

$$(29) \qquad \frac{1}{\nu} \log \frac{J_1}{J} = S \cos\vartheta - [S] \cos\vartheta - T + [T].$$

Denkt man sich R nach Potenzen von $\operatorname{tg}\vartheta$ entwickelt, so würde folgen

$$S = Z - Z' \operatorname{tg}\vartheta^2 + Z'' \operatorname{tg}\vartheta^4 - Z''' \operatorname{tg}\vartheta^6 + \cdots,$$
$$F = Z + Z' + Z'' + Z''' + \cdots$$
$$-\int \frac{\nu'}{\nu} dF' = Z + \frac{2}{1} Z' + \frac{2 \,.\, 4}{1 \,.\, 3} Z'' + \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6}{1 \,.\, 3 \,.\, 5} Z''' + \cdots$$

Ein einfacher Specialfall zu unseren allgemeinen Formeln ist

$$(30) \qquad \begin{cases} R = a \sin\vartheta [\Phi(x) - h\Phi(x_1)], \\ \log \frac{J_1}{J} = A[\Phi(x) - h\Phi(x_1) - h(x_1 - x)], \end{cases}$$

der sowohl zu (25) wie zu (28) gehört; man würde erhalten

$$\text{nach (25)} \quad A = \frac{a}{\nu}, \qquad A' = A e^{-w},$$

$$\text{nach (28)} \quad A = \frac{a\nu'^2}{2b}, \qquad A' = A e^{-w},$$

also bis auf einen constanten Factor beidemal dasselbe. Die Bezeichnungsweise ist die frühere.

Ein Beispiel zu (26) bildet die rational gebrochene Form

$$(31) \qquad \begin{cases} R = a \sin\vartheta \frac{\sigma}{1 + b\sigma^2}, \\ \nu \log \frac{J_1}{J} = \frac{a\sigma}{1 + b\sigma^2} - a\sigma \frac{1 + b}{(1 - b)^2}. \end{cases}$$

Um dieselbe Formel durch τ auszudrücken, hat man die Relationen

$$\cos\omega = \cos\varphi\cos\psi\,,\quad \sigma^2 = \frac{\tau^2+\lambda^2}{1+\tau^2\lambda^2}\,,$$

$$\sin\vartheta = \frac{\tau}{\sigma}\,\frac{1+\lambda^2}{1+\tau^2\lambda^2}\,,\quad \lambda = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

zu berücksichtigen und erhält, wenn man zwei andere Constanten einführt,

$$(32)\quad \begin{cases} R = \dfrac{\alpha\tau}{1+\beta\tau^2}\,, \\ \nu\sin\vartheta\log\dfrac{J_1}{J} = \dfrac{\alpha\tau}{1+\beta\tau^2} - \dfrac{\alpha\tau}{1+\lambda^2\tau^2}\,\dfrac{1+\beta}{(1-\beta)^2}\,\dfrac{(1-\lambda^2)^2}{1+\lambda^2}\,. \end{cases}$$

Geht man in dieser Gestalt zu einer unendlich hohen Atmosphäre über, so wird

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\,,\quad \lambda = 1\,,\quad \tau = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\,,$$

$$R = \frac{\alpha\tau}{1+\beta\tau^2}\,,$$

$$\nu\log\frac{J_1}{J} = \frac{\alpha}{2}\,\frac{1+\tau^2}{1+\beta\tau^2}\,,\quad \log\frac{J_0}{J} = \frac{\alpha(1-\beta)}{2\nu}\,\frac{\tau^2}{1+\beta\tau^2}$$

oder wieder anders geschrieben

$$(33)\qquad \log\frac{J_0}{J} = \frac{a\tau^2}{1+b\tau^2}$$

Setzt man statt (33) ein Aggregat solcher Glieder an, so folgt

$$\log\frac{J_0}{J} = \sum_\alpha \frac{a_\alpha\tau^2}{1+b_\alpha\tau^2}$$

oder auf gleichen Nenner gebracht

$$(34)\qquad \log(J_0 : J)$$
$$= (a'\tau^2 + a''\tau^4 + \cdots + a^n\tau^{2n}) : (1 + b'\tau^2 + b''\tau^4 + \cdots + b^n\tau^{2n}).$$

Behandelt man die Formel (33) nach der partiellen Differentialgleichung (24), so erhält man a, b, F als Functionen von ν durch die Gleichungen

$$b\left(\frac{\nu}{1-b}\right)^2 = \text{constans},\quad \frac{a}{b}\,\frac{1+b}{1-b} = \text{constans},\quad F\nu = \frac{2a}{(1+b)^2}\,.$$

Dies in (21) substituirt, giebt in der That wieder die Formel (33), am einfachsten durch Einführung eines Hülfswinkels. Man setze an:

$$(\alpha)\ \text{für}\ b > 0:\ b = \operatorname{tg}\frac{\beta^2}{2}\,,$$

also

$$\nu \operatorname{tg}\beta = \nu' \operatorname{tg}\beta'\,,\quad \frac{a}{b\cos\beta} = \frac{a'}{b'\cos\beta'}\,,\quad \frac{F}{\sin\beta^3} = \frac{F'}{\sin\beta'^3}$$

und integrire nach β' zwischen den Grenzen 0 und β, resp. β und π, je nachdem β dem ersten ($b < 1$) oder zweiten ($b > 1$) Quadranten angehört.

$$(\beta)\ \text{für}\ 0 > b > -1:\ b = -\operatorname{tg}\frac{\beta^2}{2}\,,$$

also

$$\nu \sin\beta = \nu' \sin\beta'\,,\quad \frac{a\cos\beta}{b} = \frac{a'\cos\beta'}{b'}\,,\quad \frac{F}{\operatorname{tg}\beta^3} = \frac{F'}{\operatorname{tg}\beta'^3}$$

und integrire nach β' zwischen den Grenzen 0 und β. — Der Fall $b < -1$ ist auszuschliessen, weil er für einen Werth von ϑ im ersten Quadranten das Unendlichwerden von $\log\frac{J_0}{J}$ verursacht; beim Grenzfall der Pouillet'schen Formel ($b = -1$) tritt dies im Horizont ein. Bei einem Aggregat von Gliedern wie (33) können die einzelnen a_α, b_α complex werden; dementsprechend sind andere Hülfsgrössen einzuführen, worauf wir hier nicht eingehen.

Wir wollen noch andere Formen für $\log\frac{J_1}{J}$ durch Substitution in (21) herleiten. Setzen wir wie früher

$$\frac{b'}{\nu'} = \frac{b}{\nu}\,,\qquad a'e^{b'b'} = ae^{bb}\,,$$

$$b'^2 - b^2 = w\,,\qquad a' = ae^{-w}\,,$$

$$b\cos\vartheta = x\,,\qquad b_1\cos\vartheta_1 = x_1\,,$$

so wird zunächst

$$\log\frac{J_1}{J} = \int \frac{1}{2} F' \frac{\nu}{b} \frac{dw}{\sqrt{w+x^2}}\,.$$

Die zulässige Annahme

$$F\frac{\nu}{b} = a\sum_\alpha q_\alpha b^{2\alpha}$$

mit den Constanten $q_0, q_1, q_2 \dots$ giebt weiter

$$(35)\quad \begin{cases} \log\frac{J_1}{J} = \int_{\frac{a}{2}}^{} \frac{e^{-w}dw}{\sqrt{w+x^2}} \sum_\alpha q_\alpha (b^2+w)^\alpha \\ = \sum_\alpha p_\alpha \int_{\frac{a}{2}}^{} \frac{e^{-w}dw}{\sqrt{w+x^2}} w^\alpha, \end{cases}$$

wo $p_0, p_1, p_2 \dots$ gewisse Functionen von $q_0, q_1, q_2, \dots$ und ν sind. Für die ersten Glieder erhält man, wenn $h = e^{-w_1}$ als unmerklich angesehen und wieder die Kramp'sche Function benutzt wird,

$$(36)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\int\frac{e^{-w}dw}{\sqrt{w+x^2}} = \Phi(x) = \Phi, \\ \frac{1}{2}\int\frac{e^{-w}w\,dw}{\sqrt{w+x^2}} = \Psi(x) = \Phi\left(\frac{1}{2}-x^2\right)+\frac{x}{2}, \\ \frac{1}{2}\int\frac{e^{-w}w^2dw}{\sqrt{w+x^2}} = X(x) = \Phi\left(\frac{3}{4}-x^2+x^4\right)+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x^3, \\ \dots \qquad \dots \end{cases}$$

Hier mag sogleich eine Bemerkung über die Berechnung dieser Grössen Platz finden. Man hat die semiconvergente Reihe

$$\int\frac{e^{-w}w^\alpha dw}{\sqrt{w+x^2}} = \frac{\Pi(\alpha)}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{\Pi(\alpha+1)}{x^3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{\Pi(\alpha+2)}{x^5} - \dots,$$

aus der hervorgeht, dass bei grossen Werthen von x die Berechnung von Ψ, X, ... nach den geschlossenen Formeln mit Genauigkeitsverlust verbunden ist. Man muss daher Log Φ (x) auf eine oder mehr Stellen genauer haben, als es sonst gebraucht wird. Wo die Tafel dazu nicht ausreicht, muss man entweder direct nach den Reihenentwicklungen rechnen oder indirect die Berechnung von Ψ und X auf die von Φ zurückführen, indem man Quotienten wie die folgenden

$$\sqrt{2x\Psi} : 2x\Phi = 1 + \tfrac{1}{4}x^{-4} - \tfrac{5}{8}x^{-6} + \cdots,$$

$$\sqrt[3]{xX} : 2x\Phi = 1 + \tfrac{1}{2}x^{-4} - \tfrac{17}{6}x^{-6} + \cdots$$

bildet und deren Logarithmen mit ein paar geltenden Ziffern tabulirt. Man reicht z. B. bei fünfstelliger Rechnung mit einer sechsstelligen Tafel von Log Φ und folgendem Hülfstäfelchen aus, das für einige Werthe von Log x die Werthe

$$L_1 = \text{Log}\left(\sqrt{2x\Psi} : 2x\Phi\right), \quad L_2 = \text{Log}\left(\sqrt[3]{xX} : 2x\Phi\right)$$

in Einheiten der fünften Decimale liefert

Log x	L_1	L_2	Log x	L_1	L_2	Log x	L_1	L_2
0.70	14	27	0.80	6	12	0.90	3	5
0.72	12	23	0.82	5	10	0.95	2	3
0.74	10	19	0.84	4	8	1.0	1	2
0.76	8	16	0.86	4	7	1.1	0	1
0.78	7	14	0.88	3	6	1.2	0	0
0.80	6	12	0.90	3	5			

Wir wollen auch eine Form für $\log \frac{J_1}{J}$ kennen lernen, bei der die absorbirende Kraft mit wachsender Höhe zunimmt und nicht an der Grenze, sondern am Beobachtungsorte verschwindet. Setzen wir

$$\frac{b}{v} = \frac{b'}{v'} = \frac{b_1}{v_1},$$

$$a\,e^{-bb} = a'\,e^{-b'b'} = a_1\,e^{-v_1 b}$$

und wieder

$$x = b\cos\vartheta, \qquad x_1 = b_1\cos\vartheta_1$$

so wird

$$\log\frac{J_1}{J} = \int \frac{F'b'db'\,\frac{v}{b}}{\sqrt{b'^2 - b_1^2\sin\vartheta_1^2}}$$

und mit

$$b_1^2 - b'^2 = v\,,\quad b_1^2 - b^2 = c^2\,,\quad e^{-cc} = h\,,\quad F'\frac{v}{b} = a' - a$$

(37) $$\log\frac{J_1}{J} = \int_0^{cc} \frac{a_1}{2}\,\frac{e^{-v}\,dv}{\sqrt{x_1^2 - v}} - a(x_1 - x)$$

$$= a_1\left[\varphi(x_1) - h\varphi(x) - h(x_1 - x)\right].$$

wo die der Kramp'schen Function ähnliche Transcendente

$$(38)\qquad \varphi(x) = \int_0^{xx} \tfrac{1}{2}\frac{e^{-v}\,dv}{\sqrt{x^2 - v}} = e^{-xx}\int_0^{x} e^{uu}\,du$$

eingeführt ist. Diese Function, die in der Praxis seltener vorkommt als $\Phi(x)$, lässt sich für jeden Werth von x in die unbedingt convergente Reihe

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^{-xx\omega}\,x\,d\omega}{\sqrt{1-\omega}} = \sum_\alpha (-1)^\alpha \frac{\Pi(\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha+\frac{1}{2})}\,x^{2\alpha+1},$$

für so grosse Werthe von x, dass e^{-xx} unmerklich wird, in die semiconvergente Reihe

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^3} + \frac{3}{8x^5} + \frac{15}{16x^7} + \cdots$$

entwickeln. Die Formeln (30) und (37) sind Analoga; wird h unmerklich, so gehen sie in

$$\log\frac{J_1}{J} = a\,\Phi(b\cos\vartheta), \qquad \log\frac{J_1}{J} = a_1\,\varphi(b_1\cos\vartheta_1)$$

über; lässt man $c = 0$ und die Aussenfactoren in passender Weise unendlich werden, so nehmen sie die Gestalt

$$(39)\quad \log\frac{J_1}{J} = A\left(\sigma + \frac{\sigma^3}{3}\right), \quad \log\frac{J_1}{J} = A_1\left(\sigma - \frac{\sigma^3}{3}\right), \quad \sigma = \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

an.

Wir kommen auf einige dieser speciellen Anschlussformeln zurück. Zunächst wollen wir noch zwei allgemeinere Formen der Absorption entwickeln, mit denen man, durch Vermehrung der Gliederanzahl, den Anschluss an die Beobachtungen eventuell erzwingen kann, um daraus, in gewissem Masse unabhängig von der Eigenart besonderer Functionen, Schlüsse auf den Verlauf von F zu ziehen. Ihre Quelle haben diese Entwicklungen in den entsprechenden Formeln für die Refraction; es ist deshalb hier nur das Nothwendige wiederholt.

Zwischen $3(n+1)$ Grössen

$$\begin{matrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n+1} \\ b_1 & b_3 & b_5 & \dots & b_{2n+1} \\ c_1 & c_3 & c_5 & \dots & c_{2n+1} \end{matrix}$$

sollen die $2(n+1)$ Relationen

$$(40)\quad \begin{cases} a_{2\beta+1} = \sum_\alpha (2\alpha+1)_{\alpha-\beta} (-1)^{\alpha-\beta} b_{2\alpha+1} \\ \phantom{a_{2\beta+1}} = \sum_\alpha (2\alpha+1)_{\alpha-\beta} c_{2\alpha+1} \end{cases}$$

bestehen, worin die Indices α, β die Werthe $0, 1, \ldots n$ durchlaufen, Π die Facultätsfunction und $(m)_n$ den Binomialcoefficienten

$$(m)_n = \frac{\Pi(m)}{\Pi(n)\,\Pi(m-n)}$$

bedeutet; Glieder, die im Nenner eine Facultät mit negativem ganzzahligen Argument enthalten, verschwinden von selbst. Die Auflösung der Gleichungen (40) nach den b und c ergiebt

$$(41)\quad \begin{cases} \Pi(2\alpha+1)\, b_{2\alpha+1} = \sum_\beta \frac{\Pi(\beta+\alpha)}{\Pi(\beta-\alpha)} (2\beta+1)\, a_{2\beta+1}\,, \\ \Pi(2\alpha+1)\, c_{2\alpha+1} = \sum_\beta \frac{\Pi(\beta+\alpha)}{\Pi(\beta-\alpha)} (-1)^{\beta-\alpha} (2\beta+1)\, a_{2\beta+1}\,. \end{cases}$$

Bezeichnet $P_\beta(x)$ die gewöhnliche, Laplace-Legendre'sche Kugelfunction β^{ter} Ordnung des Argumentes x oder den Coefficienten von u^β in der Entwicklung

$$(1 - 2xu + u^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_\beta u^\beta P_\beta(x)\,,$$

so folgen aus (40) oder (41) die Identitäten

$$(42)\quad \begin{cases} \sum_\beta (2\beta+1)\, a_{2\beta+1} P_\beta(x) = \sum_\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2} (-1)^\alpha b_{2\alpha+1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^\alpha \\ \phantom{\sum_\beta (2\beta+1)\, a_{2\beta+1} P_\beta(x)} = \sum_\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2} c_{2\alpha+1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^\alpha . \end{cases}$$

Die Beziehungen (40) (41) (42) sind die gemeinsame Grundlage für zwei Typen von Refractions- oder Absorptionsformeln.

I. Wir definiren c, a, b als Functionen von ν durch die Gleichungen

$$(43)\quad \begin{aligned} \nu &= \nu_1 \cos\varphi\,, \\ c_{2\alpha+1} &= \gamma_{2\alpha+1} \sin\varphi^{2\alpha+1} \end{aligned}$$

mit den $n+1$ Constanten $\gamma_1, \gamma_3, \cdots \gamma_{2n+1}$. Sodann geben wir der Constitution der Atmosphäre die Form

$$F\nu_1 \sin\varphi = \sum_\beta (2\beta+1) a_{2\beta+1} = \sum_\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2} c_{2\alpha+1},$$

oder wenn wir ν mit ν' vertauschen:

$$F'\nu_1 \sin\varphi' = \sum_\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2} c'_{2\alpha+1}$$

$$= \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} \sum_\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2} c_{2\alpha+1} \left(\frac{\sin\varphi'^2}{\sin\varphi^2}\right)^\alpha,$$

$$F'\nu_1 \sin\varphi = \sum_\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2} c_{2\alpha+1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^\alpha$$

(44) $$= \sum_\beta (2\beta+1) a_{2\beta+1} P_\beta(x),$$

wo

$$\frac{1+x}{2} = \frac{\sin\varphi'^2}{\sin\varphi^2},$$

(45) $$x = \frac{2\sin\varphi'^2}{\sin\varphi^2} - 1 = 1 - 2\operatorname{cotg}\varphi^2 \left(\frac{\nu'^2}{\nu^2} - 1\right).$$

Wir führen x als Integrationsvariable statt ν' ein, zugleich statt ϑ den Winkel ω und die Grösse $\sigma = \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$. Dann wird

$$\nu'^2 - \nu^2 \sin\vartheta^2$$

$$= \nu^2\left(\frac{\nu'^2}{\nu^2} - 1 + \cos\vartheta^2\right) = \nu^2 \operatorname{tg}\varphi^2 \left(\frac{1-x}{2} + \operatorname{cotg}\omega^2\right)$$

$$= \left(\frac{\nu \operatorname{tg}\varphi}{2\sigma}\right)^2 (1 - 2x\sigma^2 + \sigma^4),$$

$$\frac{F'\nu' d\nu'}{\sqrt{\nu'^2 - \nu^2\sin\vartheta^2}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} F'\nu_1 \sin\varphi\, dx \cdot \sigma(1 - 2x\sigma^2 + \sigma^4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -dx \cdot \sigma(1 - 2x\sigma^2 + \sigma^4)^{-\frac{1}{2}} \sum_\beta (\beta + \tfrac{1}{2}) a_{2\beta+1} P_\beta(x).$$

Setzt man für x seine Grenzen, so folgt

$$\log\frac{J_1}{J} = \int_{-1}^{+1} \sigma\,dx(1 - 2x\sigma^2 + \sigma^4)^{-\frac{1}{2}} \sum_\beta (\beta + \tfrac{1}{2}) a_{2\beta+1} P_\beta(x)\,,$$

und wenn man berücksichtigt, dass

$$\int_{-1}^{+1} (\beta + \tfrac{1}{2}) P_\alpha(x) P_\beta(x)\,dx = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ für } \begin{Bmatrix} \alpha \neq \beta \\ \alpha = \beta \end{Bmatrix},$$

also

$$(46) \qquad \int_{-1}^{+1} (\beta + \tfrac{1}{2}) P_\beta(x) (1 - 2xu + u^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = u^\beta,$$

so ergiebt sich

$$(47) \qquad \left\{ \begin{aligned} P &= \log\frac{J_1}{J} = \sum_\beta a_{2\beta+1}\,\sigma^{2\beta+1}, \\ P_0 &= \log\frac{J_1}{J_0} = \sum_\beta a_{2\beta+1}\,\sigma_0^{2\beta+1}, \qquad \sigma_0 = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \\ u &= \log\frac{J_0}{J} = P - P_0\,. \end{aligned} \right.$$

Dies ist die eine Entwicklung, geordnet nach ungeraden Potenzen von σ, mit beliebiger Gliederzahl $n + 1$. Die Formeln für beliebige Höhe ν' hinzuschreiben ist unnöthig.

An der Grenze der Atmosphäre und am Beobachtungsorte hat man

$$F_1 \nu_1 \sin\varphi = c_1 = \sum_\beta (2\beta + 1)(-1)^\beta a_{2\beta+1}\,,$$

$$F \nu_1 \sin\varphi = b_1 = \sum_\beta (2\beta + 1) a_{2\beta+1}\,.$$

Zur physikalischen Zulässigkeit der Formel ist also erforderlich, dass $c_1 = 0$, $b_1 > 0$ und dass der Ausdruck

$$\sum_\beta (2\beta + 1) a_{2\beta+1} P_\beta(x)$$

im Intervalle $x = \pm 1$ nirgends verschwindet, ausser für $x = -1$. Numerische Parameter sind $a_1\, a_2 \ldots a_{2n+1}$ und φ

(absolute Constanten dagegen $\gamma_1\ \gamma_3 \cdots \gamma_{2n+1}$ und ν_1); wird über φ verfügt, so kann man durch Auflösung linearer Gleichungen nach den $a_{2\beta+1}$ n Coincidenzbedingungen für u und die Gleichung $c_1 = 0$ erfüllen.

II. Parallel zu der vorigen stellt sich die Entwicklung nach Potenzen von $\tau = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}$, wo ψ durch (11) oder (12) definirt ist. Hier setzen wir, anschliessend an die Gleichungen (40) (41) (42)

$$(43') \qquad c_{2\alpha+1} = \gamma_{2\alpha+1} \operatorname{tg}\varphi^{2\alpha+1} \sec\varphi\,,$$

$\gamma_1\ \gamma_3 \cdots \gamma_{2n+1}$ Constanten; ferner

$$F\nu \sin\varphi = \sum_\beta (2\beta+1)\, a_{2\beta+1} = \sum_\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}\, c_{2\alpha+1}\,,$$

$$F\nu' \sin\varphi' = \sum_\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}\, c'_{2\alpha+1}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\varphi' \sec\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi \sec\varphi} \sum_\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}\, c_{2\alpha+1} \left(\frac{\operatorname{tg}\varphi'^2}{\operatorname{tg}\varphi^2}\right)^\alpha,$$

$$F\frac{\nu'^3}{\nu^2} \sin\varphi = \sum_\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2}\, c_{2\alpha+1} \left(\frac{1+x}{2}\right)^\alpha$$

$$(44') \qquad = \sum_\beta (2\beta+1)\, a_{2\beta+1}\, P_\beta(x)\,,$$

wo

$$\frac{1+x}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi'^2}{\operatorname{tg}\varphi^2}\,,$$

$$(45') \qquad x = 2\frac{\operatorname{tg}\varphi'^2}{\operatorname{tg}\varphi^2} - 1 = 1 - 2\operatorname{cosec}\varphi^2\left(1 - \frac{\nu^2}{\nu'^2}\right).$$

Weiter wird

$$\nu'^2 - \nu^2 \sin\vartheta^2 = \nu'^2 \sin\vartheta^2\left(1 - \frac{\nu^2}{\nu'^2} + \operatorname{cotg}\vartheta^2\right)$$

$$= (\nu' \sin\vartheta \sin\varphi)^2 \left(\frac{1-x}{2} + \operatorname{cotg}\psi^2\right)$$

$$= \left(\frac{\nu' \sin\vartheta \sin\varphi}{2\tau}\right)^2 (1 - 2x\tau^2 + \tau^4)\,,$$

$$\log\frac{J_1}{J} = \frac{\tau}{\sin\vartheta}\int_{-1}^{+1} dx\,(1 - 2x\tau^2 + \tau^4)^{-\frac{1}{2}} \sum_\beta (\beta + \tfrac{1}{2})\, a_{2\beta+1}\, P_\beta(x),$$

$$(47')\quad \begin{cases} P = \log \frac{J_1}{J} = \frac{1}{\sin \vartheta} \sum_\beta a_{2\beta+1} \tau^{2\beta+1}, \\ P_0 = \log \frac{J_1}{J_0} = \frac{1}{2} a_1 \sin \varphi . \end{cases}$$

Hier gelten, passend modificirt, die unter I. gegebenen Bemerkungen; an den Grenzen ist

$$F\nu \sin \varphi = b_1 ,$$

$$F_1 \nu \sin \varphi = c_1 \cos \varphi^3 ,$$

woraus wegen $F_1 = 0$ entweder

$$c_1 = \sum_\beta (2\beta + 1)(-1)^\beta a_{2\beta+1} = 0$$

oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$ folgt. Nimmt man die Höhe der Atmosphäre unendlich gross an $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$, so wird

$$\log \frac{J_1}{J} = \sum_\beta a_{2\beta+1} \tau^{2\beta} \frac{1+\tau^2}{2} = \sum_\beta a_{2\beta} \tau^{2\beta}, \quad \tau = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2},$$

$$(48)\quad \begin{cases} \log \frac{J_1}{J_0} = a_0 , \\ \log \frac{J_0}{J} = a_2 \tau^2 + a_4 \tau^4 + \cdots , \end{cases}$$

wo

$$a_0 = \frac{a_1}{2}, \quad a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}, \quad a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2}, \ . \ . \ a_{2n+2} = \frac{a_{2n+1}}{2} .$$

Die Bedingung $c_1 = 0$ fällt hier fort; dagegen besteht zwischen den $a_{2\beta}$ die Relation

$$\sum_\beta (-1)^\beta a_{2\beta} = a_0 - a_2 + a_4 - \cdots = 0 .$$

Die Formeln (47) und (47′) entsprechen, wenn man sich die rechten Seiten von (44) und (44′) ausgeführt denkt, einer Entwicklung von F nach positiven geraden resp. negativen ungeraden Potenzen von ν, mit endlicher Gliederanzahl; wir können sie daher kurz als Potenzenformeln für die Absorption bezeichnen.

Von Interesse ist, zu sehen, was aus unseren Formeln wird,

wenn für $\lim \varphi = 0$ die Bedingung $c_1 = 0$ und n Coincidenzstellen festgehalten werden. Man erkennt, dass die $a_{2\beta+1}$ unendlich werden und zwar von solcher Ordnung, dass

$$\lim a_{2\beta+1} \sin \varphi^{2\beta+1} = \text{endlich}$$

bleibt, mit Ausnahme des letzten a_{2n+1}, das wegen

$$\lim [(2n-1) a_{2n-1} - (2n+1) a_{2n+1}] = 0$$

nur von derselben Ordnung wie a_{2n-1} unendlich wird. Sowohl (47) als auch (47′) erhält dann die Gestalt der Lambert'schen Formel

$$\log \frac{J_1}{J} =$$

$$\sec \vartheta (A - A' \operatorname{tg} \vartheta^2 + A'' \operatorname{tg} \vartheta^4 - \cdots + (-1)^{n-1} A^{n-1} \operatorname{tg} \vartheta^{2n-2})$$

mit endlicher Gliederanzahl n. Diese Formel setzt also keine reguläre Constitution der Atmosphäre, sondern unendlich grosse, unendlich rasch veränderliche Werthe von F (und zwar verschiedenen Vorzeichens) innerhalb einer unendlich dünnen Schicht voraus. Physikalisch immerhin noch vorstellbar ist der Fall $n = 1$, der zu der Pouillet'schen Formel

$$\log \frac{J_1}{J} = A \sec \vartheta$$

führt; diese giebt die Schwächung des Lichts in einer unendlich dünnen Schicht durch den Beobachtungsort, deren Dichtigkeit unendlich gross, aber homogen ist; findet dieselbe Schwächung nicht am Beobachtungsorte, sondern in der Höhe ν' statt, so hätte man die allgemeinere Formel

$$(49) \qquad \log \frac{J_1}{J} = A \sec \vartheta' , \quad \nu' \sin \vartheta' = \nu \sin \vartheta .$$

Um die Anschlussfähigkeit der Potenzenformel zu prüfen, wählen wir den ersten Typus

$$P = \operatorname{Log} \frac{J_1}{J} = \sum a_{2\beta+1} \sigma^{2\beta+1} ,$$

$$u = P - P_0 = \operatorname{Log} \frac{J_0}{J} = \sum a_{2\beta+1} (\sigma^{2\beta+1} - \sigma_0^{2\beta+1}) ,$$

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi \sec \vartheta , \quad \sigma = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} , \quad \sigma_0 = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} ,$$

und legen wieder die Zahlen der Müller'schen Tabelle zu Grunde. Mit n Gliedern kann man der Formel $n-1$ Anschlussstellen an die Tafel und die Bedingung

$$c_1 = a_1 - 3a_3 + 5a_5 - 7a_7 + \cdots = 0$$

vorschreiben, wenn für φ ein willkürlicher Werth gesetzt wird; die Bedingungsgleichungen sind linear. Die folgende Zusammenstellung enthält zunächst, mit passenden Annahmen für φ, Constantenwerthe und Widersprüche $M - H$ (Tafel minus Formel) der Formel mit *vier* Gliedern; Coincidenzstellen sind

$$\vartheta = 80^\circ, \quad 85^\circ, \quad 87^\circ\!.5\,.$$

Um zu erkennen, wie die Bedingung $c_1 = 0$ auf den Anschluss wirkt, ist noch eine Hypothese I mit drei Gliedern, denselben drei Coincidenzstellen und ohne die Bedingung $c_1 = 0$ gerechnet worden. Die Columnenziffern I, II, III, IV bedeuten also

I.	3 Glieder,	$c_1 \neq 0$	$\varphi = 6^\circ$	Coincidenzen 80°, 85°, 87°.5.
II.	4 »	, $c_1 = 0$	$\varphi = 6^\circ$	
III.	4 »	, $c_1 = 0$	$\varphi = 7^\circ$	
IV.	4 »	, $c_1 = 0$	$\varphi = 10^\circ$	

Es folgen die Werthe der $a_{2\beta+1}$ und des Transmissionscoefficienten, sodann die $M - H$ in Einheiten der dritten Decimale.

	I.	II.	III.	IV.
Log a_1	0.26434	0.25968	0.20022	0.07705
Log a_3	0.11468n	9.99659n	9.74323n	9.34009n
Log a_5	0.51317	0.25100	0.11180	9.97946
Log a_7		0.29183	0.14233	9.97574
p	0.801	0.803	0.800	0.786

ϑ	I.	II.	III.	IV.
0°	0	0	0	0
20	−2	−2	−2	−2
40	−5	−5	−5	−7
50	−4	−4	−5	−8
60	−1	−1	−2	−7

ϑ	I.	II.	III.	IV.
70°	+ 4	+ 5	+ 4	− 3
75	+ 7	+ 8	+ 6	+ 1
80	0	0	0	0
81	− 4	− 4	− 3	− 2
82	− 8	− 8	− 7	− 4
83	− 10	− 11	− 10	− 5
84	− 8	− 9	− 7	− 4
85	0	0	0	0
86	+ 12	+ 14	+ 12	+ 5
87	+ 15	+ 19	+ 14	+ 6
87.5	0	0	0	0

Die Darstellung der Beobachtungen ist eine sehr günstige, jedenfalls gegenüber der Laplace'schen Formel ein entschiedener Fortschritt; der systematische Gang der Abweichungen ist ganz beseitigt.

In ebenderselben Weise wurden, mit Hinzunahme eines fünften Gliedes und einer vierten Coincidenzstelle $\vartheta = 60^{\circ}$, die folgenden Hypothesen abgeleitet.

V.	5 Glieder,	$c_1 = 0$	$\varphi = 10^{\circ}$	Coincidenzen $60^{\circ}, 80^{\circ}, 85^{\circ}, 87^{\circ}5$.
VI.	5 »	, $c_1 = 0$	$\varphi = 13^{\circ}$	
VII.	5 »	, $c_1 = 0$	$\varphi = 20^{\circ}$	

	V.	VI.	VII.
Log a_1	0.02714	9.90100	9.57398
Log a_3	9.85034	9.95904	0.16657
Log a_5	0.02315n	0.04549n	0.28852n
Log a_7	0.09230	9.95441	9.79954
Log a_9	0.22162	0.18527	0.30477
p	0.806	0.809	0.843

ϑ	V.	VI.	VII.
0°	0	0	0
20	− 2	− 2	− 1
40	− 4	− 4	− 2
50	− 3	− 3	− 1
60	0	0	0

ϑ	V.	VI.	VII.
70°	+ 6	+ 5	− 1
75	+ 8	+ 7	0
80	0	0	0
81	− 4	− 3	0
82	− 8	− 6	− 1
83	− 11	− 8	− 2
84	− 8	− 6	− 2
85	0	0	0
86	+ 12	+ 8	+ 2
87	+ 15	+ 9	+ 2
87.5	0	0	0

Der Anschluss ist hier noch schärfer geworden; die letzte Hypothese ($\varphi = 20^\circ$) giebt die Müller'schen Zahlen fast identisch wieder. An sich besagt nun aber diese Güte der Darstellung sehr wenig, denn es ist von vornherein sehr evident, dass eine vermehrte Anzahl bestimmbarer Constanten den Anschluss verbessern muss, wenn man nicht etwa eine gänzlich ungeeignete Formel zu Grunde gelegt hat. In unserem Fall hängt alles davon ab, ob die erhaltenen Zahlenwerthe einer physikalisch zulässigen Constitution der Atmosphäre entsprechen, d. h. ob der Ausdruck F' im Intervalle ν bis ν_1 beständig positiv bleibt. Es zeigt sich, dass dies bei keiner der obigen Hypothesen der Fall, also die Darstellung der Müller'schen Zahlen auf diesem Wege illusorisch ist. Nach (44) haben wir das Verhalten des Ausdrucks

$$F'\nu_1 \sin\varphi = \sum_\alpha \frac{\Pi(2\alpha+1)}{\Pi(\alpha)^2} c_{2\alpha+1} y^\alpha, \quad y = \frac{\sin\varphi'^2}{\sin\varphi^2}$$

im Intervalle $0 \leqq y \leqq 1$ zu untersuchen, wo die $c_{2\alpha+1}$ mit den $a_{2\beta+1}$ durch die Gleichungen (41) zusammenhängen, die ausgeschrieben folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 - 3a_3 + 5a_5 - 7a_7 + 9a_9 - \cdots \\
c_3 &= a_3 - 5a_5 + 14a_7 - 30a_9 + \cdots \\
c_5 &= a_5 - 7a_7 + 27a_9 - \cdots \\
c_7 &= a_7 - 9a_9 + \cdots \\
c_9 &= a_9 - \cdots
\end{aligned}$$

Berechnet man diese Coefficienten und bildet den kritischen Ausdruck

$$c_1 + 6c_3 y + 30 c_5 y^2 + 140 c_7 y^3 + 630 c_9 y^4 + \cdots,$$

so zeigt sich, dass derselbe in allen Fällen I bis VII im Intervall sein Zeichen wechselt, und zwar so oft als er überhaupt kann, d. h. es liegen sämmtliche zwei, resp. drei Wurzeln der Gleichungen

$$c_1 + 6c_3 y + 30 c_5 y^2 = 0 \quad \text{(I.)}$$
$$6c_3 + 30c_5 y + 140 c_7 y^2 = 0 \quad \text{(II. III. IV.)}$$
$$6c_3 + 30c_5 y + 140 c_7 y^2 + 630 c_9 y^3 = 0 \quad \text{(V. VI. VII.)}$$

im Intervall $0 < y < 1$. Zu jedem Werth von y gehört eine bestimmte Höhe ν' und ein Winkel χ, der definirt ist durch

$$\cos\chi = \frac{\nu}{\nu'}, \qquad \operatorname{tg}\chi = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{1-y}\,.$$

Die folgende Zusammenstellung giebt die Werthe von χ, für welche F durch 0 hindurchgeht.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
2° 43′	2° 16′	2° 44′	4° 4′	2° 53′	3° 45′	5° 25′
5 5	4 28	5 12	7 28	5 47	7 23	11 8
	6 0	7 0	10 0	8 41	11 11	17 2
				10 0	13 0	20 0

Hieraus ergeben sich die zugehörigen Höhen nach der Formel

$$\frac{r'-r}{r} = \frac{\nu'-\nu}{\nu}\,\frac{\mu}{\mu'} + \frac{\mu}{\mu'} - 1$$

oder mit hinreichender Genauigkeit

$$\frac{r'-r}{r} \sim \operatorname{tg}\chi \operatorname{tg}\frac{\chi}{2} + \log\mu - \log\mu'\,.$$

Um $\log\mu - \log\mu'$ zu erhalten, kann man irgend eine Refractionsformel zu Grunde legen, z. B. die im ersten Abschnitt an Gyldén angeschlossene Formel (13), mit der man findet

$$\log\mu - \log\mu' = \frac{a}{2b}(1 - e^{-w}), \qquad w = b^2\left(\frac{\nu'^2}{\nu^2} - 1\right) = b^2 \operatorname{tg}\chi^2,$$

hingegen für $\chi > \varphi = 5° 19'$

$$\log\mu - \log\mu' = \log\mu = \frac{a}{2b}(1 - e^{-cc}), \quad c = b \operatorname{tg}\varphi\,,$$

weil dort $\varphi = 5^0 19'$ die Grenze der lichtbrechenden Atmosphäre bezeichnete. Die Zahlenwerthe sind

$$\operatorname{Log} b = 1.29073 \quad \operatorname{Log} \frac{a}{2b} = 6.46253 \quad \operatorname{Log} \log \mu = 6.44639\ .$$

Hiermit findet man, in Kilometern, folgende Höhen, in denen F sein Zeichen wechselt:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
8	6	8	18	9	15	30
27	21	28	56	34	55	124
	37	50	100	76	125	295
				100	170	411

Dies Verhalten der Potenzenformel ist merkwürdig genug und spricht entschieden gegen einen directen Zusammenhang zwischen Strahlenbrechung und Absorption, wenn man sich an den scharfen und physikalisch einwandfreien Anschluss dieser Formel an Tafeln der mittleren Refraction erinnert. Hier ist der Anschluss zwar scheinbar zu erzwingen, führt aber auf eine unhaltbare Constitution der Atmosphäre; wir schliessen daraus, dass es keinen einfachen, durch Glieder einer Potenzenreihe darstellbaren Ausdruck für die Abhängigkeit der absorbirenden Kraft von der Höhe giebt, der genau die Müller'schen Zahlen reproducirte. Dies liegt zum Theil an den Zahlen, zum grösseren Theil aber an der für F vorausgesetzten Form; jedenfalls sind, mit einer sogleich zu erwägenden Einschränkung, die Müller'schen Werthe vertrauenswürdiger als irgend ein Formelansatz, der bloss aus unserer mangelhaften Kenntniss der atmosphärischen Vorgänge geschöpft ist. Wir gehen deshalb dazu über, die Müller'schen Zahlen durch Hypothesen über die absorbirende Kraft darzustellen, die auch discontinuirliche Zustände der Atmosphäre in Betracht zu ziehen gestatten. Die einzelnen Formelbestandtheile, die wir dazu brauchen, sind bereits entwickelt; ihre Combination ist auf sehr viele Arten möglich, und den Versuchen des folgenden Abschnitts ist daher durchaus kein systematischer Charakter beizulegen.

III.

Vorher wollen wir eine allgemeine Untersuchung anstellen, die den gewünschten Anhalt zur Beurtheilung der Müller'schen Zahlen giebt. Man kann in der That, ohne die Function F zu kennen, aus dem blossen Umstande, dass sie im ganzen Integrationsgebiet positiv sein soll, Grenzen für den Anschluss der Theorie an die Beobachtung herleiten, in der Art, dass eine Formel, die für eine endliche Anzahl von Zenithdistanzen vorgeschriebene Werthe annehmen soll, in den anderen Zenithdistanzen an Maximal- oder Minimalwerthe gebunden ist. Werden diese von den beobachteten Zahlen über- resp. unterschritten, so ist dort kein absoluter, sondern nur ein relativ günstigster Anschluss möglich, und ein noch besserer Anschluss ist nur durch Zeichenwechsel der Function F, also auf Kosten der physikalischen Zulässigkeit, zu erkaufen.

Wir beweisen zunächst folgenden Hülfssatz: die Determinante mit $(n+2)^2$ Elementen

$$(50)\quad D = \begin{vmatrix} 1, & \sin\omega, & \mathrm{tg}\,\omega, & \mathrm{tg}\,\omega^3, & \dots & \mathrm{tg}\,\omega^{2n-1} \\ 1, & \sin\omega_0, & \mathrm{tg}\,\omega_0, & \mathrm{tg}\,\omega_0^3, & \dots & \mathrm{tg}\,\omega_0^{2n-1} \\ 1, & \sin\omega_1, & \mathrm{tg}\,\omega_1, & \mathrm{tg}\,\omega_1^3, & \dots & \mathrm{tg}\,\omega_1^{2n-1} \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 1, & \sin\omega_n, & \mathrm{tg}\,\omega_n, & \mathrm{tg}\,\omega_n^3, & \dots & \mathrm{tg}\,\omega_n^{2n-1} \end{vmatrix}$$

ist von 0 verschieden, wenn $\omega, \omega_0, \omega_1, \dots \omega_n$ $n+2$ von einander verschiedene Winkel desselben Quadranten sind. Der Satz ist bewiesen, wenn er für den ersten Quadranten bewiesen ist. Schreiben wir

$$(51)\quad D = a + b\sin\omega + a_1\,\mathrm{tg}\,\omega + a_3\,\mathrm{tg}\,\omega^3 + \dots + a_{2n-1}\,\mathrm{tg}\,\omega^{2n-1},$$

so ist die obige Behauptung gleichbedeutend mit der, dass die Gleichung $D = 0$, mit der Unbekannten ω, nicht mehr als $n+1$ Wurzeln $\omega_0, \omega_1, \dots \omega_n$ im ersten Quadranten besitzt. Wir setzen zunächst voraus, dass die beiden Coefficienten a, b, deren Werthe sind

$$(52)\quad \begin{cases} a = \left| \sin\omega, \ \mathrm{tg}\,\omega, \ \mathrm{tg}\,\omega^3, \dots \mathrm{tg}\,\omega^{2n-1} \right|_{0,1,\dots n}, \\ -b = \left| 1, \ \mathrm{tg}\,\omega, \ \mathrm{tg}\,\omega^3, \dots \mathrm{tg}\,\omega^{2n-1} \right|_{0,1,\dots n}, \end{cases}$$

nicht verschwinden; es wird sich aus unseren Betrachtungen

von selbst ergeben, dass a nicht verschwinden kann. Das Nichtverschwinden von b unter der Voraussetzung

(53) $$0 < \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_n < \frac{\pi}{2}$$

ergiebt sich, wenn man in bekannter Weise die Determinante b zerlegt in das Differenzenproduct

$$|\, 1,\ \mathrm{tg}\,\omega,\ \mathrm{tg}\,\omega^2,\ \ldots\ \mathrm{tg}\,\omega^n\,| = \sum_{\alpha\beta}' (\mathrm{tg}\,\omega_\alpha - \mathrm{tg}\,\omega_\beta)$$

und die übrig bleibende ganze symmetrische Function der Grössen $\mathrm{tg}\,\omega_0$, $\mathrm{tg}\,\omega_1, \ldots\ \mathrm{tg}\,\omega_n$; am einfachsten aber durch Betrachtung der algebraischen Gleichung

(54) $$a + a_1 x + a_3 x^3 + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1} = 0$$

für $x = \mathrm{tg}\,\omega_0$. Diese Gleichung hat höchstens $n+1$ Glieder, also höchstens n Zeichenwechsel, also nach dem Cartesius'schen Satze höchstens n positive Wurzeln x; diese sind

$$x = \mathrm{tg}\,\omega_1,\quad x = \mathrm{tg}\,\omega_2, \ldots\ x = \mathrm{tg}\,\omega_n$$

und für keinen anderen positiven Werth von $\mathrm{tg}\,\omega_0$ kann die linke Seite von (54), d. h. die Determinante b, verschwinden.

Unter der Voraussetzung $a \neq 0$ besitzt die Gleichung $D = 0$ dieselben reellen Wurzeln wie die Gleichung $D \operatorname{cosec} \omega = 0$, die wir mit $\mathrm{tg}\,\omega = x$ in der Form

(55) $$f(x) = \sqrt{1+x^2}\left(\frac{a}{x} + a_1 + a_3 x^2 + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-2}\right) + b = 0$$

schreiben wollen. Ihre Ableitung nach x ergiebt

$$f'(x)\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)\left(-\frac{a}{x^2} + 2a_3 x + 4a_5 x^3 + \cdots + (2n-2)a_{2n-1} x^{2n-3}\right) + a + a_1 x + a_3 x^3 + \cdots + a_{2n-1} x^{2n-1}$$

oder

(56) $$f'(x) x^2 \sqrt{1+x^2} = -a + (a_1 + 2a_3) x^3 + (3a_3 + 4a_5) x^5 + \cdots + (2n-1) a_{2n-1} x^{2n+1}.$$

Die Curve $y = f(x)$ hat an sich zwei Zweige; diese Zweideutigkeit ist hier aber durch die Wahl des Zeichens von $\sin \omega$, d. h.

durch die Wahl des Quadranten von ω beseitigt. Ferner ist $f'(x)$ endlich und stetig für jeden endlichen, von Null verschiedenen Werth von x; nach dem Rolle'schen Satze liegt also zwischen zwei aufeinander folgenden positiven Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ mindestens eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$; hat also $f(x) = 0$ $m + 1$ positive Wurzeln, so hat $f'(x) = 0$ mindestens m positive Wurzeln. Die Maximalanzahl der positiven Wurzeln von $f'(x) = 0$ andererseits ergiebt wieder der Satz von Descartes: die rechte Seite von (56) hat höchstens $n + 1$ Glieder, also höchstens n positive Wurzeln; folglich hat $f(x) = 0$ höchstens $n + 1$ positive Wurzeln.

Damit ist unser Satz bewiesen, abgesehen vom Falle $a = 0$, wo zu diesen $n + 1$ positiven Wurzeln noch die Wurzel $\operatorname{tg}\omega = 0$ der ursprünglichen Gleichung $D = 0$ hinzutritt. Dass aber a nicht verschwinden kann, folgt daraus, dass die Gleichung

$$b \sin \omega_0 + a_1 \operatorname{tg} \omega_0 + a_3 \operatorname{tg} \omega_0^3 + \cdots a_{2n-1} \operatorname{tg} \omega_0^{2n-1} = 0$$

nicht mehr als n positive Wurzeln

$$\operatorname{tg} \omega_0 = \operatorname{tg} \omega_1 , \ \operatorname{tg} \omega_0 = \operatorname{tg} \omega_2 , \ldots \operatorname{tg} \omega_0 = \operatorname{tg} \omega_n$$

besitzt, und dies wieder ergiebt sich durch Bildung der Ausdrücke (55) und (56) für den Fall $a = 0$. (56) hat dann höchstens n Glieder, also höchstens $n - 1$ positive Wurzeln, die Gleichung (55) also höchstens n positive Wurzeln.

Die Determinante D hat somit constantes Zeichen, solange

$$\omega_\alpha < \omega < \omega_{\alpha+1} ,$$

und zwar bei der Annahme (53) das Zeichen von $(-1)^{\alpha+1}$. Setzt man nämlich für den Augenblick

$$D = D_n , \quad \frac{\partial D}{\partial \operatorname{tg} \omega_n^{2n-1}} = D_{n-1} , \quad \frac{\partial D_{n-1}}{\partial \operatorname{tg} \omega_{n-1}^{2n-3}} = D_{n-2} , \ \ldots$$

und wählt $0 < \omega < \omega_0$, so ändert D_n sein Zeichen nicht, wenn ω_n von seinem Werthe aus nach $\frac{\pi}{2}$ hin verschoben wird, hat also das Zeichen des Coefficienten der höchsten vorkommenden Potenz von $\operatorname{tg} \omega_n$, d. h. das Zeichen von D_{n-1}. Ebenso behält D_{n-1} sein Zeichen, wenn ω_{n-1} nach $\frac{\pi}{2}$ hin verschoben wird, hat

also das Zeichen von D_{n-2} u. s. w.; schliesslich hat D das Zeichen von

$$D_0 = \begin{vmatrix} 1, & \sin\omega \\ 1, & \sin\omega_0 \end{vmatrix},$$

ist also positiv. Daraus folgt:

$D > 0$, wenn ω zw. 0 u. ω_0, ω_1 u. ω_2, ω_3 u. $\omega_4, \ldots$ liegt.

$D < 0$, wenn ω zwischen ω_0 u. ω_1, ω_2 u. ω_3, ω_4 u. $\omega_5, \ldots$ liegt.

Kehren wir nun zu unserer Absorptionsformel (21) zurück, die wir mit $\nu \sin\vartheta = \nu' \sin\vartheta'$ wieder in der Form

$$\log\frac{J_1}{J} = \int F' \sec\vartheta' d\nu'$$

schreiben können; empirisch gegeben ist die Grösse

$$u = \log\frac{J_0}{J} = \int F' d\nu' (\sec\vartheta' - 1) .$$

Die absorbirende Kraft F' muss im ganzen Intervall > 0 sein; eine Hypothese über F', die dieser Bedingung genügt, führt zu einem physikalisch zulässigen Werthverlauf von u. Wir betrachten einen solchen »zulässigen Verlauf von u« und stellen n seiner Werthe $u_1, u_2, .. u_n$ in den Zenithdistanzen $\vartheta_1, \vartheta_2, .. \vartheta_n$ durch die endliche n-gliedrige Lambert'sche Formel

$$(57) \qquad v = A_1(\sec\vartheta - 1) - A_3(\sec\vartheta^3 - 1) + \cdots \\ - (-1)^n A_{2n-1}(\sec\vartheta^{2n-1} - 1)$$

dar; die Determinante der n linearen Gleichungen zur Bestimmung der A ist

$$\varDelta = | \sec\vartheta - 1, \sec\vartheta^3 - 1, \ldots \sec\vartheta^{2n-1} - 1 |_{1,2,..n}$$

oder, wenn noch $\vartheta_0 = 0$ eingeführt wird,

$$\varDelta = | 1, \sec\vartheta, \sec\vartheta^3, \ldots \sec\vartheta^{2n-1} |_{0,1,2,\ldots n},$$

also nach einer Ueberlegung, wie sie soeben angestellt wurde, von 0 verschieden und zwar positiv, wenn

$$0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \cdots < \vartheta_n < \frac{\pi}{2} .$$

Die Gleichungen

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2, \ldots v_n = u_n$$

sind also sicher nach den A auflösbar und ergeben für sie bestimmte endliche Werthe.

Wir bilden für irgend ein $\vartheta = \vartheta_\alpha$, das keine der Grössen $\vartheta_0, \vartheta_1, .. \vartheta_n$ ist,

$$\varDelta(u_\alpha - v_\alpha) =$$

$$= \begin{vmatrix} u_\alpha, & \sec\vartheta_\alpha - 1, & \sec\vartheta_\alpha^3 - 1, & \ldots \sec\vartheta_\alpha^{2n-1} - 1 \\ u_1, & \sec\vartheta_1 - 1, & \sec\vartheta_1^3 - 1, & \ldots \sec\vartheta_1^{2n-1} - 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ u_n, & \sec\vartheta_n - 1, & \sec\vartheta_n^3 - 1, & \ldots \sec\vartheta_n^{2n-1} - 1 \end{vmatrix}$$

$$= | u, \sec\vartheta - 1, \sec\vartheta^3 - 1, \ldots \sec\vartheta^{2n-1} - 1 |_{\alpha, 1, 2, .. n}$$

$$= \int F' d\nu' \, | \sec\vartheta' - 1, \sec\vartheta - 1, \sec\vartheta^3 - 1, \ldots \sec\vartheta^{2n-1} - 1 |_{\alpha, 1, 2, .. n}$$

$$= \int F' d\nu' \, | 1, \sec\vartheta', \sec\vartheta, \sec\vartheta^3, \ldots \sec\vartheta^{2n-1} |_{0, \alpha, 1, 2, .. n}.$$

Setzen wir

$$\sin\vartheta' = \cos\varphi \sin\vartheta,$$
$$\cos\omega \cos\vartheta' = \cos\varphi \cos\vartheta,$$
$$\sin\omega \cos\vartheta' = \sin\varphi \quad ,$$

wo also sowohl ω als φ während der Integration variiren, aber nur ω von ϑ abhängig ist, so wird

$$\sec\vartheta = \operatorname{tg}\omega : \operatorname{tg}\varphi,$$
$$\sec\vartheta' = \sin\omega : \sin\varphi,$$

$$\varDelta(u_\alpha - v_\alpha) = \int F' d\nu' \operatorname{cosec}\varphi (\operatorname{cotg}\varphi)^{1+3+..+(2n-1)} \times$$

$$\times | 1, \sin\omega, \operatorname{tg}\omega, \operatorname{tg}\omega^3, \ldots \operatorname{tg}\omega^{2n-1} |_{0, \alpha, 1, 2, .. n},$$

worin ω_0 für φ steht. Schreiben wir G' für den ausserhalb der Determinante stehenden Theil des Integranden und wieder ϑ für ϑ_α, so wird

$$\varDelta(v - u) = \int G' d\nu' \cdot D,$$

wo D genau die Determinante (50) bedeutet. Für jeden beliebigen Werth von φ wächst aber ω zugleich mit ϑ; ist also

$$\vartheta_\alpha < \vartheta < \vartheta_{\alpha+1},$$

so ist im ganzen Integrationsintervall auch

$$\omega_\alpha < \omega < \omega_{\alpha+1} ,$$

und D hat constant das Zeichen $(-1)^{\alpha+1}$; dasselbe Zeichen hat also, da G' wesentlich positiv ist, auch das Integral, und wegen $\varDelta > 0$ auch die Differenz $v - u$. Es hat also $u - v$ das Zeichen $(-1)^\alpha$, d. h. es ist

$u > v$, wenn ϑ zwischen 0 u. ϑ_1, ϑ_2 u. ϑ_3, ϑ_4 u. ϑ_5, ... liegt.
$u < v$, wenn ϑ zwischen ϑ_1 u. ϑ_2, ϑ_3 u. ϑ_4, ... liegt.

Damit haben wir den Satz: Die n Coefficienten der Lambert'schen Formel (57) lassen sich stets so bestimmen, dass für n Zenithdistanzen $\vartheta_1, \vartheta_2, .. \vartheta_n$ die Gleichung $u = v$ besteht, wo u einen zulässigen, d. h. durch eine im ganzen Intervall positive Function F' erzeugten Verlauf des Integrals (23) darstellt. Für jedes andere ϑ ist v von u verschieden und, je nach dem Intervall, in dem ϑ liegt, ein Minimal- oder Maximalwerth von u.

Eine einfache Ueberlegung zeigt übrigens, dass die Coefficienten A der Entwicklung (57) positiv sind. Denn für $\vartheta_n < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ hat $u - v$ das Zeichen $(-1)^n$, v das Zeichen von $(-1)^{n+1} A_{2n-1}$ und absolut genommen einen beliebig grossen Werth; die beiden Grössen $(-1)^n$ und $(-1)^n A_{2n-1}$ sind also gleichen Zeichens, d. h. es ist $A_{2n-1} > 0$.

Wir geben einige Anwendungen dieses Satzes auf die Müller'schen Zahlen, wobei die Lambert'sche Formel wieder in der Gestalt

$$v = A(\sec\vartheta - 1) - B\sec\vartheta \operatorname{tg}\vartheta^2 + C\sec\vartheta \operatorname{tg}\vartheta^4 - \cdots$$

angesetzt werden möge; auch $A, B, C, \ldots$ sind positiv.

Schliesst man

$v = A(\sec\vartheta - 1)$ für $\vartheta_1 = 60^\circ$ an M an, so findet man mit

$$\operatorname{Log} A = 8.96379$$

folgende Werthe von v:

ϑ	0°	20°	40°	50°	60°	70°	75°	80°
v	0	$\overline{0.006}$	$\overline{0.028}$	$\overline{0.051}$	0.092	$\underline{0.177}$	$\underline{0.263}$	$\underline{0.438}$

Die überstrichenen Zahlen sind Minima von u, die unter-

strichenen Maxima. Dies Beispiel würde also, in Worte übersetzt, sagen: ein zulässiger Verlauf von u, dem der Werth $u = 0.092$ für $\vartheta = 60^\circ$ angehört, kann für $\vartheta = 40^\circ$ keinen kleineren Werth als 0.028, für $\vartheta = 70^\circ$ keinen grösseren als 0.177 ergeben, woraus sofort hervorgeht, dass die Müller'schen Zahlen

ϑ	0°	20°	40°	50°	60°	70°	75°	80°
M	0	0.004	0.024	0.048	0.092	0.180	0.261	0.394

bis zu $\vartheta = 70^\circ$ keinem zulässigen Verlauf von u angehören können. Wollte man etwa den Müller'schen Werth für $\vartheta = 40^\circ$ reproduciren, so erhielte man

v	0	0.005	0.024	0.044	0.079	0.151	0.225	0.373 ,

die Potsdamer Zahlen wären also in den mittleren Zenithdistanzen erheblich zu gross.

Zwei weitere Hypothesen mögen folgen, die mit zwei Gliedern in zwei Zenithdistanzen angeschlossen sind, nämlich

$\vartheta_1 = 60^\circ$, $\vartheta_2 = 75^\circ$, $\text{Log}\,A = 8.96567$, $\text{Log}\,B = 5.82600$

$\vartheta_1 = 60^\circ$, $\vartheta_2 = 80^\circ$, $\text{Log}\,A = 8.97164$, $\text{Log}\,B = 6.44656$

und

ϑ	60°	70°	75°	80°	83°	85°
v	0.092	0.176	0.261	0.427	0.629	0.867
v	0.092	0.174	0.253	0.394	0.523	0.562
M	0.092	0.180	0.261	0.394	0.533	0.707

Diese Zahlen lehren, dass der Müller'sche Werth für $\vartheta = 75^\circ$ um mindestens 8 Einheiten der letzten Stelle zu gross ist; wollte man ihn beibehalten, so käme man auf enorme Widersprüche in den nächsthöheren Zenithdistanzen, z. B. für $\vartheta = 85^\circ$ auf eine Mindestabweichung von 0.160.

Ein Versuch mit den 4 Anschlussstellen 60°, 80°, 85° und 87°.5 giebt

$$\text{Log}\,A = 8.97280\,,\quad \text{Log}\,B = 6.51265\,,\quad \text{Log}\,C = 4.10622\,,\quad \text{Log}\,D = 1.18140$$

und folgende Werthe von v:

ϑ	60°	70°	75°	80°	83°	85°	86°	87°	87°5
v	0.092	0.174	0.252	0.394	0.542	0.707	0.878	1.270	1.175
M	0.092	0.180	0.261	0.394	0.533	0.707	0.846	1.045	1.176

Wir schliessen aus diesen Versuchen, die man beliebig variiren kann, dass eine absolute Darstellung der Müller'schen Zahlen durch einen zulässigen Werthverlauf von u unmöglich ist; in den niederen Zenithdistanzen sind die M zu klein, zwischen 60° und 80° zu gross, während sie sich darüber hinaus mit der Theorie sehr wohl vereinbaren lassen. Auf eine Fehleranhäufung zwischen 60° und 80° liess auch der Gang der Widersprüche zwischen M und Laplace schliessen.

Es mögen nun einige Versuche mitgetheilt werden, durch Annahmen über F die Zahlen der Potsdamer Tafel darzustellen, wobei ich alle diejenigen unterdrücke, die an Einfachheit der Rechnung oder an Güte des Anschlusses nicht ein gewisses Mindestmass erreichen. Nach meinen Rechnungen und den soeben angestellten Betrachtungen ist es mir nicht wahrscheinlich, dass es eine einfache Formel für die Constitution der Atmosphäre gebe, die sich wesentlich besser, als im Folgenden ersichtlich, mit den Zahlen M verträgt.

A. In der Formel (30) oder

$$\mathrm{Log}(J_1 : J) = a\left[\Phi(c \operatorname{cotg} \omega) - h\,\Phi(c \operatorname{cosec} \omega) - hc \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right],$$

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \varphi \sec \vartheta\,, \quad h = e^{-cc}\,, \quad b = c \operatorname{cotg} \varphi$$

sind a, c, φ oder a, b, φ die verfügbaren Parameter. Wir lassen einen davon unbestimmt und schreiben zwei Coincidenzstellen $\vartheta = 85°$ und $\vartheta = 87°5$ vor. Um den Anschluss zu übersehen, genügt es die beiden Grenzfälle zu betrachten:

(a) $c = \infty\,, \quad b$ endlich $, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}\,,$

$$\mathrm{Log}\,(J_1 : J) = a\,\Phi(b \cos \vartheta)\,.$$

(b) $c = 0\,, \quad a = \infty\,, \quad \varphi$ bestimmt ,

$$\mathrm{Log}\,(J_1 : J) = A\left(\sigma + \frac{\sigma^3}{3}\right), \quad \sigma = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\,.$$

Man erhält in diesen Fällen die Constanten

(a) Log $a = 0.46143$, Log $b = 1.26300$, $p = 0.834$
(b) Log $A = 0.26012$, $\varphi = 4°53'$, $p = 0.836$

und folgende Widersprüche $M - H$ in Einheiten der dritten Decimale:

ϑ	0°	60°	75°	80°	83°	85°	87°	87°5
(a)	0	+ 14	+ 41	+ 38	+ 15	0	− 2	0
(b)	0	+ 15	+ 43	+ 40	+ 17	0	− 4	0

Der Anschluss ist von einer Grenze zur anderen wenig variabel und nur unwesentlich besser als der der Laplace'schen Formel.

B. Günstiger stellt sich ein Versuch mit den Formeln (33) und (34). Ich theile zwei Fälle mit:

(c) $u = a\tau^2 : (1 + b\tau^2)$, $\tau = \text{tg}\,\frac{\vartheta}{2}$. Anschluss in 85° und 87°5.

(d) $u = a'\tau^2 : (1 + b'\tau^2 + b''\tau^4)$. Anschluss in 60°, 85° und 87°5.

Die Constanten sind

(c) Log $a = 9.24808$, Log $b = 9.97345n$, $p = 0.811$,
(d) Log $a' = 9.30257$, Log $b' = 9.88040n$, Log $b'' = 9.24550n$, $p = 0.747$,

und die Widersprüche:

ϑ	0°	60°	75°	80°	83°	85°	87°	87°5
(c)	0	+ 6	+ 27	+ 25	+ 7	0	+ 2	0
(d)	0	0	+ 21	+ 20	+ 6	0	+ 3	0

Die Transmissionscoefficienten waren nach den Formeln

$$\text{Log}\,\frac{1}{p} = \frac{a}{1 - b}, \quad \text{Log}\,\frac{1}{p} = \frac{a'}{1 - b' + b''}$$

zu berechnen. (Ueber den sehr kleinen Werth $p = 0.747$ der Hypothese (d) folgt weiterhin eine Bemerkung.) Der Anschluss ist hier schon leidlich, lässt sich aber auch nicht merklich verbessern; so z. B. würde man, wenn man die Formel

$$u = (a'\tau^2 + a''\tau^4) : (1 + b'\tau^2 + b''\tau^4)$$

(e) in 60°, 75°, 85°, 87°.5

(f) in 60°, 80°, 85°, 87°.5

an M anschliesst, die Constanten

	Log a'	Log a''	Log b'	Log b''
(e)	9.27500	9.43920n	0.38180n	0.13950
(f)	9.27880	9.37451n	0.33859n	0.06586

erhalten. Diese Hypothesen sind schon dem Verhalten von u nach zu verwerfen, denn es würde u im Intervall $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ durch 0 und ∞ hindurchgehen. Andere Versuche wiederum führen zu physikalischer Unbrauchbarkeit, d. h. sie ergeben Zeichenwechsel des Ausdrucks für die lichtschwächende Kraft. Um diesen zu untersuchen, hat man die Formel (34) in der Gestalt

$$u = \sum \frac{a_\alpha \tau^2}{1 + b_\alpha \tau^2}$$

geschrieben zu denken und die Relationen

$$\frac{b_\alpha \nu^2}{(1 - b_\alpha)^2} = \text{constans}, \quad \frac{a_\alpha}{b_\alpha} \frac{1 + b_\alpha}{1 - b_\alpha} = \text{constans}, \quad F\nu = \sum \frac{2a_\alpha}{(1 + b_\alpha)^2}$$

zu berücksichtigen. Im Falle (d) erhält man

$$\frac{a'\tau^2}{1 + b'\tau^2 + b''\tau^4} = \frac{a_1}{1 + b_1\tau^2} + \frac{a_2}{1 + b_2\tau^2},$$

$$\text{Log } a_1 = 9.22451 \;, \quad \text{Log } a_2 = 8.51877 \;,$$

$$\text{Log } b_1 = 9.97563n \;, \quad \text{Log } b_2 = 9.26989 \;,$$

also $b_\alpha > -1$ und $a_\alpha > 0$, woraus die Zulässigkeit dieser wie der Hypothese (c) folgt.

Die Formel (33) würde ich am meisten zur Ausgleichung von photometrischen Beobachtungen empfehlen, wenn es sich um die übliche Genauigkeit handelt. Sie hat vor der Laplace-schen Formel den besseren Anschluss mit zwei Parametern und die Unabhängigkeit von den Refractionstafeln, vor der Lambert-schen und Pouillet'schen die physikalische Zulässigkeit und die

Gültigkeit bis zum Horizont voraus; wie die Lambert'sche ist sie nöthigenfalls durch Hinzunahme von Gliedern (also Uebergang zu (34)) verbesserungsfähig, dann allerdings nicht ohne Discussion der Parameterwerthe auf physikalische Brauchbarkeit. Ihre Berechnung ist einfach und der Anschluss, gleichgültig ob mit Coincidenzstellen oder durch die Methode der kleinsten Quadrate, erfordert nur die Auflösung linearer Gleichungen. Wenn b nahe an -1 liegt, kann man sie auch in der Form

$$u = a\,\frac{1+\tau^2-(1-\tau^2)}{(1+b)(1+\tau^2)+(1-b)(1-\tau^2)} = \alpha\,\frac{1-\cos\vartheta}{\cos\vartheta+\beta}$$

schreiben, wo β klein ist; für $\beta = 0$ geht sie in die Pouillet-sche Formel über.

C. Eine Reihe sehr guter Anschlüsse erhält man, wenn man der normalen Atmosphäre, deren absorbirende Kraft mit wachsender Höhe abnimmt, eine unendlich dünne, unendlich stark absorbirende Schicht in bestimmter Höhe hinzufügt. Die Schwächung des Strahles durch eine solche Schicht in der Höhe ν' ist gegeben durch

$$\log\frac{J_1}{J} = c\sec\vartheta',$$

$$\sin\vartheta' = \cos\varphi\sin\vartheta\,,\quad \cos\varphi = \frac{\nu}{\nu'}\,.$$

Zur Berechnung empfiehlt es sich wiederum ω einzuführen und zu schreiben

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\varphi\sec\vartheta\,,\quad \sec\vartheta' = \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}\,.$$

Die »normale« Atmosphäre kann, bei hinlänglich grosser Höhe, durch das Absorptionsglied $a\,\Phi(b\cos\vartheta)$ dargestellt werden; wir setzen also

$$\operatorname{Log}(J_1:J) = a\,\Phi(b\cos\vartheta) + c\sec\vartheta'\,,$$

$$\operatorname{Log}\frac{1}{p} = \operatorname{Log}(J_1:J_0) = a\,\Phi(b) + c\,.$$

Numerische Parameter sind a, b, c, φ; wir wählen φ willkürlich. Wird auch noch über b verfügt, so finden sich a und c

aus zwei Coincidenzbedingungen durch Auflösung linearer Gleichungen; eine dritte Coincidenzbedingung entspricht also einer transcendenten Gleichung für b, die mit Hülfe der Φ-tafel durch ein nicht allzu langwieriges Probierverfahren gelöst wird. Sie kann je nach Umständen 0, 1 oder 2 Wurzeln haben, die aber nur dann brauchbar sind, wenn sie zu positiven Werthen für a und c führen, weil wir sonst statt einer absorbirenden eine selbstleuchtende Atmosphäre hätten. Z. B. erhalten wir mit $\varphi = 10^\circ$ und den drei Anschlussstellen 60°, 85° und 87°.5 folgende beiden Wurzelsysteme

$$\text{Log}\, b = 1.48500 \quad \text{Log}\, a = 0.52506 \quad \text{Log}\, c = 8.61102$$
$$\text{Log}\, b = 0.65110 \quad \text{Log}\, a = 0.75100 \quad \text{Log}\, c = 9.69403n\,,$$

von denen nur das erste brauchbar ist. Verfolgen wir diese erste Wurzel b weiter, so zeigt sich, dass sie mit abnehmendem φ zunimmt und schliesslich ∞ wird für denjenigen Werth

$$\varphi = 7^\circ\ 3'\ 15''\,,$$

mit dem die Formel [1])

$$\text{Log}\,(J_1 : J) = c \sec\vartheta + c' \sec\vartheta'\,,$$
$$u = c(\sec\vartheta - 1) + c'(\sec\vartheta' - 1)$$

an den drei vorgeschriebenen Stellen die Müller'schen Werthe annimmt. Diese letzte Formel ist der Grenzfall der vorhergehenden, wie man durch Ansetzung der semiconvergenten Reihe

$$a\,\Phi(b\cos\vartheta) = \frac{a}{2b}\sec\vartheta - \frac{a}{4b^3}\sec\vartheta^3 + \cdots$$
$$= c\sec\vartheta\left(1 - \frac{1}{2b^2}\sec\vartheta^2 + \cdots\right)$$

für $\lim b = \infty$, $\lim a = \infty$ findet. Der genannte Werth von φ, dem eine Höhe von 51 km entspricht, ist hier also ein unterer Grenzwerth von φ.

Es folgen nun für einige passende Werthe von φ die Constanten und Anschlüsse.

---

1) Hier ist für den Augenblick das sonstige c durch c' ersetzt und c in einer anderen Bedeutung gebraucht.

	I.	II.	III.	IV.
φ	7° 3′ 15″	8°	10°	13°
Log a	$+\infty$	0.64142	0.52506	0.49324
Log b	$+\infty$	1.70000	1.48500	1.39200
Log c	8.76992	8.70954	8.64102	8.52960
Lg $\frac{a}{2b}$	8.55269	8.64039	8.73903	8.80021
p	0.804	0.804	0.802	0.800

$M - H$

ϑ	I.	II.	III.	IV.
0°	0	0	0	0
40	− 4	− 5	− 5	− 5
60	0	0	0	0
75	+ 11	+ 12	+ 14	+ 17
80	+ 5	+ 7	+ 12	+ 16
83	− 7	− 4	0	+ 4
85	0	0	0	0
86	+ 11	+ 8	+ 4	+ 2
87	+ 16	+ 11	+ 6	+ 3
87.5	0	0	0	0

Die Abweichungen sind hier so klein, wie sie den Erwartungen nach sein können; die Hypothese, die dieser Rechnung zu Grunde liegt, scheint also etwas für sich zu haben. Einer physikalischen Interpretation kann ich mich wohl enthalten und bemerke nur, dass für die Annahme einer localen Verdichtung von absorbirender Materie, z. B. Meteorstaub, in dem hier abgegrenzten Höhenbereich (50 bis 170 km) auch anderweitige Wahrnehmungen sprechen. Die unendlich dünne, unendlich stark lichtschwächende Schicht, an der man Anstoss nehmen könnte, ist nur als Approximation anzusehen, etwa wie die mit Masse belegten Flächen in der Potentialtheorie; man kann sie, wie unter D gezeigt wird, durch endliche Schichten mit oder ohne Dichtigkeitsprung ersetzen. Bemerkenswerth ist, dass der Transmissionscoefficient sich hier kleiner ergiebt als der aus der Laplace'schen Formel folgende Werth $p = 0.84$. Dass der Werth von p überhaupt nicht bloss vom Gange der Zahlen u,

sondern auch von der Gestalt der Interpolationsformel abhängt, zeigt der sehr kleine Werth $p = 0.747$ der Hypothese B. (d), die doch dem Zahlenverlauf nach grosse Aehnlichkeit mit der jetzigen Hypothese IV hat. Wenn in der Formel (21) F' einen additiven Bestandtheil enthält, der im Anfang des Intervalls $\nu' = \nu$ sehr kleine und erst bei sehr grossen Beträgen von ν' erhebliche Werthe hat, so liefert dieser Bestandtheil einen nahezu constanten, d. h. von ϑ unabhängigen Beitrag zu Log $(J_1 : J)$, ändert also den Werth von p merklich, während er aus dem Gange der Differenzzahlen u nahezu herausfällt. Zwei Formeln, die im Gange der u übereinstimmen, können also recht verschiedene Transmissionscoefficienten ergeben; dies erinnert uns daran, dass Beobachtungen einer Station in verschiedenen Zenithdistanzen noch nicht genügen, einen Schluss auf die Constitution der Atmosphäre zu begründen, sondern durch Beobachtungen auf Stationen verschiedener Meereshöhe zu ergänzen sind. Besonderer Vorsicht bedarf nach dem Gesagten der Gebrauch von Absorptionsformeln, die auf unendlicher Höhe der Atmosphäre beruhen, also eventuell eine merkliche Absorption des Lichts im Weltraum voraussetzen; Formeln dieser Art, wie etwa

$$u = a(1 - \cos\vartheta),$$

sind zu verwerfen, solange man über die Absorption im Raume nichts Bestimmtes weiss[1]). Die eben erwähnte Formel beruht auf der Annahme einer überall gleich starken Absorption und giebt den Transmissionscoefficienten 0; die Abhängigkeit von der Zenithdistanz besteht hier einfach darin, dass parallele Strahlen einen längeren Weg zurückzulegen haben, um die Erdoberfläche unter grösserem Einfallswinkel zu treffen. Der Wegunterschied zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ beträgt einen Erdradius. Derartige Curiosa sind bei Formeln mit unendlicher Atmosphäre, die sich der Beobachtung einigermassen anschliessen, zwar nicht zu befürchten, wohl aber, dass sie den Transmissionscoefficienten zu klein ergeben. — Man kann sich übrigens in derselben Weise wie früher, indem man nämlich einzelne Werthe

---

1) Vgl. G. Müller, Helligkeitsbestimmungen von Planeten (Potsd. Publ. VIII) p. 204.

von M herausgreift und voraussetzt, dass sie einem »zulässigen« Werthverlauf von u angehören, Maximalwerthe des Transmissionscoefficienten verschaffen. Es ist

$$\operatorname{Log}\frac{1}{p}=\int F'd\nu',$$

ferner

$$u=\int\frac{F'd\nu'}{\sec\vartheta'+1}\operatorname{tg}\vartheta'^2=\int\frac{F'd\nu'}{\sec\vartheta'+1}\,\frac{\cos\vartheta^2}{\cos\vartheta'^2}\,\frac{\nu^2}{\nu'^2}\operatorname{tg}\vartheta^2,$$

$$\frac{u}{\sec\vartheta-1}=\int F'd\nu'\,\frac{\nu^2}{\nu'^2}\,\frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta'}\cdot\frac{1+\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta'}$$

und im Zenith

$$\left|\frac{u}{\sec\vartheta-1}\right|_0=\int F'd\nu'\,\frac{\nu^2}{\nu'^2}<\int F'd\nu'.$$

Bezeichnet ferner v die endliche LAMBERT'sche Reihe

$$v=A(\sec\vartheta-1)-B\sec\vartheta\operatorname{tg}\vartheta^2+C\sec\vartheta\operatorname{tg}\vartheta^4-\cdots$$

und ϑ_1 ihre erste Coincidenzstelle mit u, so ist im Intervalle $0<\vartheta<\vartheta_1$, wie wir bewiesen haben, $u>v$, also

$$\frac{u}{\sec\vartheta-1}>A-B\sec\vartheta(\sec\vartheta+1)+C\sec\vartheta(\sec\vartheta+1)\operatorname{tg}\vartheta^2-\cdots$$

und im Zenith

$$\left|\frac{u}{\sec\vartheta-1}\right|_0>A-2B,\quad\text{also}$$

$$\operatorname{Log}\frac{1}{p}>\left|\frac{u}{\sec\vartheta-1}\right|_0>A-2B=\operatorname{Log}\frac{1}{q},$$

$$p<q.$$

Hat man also die LAMBERT'sche Formel in n Zenithdistanzen an M angeschlossen und berechnet daraus den Transmissionscoefficienten q so, als ob $A-2B$ die Zenithabsorption wäre, so ist q der grösste Werth des Transmissionscoefficienten p für alle zulässigen Functionen u, die jene n Werthe mit M gemein haben. Aus den früher mitgetheilten Anschlüssen der LAMBERT'schen Formel findet man

Coincidenzstellen

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta = 60^\circ \\ \vartheta = 60^\circ,\ 75^\circ\end{array}\right\} p < 0.809\ ,$$

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta = 60^\circ,\ 80^\circ \\ \vartheta = 60^\circ,\ 80^\circ,\ 85^\circ,\ 87^\circ\!.5\end{array}\right\} p < 0.807\ .$$

D. Wir wollen die unter C. erhaltene Formel verschiedenfach variiren, namentlich um zu erkennen, ob die Voraussetzung einer Discontinuität in der Atmosphäre wesentlich oder nur Formsache ist.

Man kann das Glied $a\Phi(b\cos\vartheta)$, das die »normale« Atmosphäre repräsentirt, durch andere ersetzen; es soll noch der Fall

$$\operatorname{Log}(J_0 : J) = \frac{a\tau^2}{1 + b\tau^2} + c(\sec\vartheta' - 1)\,, \quad \tau = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

hier geprüft werden. Schreibt man den Werth von φ und drei Coincidenzstellen vor, so wird nach Elimination von zwei Unbekannten die Gleichung für die dritte quadratisch; die Wurzelsysteme müssen die Bedingungen

$$a > 0\,, \quad b > -1\,, \quad c > 0$$

erfüllen. Man findet z. B. für $\varphi = 10^\circ$ und die drei Coincidenzstellen 60°, 85°, 87°.5 die beiden Systeme

(V) $\operatorname{Log} a = 9.12495$, $\operatorname{Log} b = 9.98376n$, $\operatorname{Log} c = 8.46463$.
$\operatorname{Log} a = 9.87420$, $\operatorname{Log} b = 9.89209n$, $\operatorname{Log} c = 9.42768n$,

von denen nur das erste brauchbar ist. Mit ihm sind die nachher unter (V) folgenden Widersprüche $M - H$ berechnet; der Transmissionscoefficient wird $p = 0.800$.

In den weiteren Hypothesen behalten wir den Term $a\,\Phi(b\cos\vartheta)$ bei, ersetzen aber das Glied $c\sec\vartheta'$, das wir kurz als das »Zusatzglied« bezeichnen wollen, durch andere.

Statt der unendlich dünnen Schicht können wir eine nach unten begrenzte, nach oben unbegrenzte Schicht von abnehmender Dichtigkeit voraussetzen; dem Zusatzgliede kann dann die Form

$$a'\Phi(b'\cos\vartheta')\,, \quad \sin\vartheta' = \cos\varphi\sin\vartheta$$

gegeben werden, die von drei Parametern a', b', φ abhängt.

Mit

$$c = b \operatorname{tg} \varphi\,, \quad c' = b' \sin \varphi$$

kann man dann die vollständige Formel schreiben

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(J_1 : J) &= a\,\Phi(b \cos \vartheta) + a'\,\Phi(b' \cos \vartheta') \\ &= a\,\Phi(c \operatorname{cotg} \omega) + a'\,\Phi(c' \operatorname{cosec} \omega)\,.\end{aligned}$$

Nehmen wir wieder $\varphi = 10^\circ$ und die obigen drei Coincidenzen, so ist ein Parameter übrig; wir können etwa noch $c = c'$ vorschreiben oder c' beliebig wählen. Ich habe zwei Fälle gerechnet:

(VI) $c = c'$.	$\operatorname{Log} a = 0.52340$	$\operatorname{Log} c = 0.72500$	$p = 0.802$
	$\operatorname{Log} a' = 0.39206$	$\operatorname{Log} c' = 0.72500$	
(VII) c' beliebig	$\operatorname{Log} a = 0{,}50901$	$\operatorname{Log} c = 0.68800$	$p = 0.801$
gewählt	$\operatorname{Log} a' = 9.94030$	$\operatorname{Log} c' = 0.30000$	

Umgekehrt können wir auch eine nach oben begrenzte Schicht zu Grunde legen, deren Dichtigkeit nach dem Beobachtungsorte zu abnimmt. Nach den Formeln (43)—(47) entspricht z. B. das Glied

$$\operatorname{Log} \frac{J_1}{J} = a_1 \sigma + a_2 \sigma^3\,, \quad \sigma = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$$

einem Ausdruck F', der zwischen den Grenzen ν und $\nu_1 = \nu \sec \varphi$ proportional ist mit

$$a_1 + 3a_2 x\,, \quad x = 1 - 2 \operatorname{cotg} \varphi^2 \left(\frac{\nu'^2}{\nu^2} - 1\right).$$

Setzt man $a_1 + 3a_2 = 0$, so wird F' proportional mit $1 - x$ oder mit $\frac{\nu'^2}{\nu^2} - 1$, verschwindet also am Beobachtungsort, wächst bis zu einem Maximum an der Stelle $\nu' = \nu_1$ und springt dann zum Werthe 0 zurück; man hat die zweite Formel (39) vor sich. Die Hypothese

$$\operatorname{Log}(J_1 : J) = a\,\Phi(b \cos \vartheta) + a_1 (\sigma - \tfrac{1}{3}\sigma^3)$$

mit $\varphi = 10^\circ$ und den obigen drei Coincidenzstellen an *M* angeschlossen, ergiebt

(VIII) $\operatorname{Log} a = 0.63809$, $\operatorname{Log} b = 1.71000$, $\operatorname{Log} a_1 = 9.78155$,
$p = 0.803$.

Weiter folgen zwei Hypothesen, worin die unendlich dünne Schicht durch einen nach beiden Seiten stetigen Verlauf der Function F' ersetzt ist, der in der Höhe jener Schicht ein Maximum hat. Wir können dann dem Zusatzgliede eine der Formen

$$a\,\Psi(b\cos\vartheta)\,,\quad aX(b\cos\vartheta)\,,\,\ldots$$

geben, wo Ψ, X, ... die durch (36) definirten Functionen ihres Argumentes sind. Die Function F' ist dabei, bis auf einen constanten Factor, gleich

$$e^{-w}w\,,\quad e^{-w}w^2\,,\,\ldots$$

$$w = b^2\left(\frac{\nu'^2}{\nu^2} - 1\right) = b^2\,\mathrm{tg}\,\varphi^2\,,$$

wenn $\nu' = \nu\sec\varphi$ gesetzt wird. Sie verschwindet am Beobachtungsorte ($w = 0$) und in den oberen Schichten der Atmosphäre (e^{-w} unmerklich); ein Maximum hat sie für

$$w = 1\,,\quad w = 2\,,\,\ldots$$

Soll das Maximum in einer bestimmten Höhe φ stattfinden, so folgt daraus

$$b = \mathrm{cotg}\,\varphi\,,\quad b = \sqrt{2}\,\mathrm{cotg}\,\varphi\,,\,\ldots$$

Wir setzen nun an

$$\mathrm{Log}\,(J_1 : J) = a\,\Phi(b\cos\vartheta) + a'\,\Psi(b'\cos\vartheta)\,;$$

das dem Zusatzgliede entsprechende F' soll ein Maximum bei $\varphi = 10^\circ$ haben, woraus $b' = \mathrm{cotg}\,10^\circ$ folgt; abgerundet

$$\mathrm{Log}\,b' = 0.75.$$

Die drei anderen Parameter, durch Anschluss in den drei bekannten Zenithdistanzen bestimmt, ergeben die Hypothese

(IX) $\mathrm{Log}\,a = 0.49560$ $\mathrm{Log}\,b = 1.41800$ $\mathrm{Log}\,a' = 9.64455$ $\mathrm{Log}\,b' = 0.75000$ $p = 0.798$.

Ebenso

$$\mathrm{Log}\,(J_1 : J) = a\,\Phi(b\cos\vartheta) + a'\,X(b'\cos\vartheta)\,;$$

$b' = \sqrt{2}\,\mathrm{cotg}\,10^\circ$ oder $\mathrm{Log}\,b' = 0.9$. Anschluss in denselben drei Zenithdistanzen; Hypothese

(X) $\mathrm{Log}\,a = 0.50516$ $\mathrm{Log}\,b = 1.44200$ $\mathrm{Log}\,a' = 9.50213$ $\mathrm{Log}\,b' = 0.90000$ $p = 0.800$.

Endlich mag noch ein Versuch mit der Formel

$$\text{Log}\,(J_1 : J) = a\,\Phi(b \cos \vartheta) + a'\,\Phi(b' \cos \vartheta)$$

folgen, deren Anschluss an *M* etwas ungünstiger ausfällt; die Hypothese

$$\text{(XI)} \quad \begin{matrix} \text{Log}\, a = 0.47117 & \text{Log}\, b = 1.32200 \\ \text{Log}\, a' = 9.12138 & b' = 1 \end{matrix} \quad p = 0.758$$

ist auch nur deshalb aufgenommen, weil sie, ohne im Gang der Widersprüche von den übrigen erheblich abzuweichen, einen viel kleineren Transmissionscoefficienten ergiebt.

In der nun folgenden Tabelle sind die Widersprüche *M* — *H* (in Einheiten der dritten Decimale) für die Hypothesen (V) bis (XI) zusammengestellt.

M — *H*

ϑ	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
0°	0	0	0	0	0	0	0
40	— 5	— 5	— 5	— 5	— 5	— 5	— 6
60	0	0	0	0	0	0	0
75	+ 14	+ 14	+ 15	+ 12	+ 17	+ 16	+ 24
80	+ 12	+ 12	+ 14	+ 8	+ 17	+ 15	+ 25
83	0	0	+ 2	— 3	+ 4	+ 3	+ 9
85	0	0	0	0	0	0	0
86	+ 5	+ 4	+ 3	+ 7	+ 2	+ 3	— 1
87	+ 7	+ 6	+ 5	+ 10	+ 4	+ 4	0
87.5	0	0	0	0	0	0	0

Diese Zahlen geben einerseits zu erkennen, dass eine weitere Verbesserung des Anschlusses wohl von keiner anderen Formel zu erwarten ist, da die Abweichungen zwischen 60° und 80° sich vergrössern, wenn die zwischen 85° und 87°.5 abnehmen und umgekehrt; andererseits, dass die unter C. vorausgesetzte Discontinuität der Atmosphäre nur eine formelle war und durch andere Annahmen ersetzt werden kann. Noch ist zu bemerken, dass die Hypothesen V bis X als Modificationen von III anzusehen sind, mit der sie den Werth $\varphi = 10°$ (sei es als Stelle einer Unstetigkeit oder eines Maximums der Luftdichtigkeit) gemeinsam haben; auch dieser Werth kann innerhalb weiter Grenzen variirt werden. Als physikalischer Thatbestand, auf den die Hypothesen

I bis X hindeuten, bleibt also nur übrig, dass die absorbirende Kraft der Atmosphäre zwar zuerst mit wachsender Höhe abnimmt, in grösseren Höhen aber (50 bis 200 km) wieder merkliche Werthe besitzt.

E. Endlich mag noch versucht werden, wie sich der Anschluss ändert, wenn auch in der »normalen« Atmosphäre (deren Dichtigkeit vom Beobachtungsorte an abnimmt) das Maximum der Dichtigkeit in eine beliebige Höhe verlegt wird, wenn wir also eine Atmosphäre mit zwei Dichtigkeitsmaximis in den Höhen φ_1 und φ_2 vor uns haben. Um diese Hypothese formell zu prüfen, genügt es wieder, zwei unendlich dünne Schichten zu betrachten und die Formel anzusetzen

$$u = c_1(\sec\vartheta_1 - 1) + c_2(\sec\vartheta_2 - 1),$$

$$\sin\vartheta_1 = \cos\varphi_1 \sin\vartheta, \qquad \sin\vartheta_2 = \cos\varphi_2 \sin\vartheta.$$

Numerische Parameter sind c_1, c_2, φ_1, φ_2; wir wählen φ_1 beliebig und bestimmen die drei anderen durch Coincidenz in 60°, 85°, 87°.5. Es mögen die drei Hypothesen mitgetheilt werden

	φ_1	φ_2	Log c_1	Log c_2	p
(I)	0°	7° 3′	8.55269	8.76992	0.804
(XII)	1°	7° 54′	8.63018	8.71779	0.804
(XIII)	2°	15° 38′	8.80680	8.53948	0.797

von denen die erste uns schon in anderem Zusammenhange begegnet ist.

$M - H$

ϑ	0°	40°	60°	75°	80°	83°	85°	86°	87°	87°.5
I	0	−4	0	+11	+5	−7	0	+11	+16	0
XII	0	−4	0	+12	+7	−4	0	+8	+11	0
XIII	0	−5	0	+20	+21	+8	0	−2	−2	0

IV.

Wir können hiermit unsere Aufgabe, aus den Absorptionsbeobachtungen die Constitution der Atmosphäre zu erschliessen, innerhalb der sachlich gezogenen Grenzen als gelöst ansehen.

Die Antwort fällt zum Theil unbestimmt aus; wir haben eine ganze Gruppe von Hypothesen erhalten, zwischen denen numerisch die Wahl schwer sein dürfte, die aber physikalisch, wenn auch Aehnliches, so doch nicht Gleiches besagen. Allerdings haben wir noch nicht das ganze empirische Material erschöpft und zwei Controllen, darunter eine sehr wichtige, ganz ausser Acht gelassen; nimmt man diese hinzu, so verengert sich sofort der Kreis der Hypothesen. Die eine ist der Verlauf der Werthe u in unmittelbarer Nähe des Horizontes. Für die Horizontalabsorption finden sich aus unseren Formeln alle möglichen Werthe bis zu ∞; gelänge es, aus den Beobachtungen einen wenn auch nur rohen Mittelwerth dieser Grösse herzuleiten, so hätten wir ein empirisches Datum mehr, auf Grund dessen eine Anzahl von Formeln sofort ausscheiden. Von grösserer Bedeutung ist die andere Controlle, die durch Beobachtung auf Stationen verschiedener Meereshöhe. Nehmen wir ein Beispiel und prüfen die den Hypothesen XII und XIII zu Grunde liegende Formel, ob sie sich mit den Beobachtungen in verschiedenen Höhen verträgt. Ein Lichtstrahl, der von oben kommend die beiden absorbirenden Schichten φ_2 und φ_1 passirt hat, erleidet keine Schwächung mehr; zu einem Lichtstrahl am Beobachtungsorte mit der scheinbaren Zenithdistanz ϑ gehört also dieselbe Zenithreduction u, wie zu einem Lichtstrahl in der Höhe ν' $(\nu < \nu' < \nu_1)$ mit der Zenithdistanz ϑ', wo

$$\nu' \sin \vartheta' = \nu \sin \vartheta.$$

Da $\vartheta' < \vartheta$, so würde die Durchsichtigkeit der Luft, bezogen auf gleiche Zenithdistanzen, mit wachsender Höhe zunächst *abnehmen*, bis die erste absorbirende Schicht ν_1 erreicht wäre, die sich in den beiden Fällen (XII) und (XIII) in 1.2, resp. 4.6 km Höhe befindet. Ein solches Verhalten der Atmosphäre widerspricht schon qualitativ dem, was jede Bergbesteigung lehrt.

Um auch ein ziffermässiges Beispiel dafür zu geben, wie sich die Beobachtungen einer Flachlandsstation in verschiedenen Zenithdistanzen ergänzen durch die Beobachtung von Gipfelstationen, wollen wir die unter C. (I) bis (IV) des vorigen Abschnitts zusammengestellten Hypothesen mit den Säntisbeobachtungen[1]) des Herrn G. Müller vergleichen.

1) Publ. d. Potsdamer Obs., Band VIII.

Wir schreiben die dort angewandte Formel jetzt

(58) $$\mathrm{Log}(J_1 : J) = a\,\Phi(b\cos\vartheta) + c\sec\vartheta_1\,,$$

sodass $\nu_1 = \nu\sec\varphi$ die Höhe der absorbirenden Flächenschicht bezeichnet; die Buchstaben mit Accenten beziehen sich wieder auf eine beliebige Höhe ν' zwischen ν und ν_1. Dann gilt

(59) $$\mathrm{Log}(J_1 : J') = a'\,\Phi(b'\cos\vartheta') + c\sec\vartheta_1\,,$$

wo ϑ' die scheinbare Zenithdistanz in der Höhe ν' desjenigen Strahls bezeichnet, der in der Ebene (ν) die Zenithdistanz ϑ hat. Es ist also

$$\nu'\sin\vartheta' = \nu\sin\vartheta\,,$$

ferner

$$b' = b\,\frac{\nu'}{\nu}\,,\qquad w = b^2\left(\frac{\nu'^2}{\nu^2} - 1\right),\qquad a' = a\,e^{-w}\,,$$

und wenn

$$\nu_1 = \nu'\sec\varphi' = \nu\sec\varphi$$

gesetzt wird,

$$\sin\vartheta_1 = \cos\varphi'\sin\vartheta' = \frac{\nu'}{\nu}\cos\varphi\sin\vartheta' = \cos\varphi\sin\vartheta\,.$$

Zur Berechnung von φ' empfiehlt sich die Formel

$$\sin\varphi' = \sin\varphi\sqrt{1 - \left(\frac{\nu'^2}{\nu^2} - 1\right)\mathrm{cotg}\,\varphi^2}\;;$$

ferner werde gesetzt

$$\mathrm{tg}\,\omega' = \mathrm{tg}\,\varphi'\sec\vartheta'\,,$$

$$\sec\vartheta_1 = \sin\omega' : \sin\varphi'\,.$$

Um also die Formel (58) auf die Höhe ν' zu übertragen, schreiben wir an ihrer Stelle die Formel (59), worin a', b', φ' und c die numerischen Parameter, ϑ' die scheinbare Zenithdistanz bedeutet; a', b', φ' sind durch die angegebenen Formeln aus a, b, φ und $\frac{\nu'}{\nu}$ zu berechnen, c bleibt unverändert. Bei der Hypothese (I) ist das erste Glied $\frac{a}{2b}\sec\vartheta$, in das $a\,\Phi(b\cos\vartheta)$ für $\lim a = \infty$, $\lim b = \infty$ übergegangen ist, in der Höhe $\nu' > \nu$ ganz wegzulassen, da es einer unendlich dünnen absorbirenden Schicht durch den Beobachtungsort entspricht.

Für die Höhendifferenz Säntis minus Potsdamer Observatorium habe ich den etwas zu kleinen Werth 2380 m angenommen; der Fehler ist zu unbedeutend, um eine Umrechnung der folgenden Zahlen zu erfordern. Aus den Tabellen am Ende meiner zweiten Abhandlung über die Refraction, wo $r' - r$ als Function von $1 - \frac{\nu}{\nu'}$ gegeben ist, finde ich für diese Höhendifferenz

$$\text{Log}\left(\frac{\nu'^2}{\nu^2} - 1\right) = 6.79441\ , \quad \text{Log}\,\frac{\nu'}{\nu} = 0.00013\ ,$$

und damit die folgenden Werthe der neuen Constanten für die vier betrachteten Fälle:

	I.	II.	III.	IV.
φ'	6° 54′ 31″	7° 52′ 19″	9° 53′ 54″	12° 55′ 34″
Log a'		9.96192	0.27260	0.32873
Log b'		1.70013	1.48513	1.39213
Log c	8.76992	8.70954	8.61102	8.52960
p'	0.873	0.870	0.848	0.837

Berechnet man hieraus etwa für $\vartheta' = 85°$ die Zenithreduction Log$(J'_0 : J')$, so erhält man

$u' = 0.338 \qquad 0.358 \qquad 0.472 \qquad 0.518$

oder in Grössenklassen

$0.85 \qquad 0.90 \qquad 1.18 \qquad 1.30\ ,$

also erheblich verschiedene Werthe; der Müller'sche Werth ist 1.28 (Tab. V, p. 40). Hiernach scheiden die Hypothesen I, II sofort aus; für III und IV folgen einige Werthe von u', ausgedrückt in Grössenklassen; die Müller'schen sind unter M' danebengestellt.

ϑ'	(III)	(IV)	M'	$M' - $(III)	$M' - $(IV)
0°	0	0	0	0	0
40	0.05	0.06	0.04	− 1	− 2
60	0.17	0.18	0.14	− 3	− 4
75	0.45	0.47	0.39	− 6	− 8
80	0.68	0.71	0.64	− 4	− 7
83	0.92	0.98	0.93	+ 1	− 5

ϑ'	(III)	(IV)	M'	M' — (III)	M'—(IV)
85°	1.18	1.30	1.28	+ 10	— 2
86	1.38	1.53	1.55	+ 17	+ 2
87	1.66	1.87	1.92	+ 26	+ 5
87.5	1.85	2.10	2.17	+ 32	+ 7

Will man nicht erhebliche Widersprüche in den höheren Zenithdistanzen übrig lassen, so fällt die Entscheidung zu Gunsten von IV aus. Die Abweichungen M' — (IV) zeigen im Gange sehr grosse Aehnlichkeit mit den Widersprüchen M — L zwischen den Potsdamer Zahlen und der Laplace'schen Formel, haben aber entgegengesetztes Zeichen; dies erklärt sich, unter der Annahme, dass die Werthe IV der Wirklichkeit nahe kommen, dadurch dass die Zahlen M' selbst nach der Laplace'schen Formel gerechnet sind. Man würde z. B. mit

$$u = a[\Phi(b \cos \vartheta') - \Phi(b)],$$

$$\text{Log } a = 0.7477, \quad \text{Log } b = 1.3$$

genau die Zahlen M' wiedererhalten.

In ähnlicher Weise hätte man die übrigen Hypothesen der Controlle durch die Säntistafel zu unterwerfen, wobei zu bedenken ist, dass in den Hypothesen V bis X über einen Parameter, nämlich φ, von vornherein verfügt wurde ($\varphi = 10°$); durch Aenderung dieses Parameters würde der ev. verlorene Anschluss zwischen Formel und Säntistafel wieder herzustellen sein. Da unsere Hypothesen nur Erläuterungsbeispiele sein sollten, können wir auf diese langwierige Rechnung verzichten.

Ebenso können wir uns bezüglich des anderweitigen Beobachtungsmaterials kurz fassen. Es wäre wünschenswerth, eine der Potsdamer Tafel gleichwerthige Zahlenreihe zur Vergleichung heranziehen zu können; die Seidel'sche Tafel für München [1]) zeigt aber, selbst wenn man das sprungweise angesetzte Stück für den Horizont [2]) weglässt, schon von $\vartheta = 80°$ ab Unregelmässigkeiten im Gange der Differenzen, die eine interpolatorische Darstellung merklich erschweren: Unregelmässigkeiten, die auch in einer späteren verbesserten Tafel [3])

1) Abh. der k. bayr. Akademie d. Wissenschaften, VI. Band, III. Abth. p. 581.

2) p. 599.

3) Abh. d. k. bayr. Ak., IX. Band, III. Abth. p. 503.

nicht beseitigt sind. Es ist also gerade dasjenige Stück der Absorptionscurve, das den sichersten Rückschluss auf die atmosphärischen Verhältnisse gestattet, hier nicht zu verwenden. Andere Extinctionstafeln in dieser Art und Ausdehnung liegen nicht vor; dagegen sind im III. Bande der Potsdamer Publicationen[1]) die Tabellen für die fünf einzelnen Sterne gegeben, aus denen die Potsdamer Tafel gemittelt ist. Ein einfacher Anschlussversuch an diese verschiedenen Tabellen wird genügen, um zu zeigen, dass die Verhältnisse im Wesentlichen überall so liegen wie bei den Zahlen M.

Es bedeutet im Folgenden: M die mittlere Potsdamer Extinctionstafel; M_1 bis M_5 die Tafeln für die fünf Müller'schen Sterne und zwar

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
α Cygni,	η Ursae majoris,	δ Persei,	α Aurigae,	α Tauri;

ferner S_1 die ältere und S_2 die verbesserte Seidel'sche Tafel. Alle diese Tafeln haben die wahre Zenithdistanz zum Argument; aus ihnen sind für runde Werthe der scheinbaren Zenithdistanz ϑ die Werthe der Reduction auf das Zenith entnommen, die in den folgenden Täfelchen unter den Buchstaben M und S aufgeführt sind. An diese Zahlen ist die Formel

$$u = a[\Phi(b \cos\vartheta) - \Phi(b)]$$

mit Coincidenz in 60° und 80° angeschlossen worden; nur bei M_1 war dies nicht möglich, statt dessen functionirt hier der günstigste erreichbare Fall $b = \infty$, also

$$u = A(\sec\vartheta - 1)$$

mit Anschluss in 80° allein. Die damit gerechneten Werthe sind unter u aufgeführt. Die Abweichungen stimmen nach Gang und Zeichen bei den Müller'schen Sternen unter einander überein, bis auf M_5, ebenso bei S_1 und S_2 wenigstens bis $\vartheta = 80°$. Um zu sehen, ob an der Grösse einzelner Widersprüche die Formel Schuld trägt, habe ich noch die zweigliedrige Lambert'sche Formel

$$v = A(\sec\vartheta - 1) - B \sec\vartheta \operatorname{tg}\vartheta^2$$

in 60° und 80° an die Tafelwerthe angeschlossen (M_1 ausge-

1) Tab. VI, p. 268.

nommen); die damit gerechneten Werthe v sind dann, wie wir wissen, zwischen 0° und 60° Minimalwerthe, zwischen 60° und 80° Maximalwerthe, sodann wieder Minimalwerthe eines zulässigen Werthverlaufs von u, dem die vorgeschriebenen Werthe für 60° und 80° angehören. Diese Werthe sind unter v beigesetzt, die Minima überstrichen, die Maxima unterstrichen; Einheit ist 0.001. Ferner liefert die Relation

$$\operatorname{Log} \frac{1}{q} = A - 2B$$

unter denselben Voraussetzungen einen Maximalwerth q des Transmissionscoefficienten p.

Tafel M.

$\operatorname{Log} a = 0.31356$ $\operatorname{Log} b = 1.03700$ $p = 0.805$
$\operatorname{Log} A = 8.97164$ $\operatorname{Log} B = 6.44656$ $q = \underline{0.807}$

ϑ	0	20	40	50	60	70	75	80	81	82
M	0	4	24	48	92	180	261	394	432	477
u	0	6	28	51	92	173	252	394	437	488
v	0	$\overline{6}$	$\overline{28}$	$\overline{51}$	92	$\underline{174}$	$\underline{253}$	394	$\overline{434}$	$\overline{479}$

Tafel M_1.

$\operatorname{Log} A = 8.85779$ $B = 0$ $p = q = 0.847$

ϑ	0	20	40	50	60	70	75	80	81	82
M	0	3	19	37	69	139	212	343	380	422
u	0	5	22	40	72	139	206	343	389	446
v	0	$\overline{5}$	$\overline{22}$	$\overline{40}$	$\overline{72}$	$\overline{139}$	$\overline{206}$	343	$\underline{389}$	$\underline{446}$

Tafel M_2.

$\operatorname{Log} a = 0.36416$ $\operatorname{Log} b = 1.16400$ $p = 0.833$
$\operatorname{Log} A = 8.89701$ $\operatorname{Log} B = 6.17022$ $q = \underline{0.835}$

ϑ	0	20	40	50	60	70	75	80
M	0	3	21	40	78	159	233	348
u	0	5	24	44	78	148	217	348
v	0	$\overline{5}$	$\overline{24}$	$\overline{43}$	78	$\underline{148}$	$\underline{218}$	348

Tafel M_3.

Log a = 0.53896 Log b = 1.30000 p = 0.819
Log A = 8.93745 Log B = 5.98855 q = 0.820

ϑ	0	20	40	50	60	70	75	80
M	0	4	23	45	86	171	252	394
u	0	6	26	48	86	164	242	394
v	0	6	26	48	86	164	243	394

Tafel M_4.

Log a = 0.45640 Log b = 1.13900 p = 0.788
Log A = 9.01402 Log B = 6.32880 q = 0.789

ϑ	0	20	40	50	60	70	75	80	81	82
M	0	5	27	52	102	210	306	452	489	531
u	0	7	31	57	102	194	283	452	504	566
v	0	7	31	57	102	194	284	452	503	562

Tafel M_5.

Log a = 0.11473 Log b = 0.65000 p = 0.720
Log A = 9.12194 Log B = 7.02926 q = 0.741

ϑ	0	20	40	50	60	70	75	80	81	82
M	0	5	32	67	126	223	302	432	471	516
u	0	9	41	73	126	224	306	432	465	502
v	0	8	39	71	126	231	322	432	441	434

Tafel S_1.

Log a = 0.21000 Log b = 0.90000 p = 0.792
Log A = 8.99871 Log B = 6.65379 q = 0.796

ϑ	0	20	40	50	60	70	75	80	81	82
S	0	3	17	45	97	192	269	391	433	491
u	0	6	30	55	97	180	257	391	430	474
v	0	6	30	54	97	182	261	391	423	454

Tafel S_2.

Log a = 0.39830 Log b = 1.15000 p = 0.816
Log A = 8.94465 Log B = 6.23651 q = $\underline{0.817}$

ϑ	0	20	40	50	60	70	75	80	81	82
S	0	1	11	36	87	183	260	387	428	485
u	0	6	27	49	87	165	242	387	432	486
v	0	$\overline{6}$	$\overline{27}$	$\overline{48}$	87	$\underline{166}$	$\underline{243}$	387	$\overline{431}$	$\overline{482}$

Die Vergleichung zwischen u und v in den Fällen, wo u und M oder u und S stark von einander abweichen, zeigt, dass ein merklich besserer Anschluss von keiner zulässigen Interpolationsformel u zu erwarten ist; namentlich wird die durchgängige Abweichung zwischen Tafel und Formel in den niederen Zenithdistanzen, besonders bei SEIDEL auffallend, durch die Formel v bestätigt. Im Falle S_2 z. B. kann man mit keinem zulässigen u, das für $\vartheta = 60^\circ$ und 80° die Werthe 0.087 und 0.387 annimmt, für $\vartheta = 40^\circ$ einen Werth unter 0.027 erhalten, während der SEIDEL'sche Werth 0.011 ist. Die Photometrie wird ihr Augenmerk auf die Erklärung dieser zwar kleinen, aber unleugbar systematischen Differenzen zu richten haben. Uebrigens sind die Abweichungen nicht etwa procentualisch zu bemessen, da die mittleren Fehler der beobachteten Grössen u zwar vom Zenith nach dem Horizont zunehmen, aber nicht wie die Grössen u selbst; eine Abweichung nahe am Zenith, wenn sie auch mehr zu sagen hat als eine gleichgrosse nahe am Horizont, ist also in ihrer Bedeutung nicht zu überschätzen.

Damit verlassen wir diese Betrachtungen und wenden uns schliesslich zu den LANGLEY'schen Einwürfen gegen die bisherige Absorptionstheorie. Die Grundformel (7) der Absorption oder

$$J = J_1\, 10^{-P},$$

wo P eine Function von Constanten und der scheinbaren Zenithdistanz ϑ, J_1 die ursprüngliche Lichtintensität ist, gilt nach der Bemerkung LANGLEY's nur für homogenes Licht; im Falle zusammengesetzten Lichtes tritt an ihre Stelle die Summenformel

$$J = \sum J_1\, 10^{-P},$$

wo J_1 und die in P auftretenden Constanten von der Wellenlänge abhängen und die Summe über alle einfachen Strahlen der betrachteten Lichtquelle zu erstrecken ist. Herr Langley zeigt[1], dass in Folge dieser theoretischen Incorrectheit die Absorption der Atmosphäre und die Intensität ausserhalb der Atmosphäre zu klein gefunden wird; nach seiner Meinung absorbirt die Atmosphäre doppelt so viel Licht, als bisher angenommen wurde, sodass der Transmissionscoefficient nicht in der Nähe von 0.8, sondern von 0.6 läge.

Der Langley'sche Einwand ist theoretisch gewiss zutreffend und bei den Untersuchungen über die Sonnenstrahlung auch praktisch entschieden von Belang. In der Sternphotometrie kann man ihm entgegenhalten, dass das Licht der meisten Sterne praktisch als homogen angesehen werden kann, weil die physiologisch wirksamsten Strahlen des Spectrums in einer schmalen Zone des Gelben concentrirt sind. Eine merkliche Fehlerhaftigkeit der monochromatischen Absorptionstheorie müsste sich jedenfalls in systematischen Widersprüchen zwischen Theorie und Erfahrung verrathen, die durch Berücksichtigung der Langley'schen Correction verkleinert werden. Solche Widersprüche sind vorhanden, wie der Anschluss der Laplace'schen Formel an die Potsdamer Tabelle zeigt; es ist daher von Interesse, zu untersuchen, ob sich der Anschluss auf dem von Herrn Langley angegebenen Wege verbessern lässt. Dies ist in der That der Fall, allerdings mit Benutzung hypothetischer Daten, die sich nicht mit der Wirklichkeit zu decken brauchen; dagegen findet selbst hier der Langley'sche Schluss auf die Grösse des Transmissionscoefficienten keine Bestätigung.

Wir legen für monochromatische Absorption die Formel

$$(60) \qquad \mathrm{Log}\,\frac{J_1}{J} = a\,\Phi(b\xi)\,, \qquad \xi = \cos\vartheta$$

zu Grunde. (a, b Constanten, ϑ scheinbare Zenithdistanz, $\Phi(x)$ die Kramp'sche Function. Log bedeutet gewöhnliche, log natürliche Logarithmen.) Führen wir die Bezeichung

$$10^x = [x]$$

ein und schreiben c an Stelle von J_1, so wird

$$J = c[-a\,\Phi(b\xi)]\,;$$

---

1) American Journal of Science, vol. 28.

hierbei ist c die Intensität ausserhalb der Atmosphäre,

$$p = [-a\Phi(b)]$$

der Transmissionscoefficient. Nach Herrn Langley ist für die beobachtete Intensität K zu setzen

$$K = \sum_\lambda J_\lambda = \sum_\lambda c_\lambda[-a_\lambda \Phi(b_\lambda \xi)],$$

wobei von der Dispersion durch die Atmosphäre abgesehen ist. Die Summation ist auszudehnen über sämtliche Wellenlängen λ des beobachteten Sternlichts; a_λ, b_λ, c_λ sind Functionen von λ. In der Laplace'schen Theorie hat allerdings b_λ den constanten aus der Refractionstheorie zu entlehnenden Werth $b = 20$; nach unseren Betrachtungen aber liegt kein Grund vor, b als unabhängig von λ anzusehen. Der Anschluss von (60) an die fünf Müller'schen Sterne ergab sehr verschiedene Werthe von b zwischen 4 und ∞, wobei freilich noch zu beweisen bleibt, dass das verschiedene Verhalten der Müller'schen Sterne ihrem Spectraltypus zuzuschreiben ist. Trotzdem wollen wir der Einfachheit wegen b als unabhängig von der Wellenlänge ansehen, um bei den folgenden Integrationen auf geschlossene Ausdrücke zu kommen.

Setzen wir voraus, dass a und c stetige Functionen der Wellenlänge sind (dass also keine selective Absorption stattfindet) und dass zwischen den Grenzen des sichtbaren Spectrums a beständig von a_0 bis a_1 wächst, so können wir schreiben

(61) $$K = \int_{a_0}^{a_1} c[-a\Phi(b\xi)]\,da\,.$$

Hier drückt allerdings c nur dann noch die Intensität des einzelnen Strahles vor der Absorption aus, wenn die Wahl der unabhängigen Variablen a den Einzelintensitäten das richtige Gewicht belässt, mit dem sie in die Mischung eingehen; die Curve c fällt also nicht nothwendig mit der physiologischen Intensitätscurve zusammen. Dagegen muss vorausgesetzt werden, dass im Integrationsgebiet c beständig positiv, ebenso, dass die untere Grenze a_0 nicht negativ sei, weil sonst der zugehörige Transmissionscoefficient

$$p_0 = [-a_0\Phi(b)]$$

grösser als 1 wäre. Wir bilden noch:

Intensität K_1 vor der Absorption,

(62) $$K_1 = \int_{a_0}^{a_1} c\, d\, a\,.$$

Intensität K_0 im Zenith,

(63) $$K_0 = \int_{a_0}^{a_1} c\,[-a\,\Phi(b)]\, d\, a\,.$$

Gesammt-Transmissionscoefficient P,

(64) $$P = K_0 : K_1\,.$$

Einzelne Transmissionscoefficienten

$$p = [-a\,\Phi(b)]\,,$$

an den Grenzen

(65) $$p_0 = [-a_0\,\Phi(b)]\,, \qquad p_1 = [-a_1\,\Phi(b)]\,,$$

geometrisches Mittel

(66) $$p' = \sqrt{p_0 p_1} = [-\frac{a_0 + a_1}{2}\,\Phi(b)]\,.$$

Um die Integration auszuführen, nehmen wir an, dass c innerhalb der Integrationsgrenzen als endliches Aggregat positiver oder negativer Potenzen von p darstellbar sei und setzen

(67) $$c = \gamma \sum_\lambda c_\lambda \left(\frac{p}{p'}\right)^\lambda\,,$$

wo c_λ und γ gewisse Constanten bedeuten; γ ist hinzugefügt, um nachher einen Integrationsfactor wegzuschaffen. Daraus folgt

$$\frac{\partial K}{\partial c_\lambda} = \gamma p'^{-\lambda} \int [-a\,\Phi(b\xi) - a\lambda\,\Phi(b)]\,da$$

$$= \frac{\gamma M p'^{-\lambda}}{\Phi(b\xi) + \lambda\,\Phi(b)} \{[-a_0\Phi(b\xi) - a_0\lambda\Phi(b)] - [-a_1\Phi(b\xi) - a_1\lambda\Phi(b)]\},$$

wenn

$$M = \text{Log}\, e = \frac{1}{\log 10}$$

den Modul der Brigg'schen Logarithmen bedeutet. Setzen wir

(68) $$a_0 = a - \alpha\,, \quad a_1 = a + \alpha\,,$$

ferner

(69) $$\frac{10^x - 10^{-x}}{x} = s(x)\,,$$

so wird

$$\frac{\partial K}{\partial c_\lambda} = \frac{\gamma M \alpha}{p'^\lambda}\,[-a\Phi(b\xi) - a\lambda\Phi(b)]\,.\,s(\alpha\Phi(b\xi) + \alpha\lambda\Phi(b))$$
$$= \gamma M \alpha[-a\Phi(b\xi)]\;s(\alpha\Phi(b\xi) + \alpha\lambda\Phi(b))\,.$$

Setzen wir weiter

(70) $$\gamma M \alpha = 1$$

und behandeln K_0 und K_1 in derselben Weise, so folgt schliesslich

(71) $$\begin{cases} K = [-a\Phi(b\xi)]\sum c_\lambda s(\alpha\Phi(b\xi) + \alpha\lambda\Phi(b))\,, \\ K_0 = [-a\Phi(b)]\sum c_\lambda s(\alpha(1+\lambda)\Phi(b))\,, \\ K_1 = \qquad\qquad \sum c_\lambda s(\alpha\lambda\Phi(b))\,. \end{cases}$$

Zu erinnern ist, dass

$$s(0) = 2\log 10 = \frac{2}{M}\,,$$

$$\mathrm{Log}\, s(0) = 0.6632457\,.$$

Wir schreiben die Formeln noch einmal für den Fall, dass a, α, b unendlich werden nach den Grenzformeln

$$\lim\frac{a}{2b} = \lim a\Phi(b) = m\,, \quad \lim\frac{\alpha}{2b} = \lim \alpha\Phi(b) = \mu\,,$$

m und μ endlich. Dann wird

$$\lim a\Phi(b\xi) = m\sec\vartheta, \quad \lim\alpha\Phi(b\xi) = \mu\sec\vartheta;$$

(72) $$\begin{cases} K = [-m\sec\vartheta]\sum c_\lambda s(\mu\sec\vartheta + \mu\lambda]\,, \\ K_0 = [-m] \qquad \sum c_\lambda s(\mu + \mu\lambda)\,, \\ K_1 = \qquad\qquad \sum c_\lambda s(\mu\lambda)\,. \end{cases}$$

Die Transmissionscoefficienten werden hier

(73) $$p_0 = [-m+\mu]\,, \quad p_1 = [-m-\mu]\,, \quad p' = [-m]\,.$$

Für $\alpha = 0$ oder $\mu = 0$ gehen die Formeln wieder in die für monochromatische Absorption über.

Disponible Constanten sind in diesen Formeln a, α, b (resp. m, μ) und die Verhältnisse der c_λ. Dabei sollen p_0 und p_1 die Werthe erhalten, die den Grenzen des sichtbaren Spectrums entsprechen; da wir aber nicht wissen, wie weit wir hier den Begriff »sichtbares Spectrum« zu fassen haben, so wird es sich empfehlen, den Werthen p_0 und p_1 ausser der Bedingung $1 > p_0 > p_1$ von vornherein keine Vorschriften zu machen. Die Discussion der Gleichungen, die sich, durch Aufstellung von Coincidenzbedingungen, für die unbekannten Parameter ergeben, ist allerdings dann etwas mühsam und muss sich auf die einfachsten Fälle beschränken.

I. Wir setzen in (71) alle $c_\lambda = 0$ bis auf $c_0 = 1$, dann wird

$$(74)\quad \begin{cases} \text{Log}(K_0 : K) = a\,\Phi(b\,\xi) - a\,\Phi(b) - \text{Log}\,s(\alpha\Phi(b\,\xi)) + \text{Log}\,s(\alpha\Phi(b)), \\ \text{Log}\,P = \text{Log}(K_0 : K_1) = -a\,\Phi(b) + \text{Log}\,s(\alpha\,\Phi(b)) - \text{Log}\,s(0)\,. \end{cases}$$

Diese Formel für $\text{Log}(K_0 : K)$, mit den Parametern a, b, α, habe ich mit verschiedenen Annahmen über α in zwei Coincidenzstellen an M angeschlossen; für $\alpha = \infty$ treten an Stelle von (74) die Formeln

$$(75)\quad \begin{cases} \text{Log}(K_0 : K) = m\,(\sec\vartheta - 1) - \text{Log}\,s(\mu\sec\vartheta) + \text{Log}\,s(\mu)\,, \\ \text{Log}\,P = -m + \text{Log}\,s(\mu) - \text{Log}\,s(0)\,. \end{cases}$$

Ich theile folgende Versuche mit.

A. Anschlussstellen 60° und 85°.

$\alpha = 0.$ $\text{Log}\,a = 0.30490$ $\text{Log}\,b = 1.02720$ $P = 0.805$

$\alpha = 3.$ $\text{Log}\,a = 0.59870$ $\text{Log}\,b = 1.30000$ $p_0 = 0.946$ $p_1 = 0.669$ $P = 0.799$

$\alpha = \infty.$ $\text{Log}\,m = 9.00676$ $\text{Log}\,\mu = 8.96000$ $p_0 = 0.976$ $p_1 = 0.642$ $P = 0.797$

Widersprüche $M - H$.

ϑ	0	60°	75°	85°	87°	87°5
$\alpha = 0$	0	0	+ 10	0	+ 89	+ 136
$\alpha = 3$	0	0	+ 12	0	+ 76	+ 116
$\alpha = \infty$	0	0	+ 14	0	+ 40	+ 53

B. Anschlusstellen 85° und 87°5.

$\alpha = 0$. $\text{Log}\, a = 0.46143$ $\text{Log}\, b = 1.26300$ $P = 0.834$

$\alpha = 3$. $\text{Log}\, a = 0.68595$ $\text{Log}\, b = 1.45900$ $p_0 = 0.929$ $p_1 = 0.731$ $P = 0.826$

$\alpha = \infty$. $\text{Log}\, m = 8.97019$ $\text{Log}\, \mu = 8.89250$ $p_0 = 0.965$ $p_1 = 0.674$ $P = 0.811$

Widersprüche $M - H$.

ϑ	0	60°	75°	85°	87°	87°5
$\alpha = 0$	0	+ 14	+ 41	0	− 2	0
$\alpha = 3$	0	+ 11	+ 37	0	− 1	0
$\alpha = \infty$	0	+ 6	+ 26	0	+ 6	0

Die Einführung der Langley'schen Hypothese bedeutet also im Anschluss eine entschiedene Verbesserung; dagegen ändert sie, wie weit auch die Grenzwerthe p_0 und p_1 auseinanderliegen, den Werth des Gesammt-Transmissionscoefficienten nur unerheblich. Dies wiederholt sich bei den folgenden Versuchen, bei denen wir nur den Fall a, b, $\alpha = \infty$ als den einfachsten und günstigsten weiterbehandeln, also an Stelle von (71) uns auf die Formeln (72) beziehen.

II. Setzen wir in (72) $c_0 = 1$ und $c_1 = c$, alle übrigen $c_\lambda = 0$, so wird

$$(76)\quad \begin{cases} \text{Log}\,(K_0 : K) = m\,(\sec\vartheta - 1) - \text{Log}\,\dfrac{s(\mu\sec\vartheta) + c\,s(\mu\sec\vartheta + \mu)}{s(\mu) + c\,s(2\mu)}\,, \\[2ex] \text{Log}\, P = -m + \text{Log}\,\dfrac{s(\mu) + c\,s(2\mu)}{s(0) + c\,s(\mu)}\,. \end{cases}$$

Parameter sind m, μ, c. Zu beachten sind die Bedingungen, dass im Integrationsintervall der Ausdruck $1 + c\dfrac{p}{p'}$ sein Zeichen nicht wechseln, und p_0 nicht grösser als 1, also μ nicht grösser als m sein darf. Die noch zulässigen Grenzfälle

(α) $\quad \mu = m\,,$

(β) $\quad 1 + c\dfrac{p_0}{p'} = 0\,,$ oder $c = -10^{-\mu}\,,$

(γ) $\quad 1 + c\dfrac{p_1}{p'} = 0\,,$ oder $c = -10^{\mu}$

verringern die Anzahl der Parameter auf zwei. Schreibt man Coincidenz bei 85° und 87°.5 vor, so scheidet der Fall (β) aus, weil er

$$\text{Log}\, m = 8.79541\,, \quad \text{Log}\, \mu = 8.83300\,, \quad \text{Log}\, c = 9.93192n\,,$$

also $\mu > m$ ergiebt. Die Fälle (α) und (γ) dagegen sind zulässig; fügt man noch die beiden anderen

$$c = 0 \text{ und } c = \infty$$

hinzu und ordnet nach steigenden Werthen von c (wobei ∞ als Uebergang von $+$ zu $-$ gilt), so ergeben sich zur Uebersicht des Anschlusses folgende vier Hypothesen:

	Log c	Log m	Log μ	p_0	p_1	P
(α)	9.92622n	8.81900	8.81900	1.000	0.738	0.826
$c = 0$		8.97019	8.89250	0.965	0.674	0.811
$c = \infty$		9.00786	8.93100	0.963	0.650	0.806
(γ)	0.14009n	9.19956	9.14640	0.959	0.503	0.792

$M - H$

ϑ	0°	60°	75°	85°	87°	87°.5
(α)	0	+ 11	+ 38	0	− 2	0
$c = 0$	0	+ 6	+ 26	0	+ 6	0
$c = \infty$	0	+ 4	+ 22	0	+ 8	0
(γ)	0	− 1	+ 14	0	+ 9	0

Das Gebiet $-1.381 < c < -0.844$ liefert also keinen brauchbaren Anschluss. Innerhalb der Gebiete $-0.844 < c < \infty$ und $-\infty < c < -1.381$ ist die Uebereinstimmung zwischen Tafel und Formel recht befriedigend; der günstigste Fall liegt bei (γ), wo die Intensität der Strahlen p_1, d. h. der brechbarsten Strahlen des Spectrums, als verschwindend angenommen wurde, der ungünstigste bei (α), wo das Intensitätsverhältniss $\frac{p' + cp_1}{p' + cp_0}$ $= \frac{\text{violett}}{\text{roth}}$ seinen grössten Werth 15 hat (vgl. aber die obige Bemerkung über die Intensität der einzelnen Strahlen).

III. Nehmen wir aus (72) ein Glied mit beliebigem, auch irrationalem Index λ heraus und setzen $\mu\lambda = \nu$, so können wir schreiben

$$(77)\quad \begin{cases} \operatorname{Log}(K_0 : K) = m(\sec\vartheta - 1) - \operatorname{Log}\dfrac{s(\mu\sec\vartheta + \nu)}{s(\mu + \nu)}, \\ \operatorname{Log} P = -m + \operatorname{Log}\dfrac{s(\mu+\nu)}{s(\nu)}. \end{cases}$$

Wir stellen die bereits bekannten Hypothesen $\nu = 0$ und $\nu = \mu$ mit einer dritten $\nu = \frac{1}{2}$ zusammen.

	Log m	Log μ	p_0	p_1	P
$\nu = 0$	8.97019	8.89250	0.965	0.674	0.811
$\nu = \mu$	9.00786	8.93100	0.963	0.650	0.806
$\nu = \frac{1}{2}$	9.21810	9.16400	0.956	0.489	0.799

$M - H$

ϑ	0°	60°	75°	85°	87°	87°.5
$\nu = 0$	0	+ 6	+ 26	0	+ 6	0
$\nu = \mu$	0	+ 4	+ 22	0	+ 8	0
$\nu = \frac{1}{2}$	0	− 4	+ 8	0	+ 11	0

Noch grössere Werthe von ν würden den Anschluss in den höheren Zenithdistanzen zu sehr verschlechtern.

Diese Rechnungen mögen genügen, um zu zeigen, dass man mit der Langley'schen Bemerkung in der That einen weit besseren Anschluss an die Beobachtungen erzielen kann als durch die Laplace'sche Formel. Freilich ist nicht zu vergessen, dass unsere Anschlüsse insofern hypothetisch sind, als wir über alle empirischen Data wie über neu zu bestimmende Unbekannte verfügt haben; die dafür erhaltenen Werthe können aber durch anderweitige Beobachtungen umgestossen werden. Die Grenzwerthe p_0 und p_1 des Transmissionscoefficienten z. B. liegen bei fast allen Versuchen weiter auseinander, als es die bolometrischen und spectralphotometrischen Untersuchungen gestatten[1]; ebenso

1) Potsd. Publ. VIII, p. 7.

haben wir für die Abhängigkeit der Intensität von der Wellenlänge beliebige Annahmen gemacht, während sie, abgesehen von kleinen persönlichen und instrumentellen Verschiedenheiten, offenbar für jede Lichtquelle eine ganz bestimmte ist. Gar nicht bestätigt hat sich Herrn Langley's Schluss auf einen Werth des Transmissionscoefficienten in der Nähe von 0.6; wir erhalten durchweg, wie auch das Intervall p_0 bis p_1 gelegen sein möge, für das Verhältniss P der gesammten durchgelassenen zur gesammten ursprünglichen Lichtmenge den bekannten Werth 0.8.

Die Hauptresultate dieser Arbeit lassen sich in folgenden Sätzen aussprechen:

1) Die Abweichungen der Laplace'schen Absorptionsformel von den Beobachtungen finden ihren Grund nicht in der Incorrectheit der Theorie, sondern werden durch strenge Entwicklung des Zusammenhanges zwischen Refraction und Absorption sogar etwas vergrössert.

2) Die Zahlen der gebräuchlichen Extinctionstabellen lassen sich nicht in aller Strenge durch eine physikalisch brauchbare Absorptionsformel darstellen, durch eine solche nämlich, bei der die absorbirende Kraft der Luftschichten stets positiv ist. Die günstigste Darstellung erhält man bei der Annahme, dass ein erheblicher Theil der Absorption in den höchsten Schichten der Atmosphäre (50 bis 200 km) vor sich geht.

3) Auch die Langley'schen Bemerkungen erklären einen Theil der Widersprüche zwischen Theorie und Beobachtung, führen aber zu keiner Verkleinerung des Transmissionscoefficienten.

4) Zur Ausgleichung photometrischer Beobachtungen und Reduction auf das Zenith empfiehlt sich, bei mässiger Genauigkeit, die Formel

$$\mathrm{Log}\,(J_0 : J) = a\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}^2 : \left(1 + b\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}^2\right),$$

wo J_0 die Intensität im Zenith, J diejenige in der scheinbaren Zenithdistanz ϑ, a und b zwei Constanten sind, von denen $a > 0$ und $b > -1$ sein muss. Für den Transmissionscoefficienten p gilt hierbei die Gleichung

$$\mathrm{Log}\,\frac{1}{p} = \mathrm{Log}\,(J_1 : J_0) = \frac{a}{1 - b},$$

in der J_1 die ursprüngliche Intensität ausserhalb der Atmosphäre bedeutet.

SITZUNG VOM 1. JULI 1895.

Vorträge hielten:

1. Herr **Otto Fischer**, a. o. M.: Beiträge zu einer Muskeldynamik I. (Erscheint in den »Abhandlungen«.)
2. Herr **W. Scheibner**, o. M.: Ankündigung einer Note von Prof. Staude Rostock: »Über die Focaleigenschaften der Paraboloide«.
3. Herr **W. Ostwald**, o. M.: Ankündigung einer Abhandlung »Über die Arten physikalischer Grössen«.
4. Herr **H. Bruns**, o. M.: Vorlegung einer Abhandlung von Dr. Bruno Peter: »Untersuchungen am hiesigen Heliometer«.

O. Staude-Rostock, *Die Focaleigenschaften der Paraboloide*[1].

Bei einer Parabel ist jeder Punkt von Brennpunkt und Directrix gleichweit entfernt. Eine dieser Eigenschaft der Parabel entsprechende Eigenschaft der Paraboloidflächen, wie sie in gleicher Einfachheit meines Wissens noch nicht bekannt gewesen ist, erlaube ich mir im Folgenden mitzutheilen. Die weitere Ausdehnung der Resultate und die Ausführung des nur angedeuteten Beweises behalte ich einer späteren Veröffentlichung vor.

§ 1.

Die Focalparabeln der Paraboloide.

Wir gehen von einem System confocaler Paraboloide:

$$(1)\qquad \frac{y^2}{\beta - t} + \frac{z^2}{\gamma - t} + 2x + t = 0$$

aus. Das Coordinatensystem $Oxyz$ liege etwa so, dass in der als Zeichnungsebene (vgl. Fig. 1) gewählten zx-Ebene die z-Axe vertical aufwärts und die x-Axe nach rechts laufe, während die y-Axe nach vorn aus der Zeichnungsebene heraustritt. Von

1) Die Focaleigenschaften, welche ich für die Ellipsoide und Hyperboloide gefunden habe, wurden früher der Gesellschaft von Herrn Prof. Scheibner vorgelegt (vgl. diese Berichte, Sitzung vom 3. März 1882).

den Constanten β, γ sei β die grössere. Die zwischen den Grenzen:

(2) $$-\infty < \lambda < \gamma < \mu < \beta < \nu < +\infty$$

liegenden Werthe λ, μ, ν des Parameters t, welche den drei durch jeden Punkt xyz des Raumes gehenden Flächen des Systems entsprechen, nennen wir die *parabolischen Coordinaten* des Punktes.

Die elliptischen Paraboloide $t = \lambda$ erstrecken sich von ihrer Scheiteltangentenebene $x = -\frac{\lambda}{2}$ nach links, die elliptischen Paraboloide $t = \nu$ von ihrer Scheiteltangentenebene $x = -\frac{\nu}{2}$

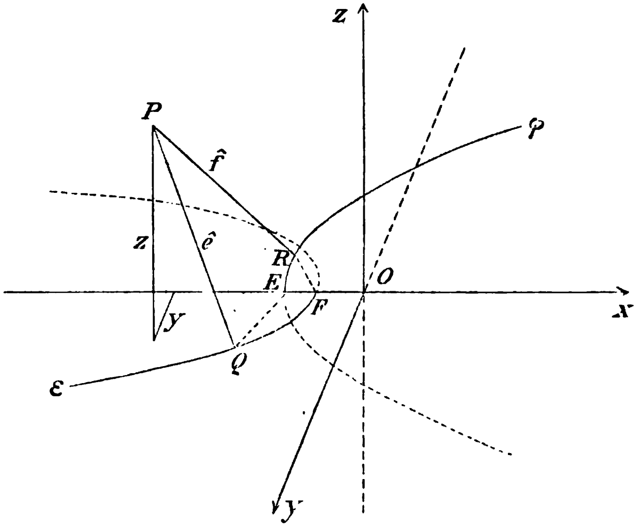


Fig. 1.

nach rechts in's Unendliche. Jene gehen durch die »*linke Focalparabel* ε«:

(3) $$\frac{y^2}{\beta - \gamma} + 2x + \gamma = 0 ,$$

diese durch die »*rechte Focalparabel* φ«:

(3) $$-\frac{z^2}{\beta - \gamma} + 2x + \beta = 0$$

in die hyperbolischen Paraboloide $t = \mu$ über. Beide Curven sind die gemeinsamen Focalparabeln aller Paraboloide des confocalen Systems.

Der Brennpunkt E der linken Focalparabel ε:

$$(4) \quad x = -\frac{\beta}{2}, \; y = 0, \; z = 0; \; \lambda = \gamma, \; \mu = \beta, \; \nu = \beta$$

ist der Scheitelpunkt der rechten, der Brennpunkt F der rechten Focalparabel φ:

$$(4) \quad x = -\frac{\gamma}{2}, \; y = 0, \; z = 0; \; \lambda = \gamma, \; \mu = \gamma, \; \nu = \beta$$

der Scheitelpunkt der linken. Die Entfernung beider Punkte ist:

$$(5) \qquad EF = \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

§ 2.

Die gebrochenen Focaldistanzen eines Punktes.

Unter den »*gebrochenen Focaldistanzen* $\hat{e}$ *und* $\hat{f}$ *eines Punktes P von den Brennpunkten E und F*« verstehen wir die kürzesten Abstände:

$$(6) \qquad \hat{e} = PQE, \quad \hat{f} = PRF$$

(vgl. Fig. 1) des Punktes P von den Brennpunkten E und F über die gleichnamige Focalparabel ε und φ, also die Gleichgewichtslagen eines Fadens, der auf der Curve ε im Punkte Q frei gleitend, von E nach P oder auf der Curve φ im Punkte R frei gleitend, von F nach P gespannt wird. In Fig. 1 ist durch Einzeichnung der Coordinaten y und z angedeutet, dass P beispielsweise vor der zx- und über der xy-Ebene liegen mag.

Es lässt sich nun der Satz beweisen:

Die Längen der gebrochenen Focaldistanzen eines Punktes P drücken sich in seinen parabolischen Coordinaten λ, μ, ν also aus:

$$(7) \qquad \begin{cases} \hat{e} = \frac{1}{2}(-\gamma - \lambda + \mu + \nu) \\ \hat{f} = \frac{1}{2}(\beta - \lambda - \mu + \nu). \end{cases}$$

§ 3.

Die Hauptdirectrixebene des elliptischen Paraboloides.

Während ein elliptisches Paraboloid die eine, »*innere*«, seiner beiden Focalparabeln vollständig einschliesst, tritt die andere in den Kreispunkten der Paraboloides aus ihm heraus. Wir construiren nun in der Ebene der inneren Focalparabel die Directrix der Schnittparabel der Ebene mit dem Paraboloide. Die durch diese Directrix senkrecht zur Axe des Paraboloides gelegte Ebene nennen wir die *Hauptdirectrixebene des elliptischen Paraboloides.*

In dem confocalen System (1) ist nun die linke Focalparabel ε die innere Focalparabel aller elliptischen Paraboloide $t = \lambda$ und die rechte Focalparabel φ die innere Focalparabel aller elliptischen Paraboloide $t = \nu$. Die Hauptdirectrixebene E_λ des elliptischen Paraboloides $t = \lambda$ erhält daher die Gleichung:

(8) $$x = \frac{\beta}{2} - \lambda$$

und die Hauptdirectrixebene Φ_ν des elliptischen Paraboloides $t = \nu$ die Gleichung:

(8) $$x = \frac{\gamma}{2} - \nu\,.$$

Es ergeben sich nun die Sätze:

Der Abstand eines Punktes λ, μ, ν des elliptischen Paraboloides $t = \lambda$ von dessen Hauptdirectrixebene E_λ ist:

(9) $$e_\lambda = \tfrac{1}{2}(-\gamma - \lambda + \mu + \nu)\,.$$

Der Abstand eines Punktes λ, μ, ν des elliptischen Paraboloides $t = \nu$ von dessen Hauptdirectrixebene Φ_ν ist:

(9) $$f_\nu = \tfrac{1}{2}(\beta - \lambda - \mu + \nu)\,.$$

§ 4.

Die Focaleigenschaften der elliptischen und hyperbolischen Paraboloide.

Aus den Formeln (7) und (9) folgt sofort:

(10) $$\hat{e} - e_\lambda = 0\,, \quad \hat{f} - \hat{e} = \frac{\beta - \mu}{2} - \frac{\mu - \gamma}{2}\,, \quad \hat{f} - f_\nu = 0\,,$$

oder in Worten:

I. Bei dem elliptischen Paraboloid (λ oder ν) ist die gebrochene Focaldistanz jedes Punktes von dem Brennpunkt der inneren Focalparabel gleich seinem Abstand von der Hauptdirectrixebene.

II. Bei dem hyperbolischen Paraboloid (μ) ist die Differenz der gebrochenen Focaldistanzen von den Brennpunkten der beiden Focalparabeln constant.

Um den I. Satz an den beiden durch die x-Axe gehenden *Hauptschnitten* des elliptischen Paraboloides zu verificiren, wählen wir ein Paraboloid λ. Der Hauptschnitt $z = 0$ (vgl. Fig. 2) ist eine Parabel mit dem Brennpunkt E und der Directrix d_z in

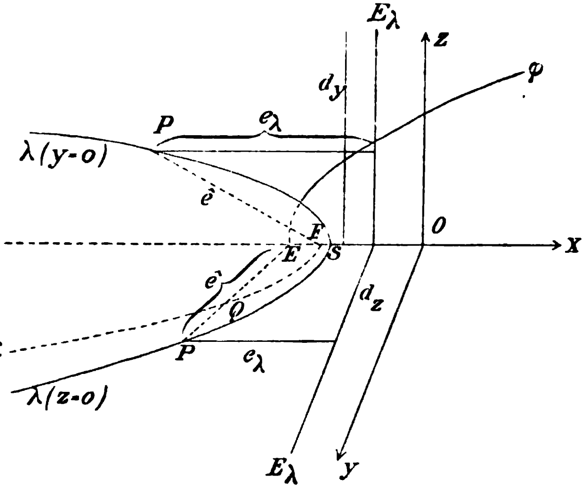


Fig. 2.

der Hauptdirectrixebene E_λ. Fällt nun der Punkt P des Paraboloides λ in diesen Hauptschnitt, so wird die im Allgemeinen gebrochene Focaldistanz $\hat{e} = PQE$ gestreckt und die 1. Gleichung (10): $\hat{e} = e_\lambda$ stellt die gewöhnliche Focaleigenschaft der Parabel λ ($z = 0$) mit Bezug auf den Brennpunkt E und die Directrix d_z dar. Insbesondere liegt der Scheitelpunkt S des Paraboloides λ in der Mitte zwischen E und d_z.

Der Hauptschnitt $y = 0$ ist eine Parabel mit dem Brennpunkt F und der Directrix d_y, wobei d_y gegen E_λ so weit nach

links liegt, als F gegen E nach rechts, also nach (5) um $\frac{\beta - \gamma}{2}$. Fällt nun P in diesen Hauptschnitt, so kommt die gebrochene Focaldistanz $\hat{e} = PQE$ in die zx-Ebene und ihr Gleitpunkt Q nach F zu liegen. Die 1. Gleichung (10): $\hat{e} = e_\lambda$ geht daher, wenn man von $\hat{e}$ das Stück FE und von e_λ das gleichgrosse Stück zwischen d_y und d_z abzieht, in die gewöhnliche Focaleigenschaft der Parabel $\lambda (y = 0)$, mit Bezug auf den Brennpunkt F und die Directrix d_y über. Insbesondere liegt der Scheitelpunkt S in der Mitte zwischen F und d_y.

Für die *Hauptschnitte* $z = 0$ und $y = 0$ des hyperbolischen Paraboloides giebt der II. Satz eine neue Focaleigenschaft der Schnittparabeln gegen die Brennpunkte E und F.

SITZUNG VOM 29. JULI 1895.

1. Auf Empfehlung der hierzu niedergesetzten Commission wird die Drucklegung der in der vorigen Sitzung von Herrn **H. Bruns**, o. M., vorgelegten Abhandlung von B. Peter »Beobachtungen am sechszölligen Repsold'schen Heliometer der Leipziger Sternwarte« in den »Abhandlungen« genehmigt.

Vorträge hielten:

2. **Rud. Boehm**, o. M., Ueber das südamerikanische Pfeilgift Curare in chemischer und toxikologischer Beziehung. Erscheint in den »Abhandlungen«.
3. **Johannes Wislicenus**, o. M., Ueber die Umlagerung stereoisomer ungesättigter Verbindungen durch Halogene im Sonnenlichte.
4. **Sophus Lie**, o. M., Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie.
5. **Max v. Frey**, ao. M., Beiträge zur Sinnesphysiologie der Haut. 1. Mittheilung. Ueber einen Fall umschriebener partieller Lähmung.

Johannes Wislicenus, *Ueber die Umlagerung stereoisomerer ungesättigter Verbindungen durch Halogene im Sonnenlichte.*

Eine kürzlich von Liebermann in den Berichten d. d. chem. Ges.[1]) mitgetheilte Beobachtung, nach welcher durch eine relativ geringe Jodmenge die Allofurfuracrylsäure und noch leichter die Allocinnamylidenessigsäure bei Insolation in die stabileren, schwerer löslichen und bei höherer Temperatur schmelzenden Steroisomeren übergehen, veranlasst mich, über einige analoge Vorgänge schon jetzt einige kurze Angaben zu veröffentlichen.

Es ist mir im vorigen Winter gelungen, die chemisch reine *Isocrotonsäure*, welche bisher noch Niemand in Händen gehabt hat, darzustellen. Sie ist bei gewöhnlicher Temperatur flüssig, erstarrt in der Kälte krystallinisch, schmilzt bei 15,4°—15,5°, siedet bei normalem Luftdruck bei 168,9°—169,2° (Thermom. im Dampf) und löst sich schon im 2,5fachen Gewicht Wasser klar auf. Ihre reinen Salze besitzen anderen Krystallwassergehalt als von Geuther angegeben, und etwas andere Löslich-

1) 28, 1443.

keitsverhältnisse als aus den Mittheilungen von A. Michael, der die »Allocrotonsäure« noch durchaus nicht rein in Händen hatte, hervorgeht.

Ich habe mit diesem reinen Materiale selbstverständlich eine Revision aller der Arbeiten vorgenommen, welche in den letzten Jahren von mir selbst und meinen Schülern mit der nur möglichst gereinigten Isocrotonsäure ausgeführt wurden und habe dabei, wie vorauszusehen war, in ihrem Verhalten einen fast vollständigen Parallelismus zu dem der Angelicasäure gefunden.

So gewinnt man z. B. das reine Isocrotonsäuredibromür nur dann, wenn man im Dunkeln und unter Abkühlung zu überschüssigem Brom die Isocrotonsäure hinzufügt. Bei umgekehrter Mischungsfolge entsteht Crotonsäuredibromür, und zwar in um so grösserer Menge, je intensiverer Lichtwirkung das Gemenge ausgesetzt wird. Unterbricht man den Bromzusatz ehe noch das der Gleichung

$$C_4H_6O_2 + Br_2 = C_4H_6Br_2O_2$$

entsprechende Verhältniss erreicht ist, so findet sich in dem Producte fast alle unverbundene Isocrotonsäure in Crotonsäure verwandelt, denn wenn man das Dibromür durch Erwärmen der Natriumsalzlösung zersetzt

$$C_4H_5Br_2NaO_2 = NaBr + CO_2 + C_3H_5Br,$$

so giebt die nachher angesäuerte Flüssigkeit fast nur feste, bei 72—72,5° schmelzende Crotonsäure an Aether ab. Auf demselben Wege hatte ich früher[1]) Angelicasäure zu einem Viertel ihres Gewichtes direct in Tiglinsäure verwandelt.

Zunächst an der reinen *Isocrotonsäure* angestellte Versuche ergaben, dass man die Brommenge ganz ausserordentlich vermindern und gleichzeitig die Ausbeute an fester Crotonsäure entsprechend steigern kann. Das von mir angewendete Bromminimum betrug 0,1 g auf 5 g Isocrotonsäure oder mehr als 18 Moleküle Säure auf 1 Mol. Brom. Das Brom wurde mit 1,5 g Schwefelkohlenstoff verdünnt zur Isocrotonsäure gefügt und das Gemisch hellem Sonnenlichte ausgesetzt. In weniger als 5 Minuten war das Ganze zu einem dicken Krystallbrei erstarrt, der noch von freiem Brom gefärbt war, sich aber nach Verlauf von weniger

1) Liebig's Annalen **272**, 91 u. 92.

als einer halben Stunde entfärbt hatte. Der Schwefelkohlenstoff wurde nun im trockenen Luftstrom abgedunstet und der fast genau 5,1 g wiegende völlig feste Rückstand aus warmem Petrolpentan umkrystallisirt. Die Krystalle hatten den Schmelzpunkt der reinen Crotonsäure (72,2°).

Durch Jod geht die Umwandlung der *Isocrotonsäure* in Crotonsäure *nicht* vor sich. Auch nach mehreren Tagen war die der Sonne möglichst viel ausgesetzte Lösung von 0,2 g Jod in 5 g Isocrotonsäure noch vollkommen flüssig; 0,5 g Brom machte sie dann binnen einigen Minuten erstarren.

Mischt man die Lösung von 5 g reiner *Angelicasäure* von 45,5° Schmelzpunkt in Schwefelkohlenstoff mit 0,1 g Brom, so entfärbt sie sich im Sonnenlichte binnen weniger als einer halben Stunde. Beim Abdunsten des Schwefelkohlenstoffs hinterbleibt etwas mehr als 5 g einer Krystallmasse, welche etwas feucht bleibt. Einmaliges Umkrystallisiren aus warmem Petrolpentan lieferte mehr als 4,5 g reine Tiglinsäure, welche bei 64,4° schmolz. Aus den Mutterlaugen konnte noch etwas mehr derselben erhalten werden, doch dunsteten die letzten Antheile zu einem mit wenig Krystallen erfüllten Oele — welches zweifellos noch etwas Angelicasäure oder ihr Dibromür enthielt — ein [1]).

Am allerprägnantesten aber verläuft die Umwandlung der *Maleïnsäure* in Fumarsäure durch Spuren von Brom im Sonnenlichte, so dass dieselbe sich als Vorlesungsversuch sehr gut eignet.

Löst man Maleïnsäure (2 g) in Wasser (5 g), so findet auf Zusatz einer sehr geringen Menge Bromwasser im directen Sonnenlichte in kürzester Zeit (meist weniger als 1 Minute) Krystallausscheidung statt. In 2—3 Minuten ist ein dicker Krystallbrei gebildet, der noch von Brom gefärbt erscheint, in 5 Minuten der Process im Wesentlichen vollendet. Der Verlauf nach Zeitdauer und Intensität der Helligkeit lässt sich hier sehr leicht durch Wägung der ausgeschiedenen schwer löslichen Fumarsäure verfolgen. Die folgende Tabelle giebt die Resultate von fünf am 24. bis 26. Juli ausgeführten quantitativen Bestimmungen. Die Ingredienzen (Maleïnsäure und gemessene Menge einer einprocentigen wässerigen Bromlösung) wurden im Dunkeln gemischt, dann in Sonnenlicht gebracht, und nach der

1) Vergl. Liebig's Annalen **272**, 49, § 19, 5 u. 6.

notirten Zeit die »direct« abgeschiedene Fumarsäure abermals im Dunkeln auf bei 100° getrocknetem und gewogenem Filter gesammelt, durch Auftropfen von 5 ccm Wasser ausgewaschen, dann vor der Wasserluftpumpe fast lufttrocken gesogen, und nach dem Trocknen bei 100° gewogen. Das gefärbte Filtrat wurde dann noch einmal bis zum völligen Verschwinden des Broms im Sonnenlichte stehen gelassen, die »nachträglich« abgeschiedene kleine Fumarsäuremenge ebenfalls gesammelt und gewogen. Die Columne »in Lösung« bedeutet die von der angewandten Wassermenge gelöst gehaltene Fumarsäurequantität, »zu Dibromür« die dem angewandten Brom nach der Gleichung

$$C_4H_4O_4 + Br_2 = C_4H_4Br_2O_4$$

gebundene Säuremenge.

Der Versuch Nr. 5 wurde nicht im Sonnenlichte, sondern in einer Entfernung von einem Meter vom Fenster, welches eben noch von der Sonne seitlich beschienen war, ausgeführt. Nach dem Abfiltriren im düstern Raume wurde das Filtrat abermals 5 Minuten lang an gleicher Stelle dem vollen Tageslicht ausgesetzt, der Niederschlag wurde ebenfalls zur Wägung gebracht u. s. w.

Nr.	Ingredienzien			Belichtung		Fumarsäure g				zu Dibromür	Total
	Maleïnsäure g	Brom g	Wasser ccm	Intensität	Dauer Minuten	direct	nachträglich	in Lösung	Total %	g	%
1	2,0003	0,02	12	helle Sonne im Freien	5	1,7353	0,0123	0,0857	92,65	0,0145	93,58
2	2,0000	0,02	12	helle Sonne hint. Fenster	5	1,7046	0,0321	0,0857	90,97	0,0145	94,70
3	2,0046	0,05	15	ebenso	5	1,6956	0,0102	0,1071	90,57	0,0362	92,38
4	2,0020	0,10	20	matte Sonne	15	1,3656	0,2611	0,1429	88,39	0,0724	92,10
5	2,0022	0,05	15	1 Meter vom Fenster	5 5	0,3876 0,3150	— 0,7982	0,1071	80,31	0,0362	82,11

Bei einem sechsten Versuche wurden 2,0011 g Maleïnsäure in 10 ccm Wasser gelöst mit 0,1 g Brom in Form von 10 ccm Bromwasser vermischt (Verhältnisse wie bei Versuch Nr. 4) und

im dunkeln Zimmer stehen gelassen. Nach etwa 4 Stunden war völlige Entfärbung eingetreten, ohne dass sich auch nur die geringste Spur von Fumarsäure abgeschieden hätte. Eine weitere Menge von 0,2 g Brom war am anderen Morgen gleichfalls völlig verschwunden, die Lösung aber auch jetzt ganz klar geblieben.

0,2 g Jod in Jodkaliumlösung eben gelöst, waren auch bei vielstündiger Insolation ohne Wirkung auf die wässerige Maleïnsäurelösung, obgleich, wie Anschütz[1]) schon 1879 fand, die Maleïnsäureester beim Erhitzen mit Jod glatt zu Fumarsäureestern werden. Bei gleicher Gelegenheit beobachtete Anschütz, dass der flüssige Maleïnsäuredimethylester durch Bromdämpfe »allmählich« (vermuthlich in zerstreutem Tageslichte) zu dem festen Fumarsäuredimethylester erstarrt. Ob Jod diese Umwandlungen im Sonnenlichte bewerkstelligen kann, wird noch zu versuchen sein.

Wie ich an dem partiellen Uebergange von Tiglinsäure in Angelicasäuredibromür[2]) und von α-Tolandibromür in das leichter lösliche und schmelzbare β-Tolandibromür durch Brom im Sonnenlichte wahrgenommen habe, giebt es auch Fälle, in welchen die stabilere Modification theilweise, wenn auch meist nur in geringem Betrage, in die labilere umgewandelt wird. Ich bin noch damit beschäftigt, an Crotonsäure, Fumarsäure u. a. m. zu prüfen, ob diese Reaction eine allgemeine ist. Es werden dann die reciproken Processe ein Gleichgewichtsverhältniss aufweisen müssen. Der Umstand, dass bei den in der Tabelle mitgetheilten Versuchen die Summe der ausgeschiedenen und gelösten Fumarsäure und der mit Brom verbundenen Säure niemals der Menge der angewandten Maleïnsäure gleichkommt, sondern nur etwa 92—93,5 % derselben erreicht, scheint schon jetzt dafür zu sprechen.

1) Berichte d. d. chem. Ges. **12**, 2283.
2) Liebig's Annalen **272**, 63 u. f.

Sophus Lie, *Beiträge zur allgemeinen Transformationstheorie.*

Im Folgenden erlaube ich mir der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften mehrere Transformationstheorien mitzutheilen, die ich in meinen Vorlesungen an der Universität Leipzig ausführlich entwickelt habe.

I.

Alle Rotationen, die den Coordinatenanfang $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ in Ruhe lassen, bilden eine dreigliedrige Transformationsgruppe, deren infinitesimale Transformationen

$$yp - xq = X_1 f\,,$$
$$zq - yr = X_2 f\,,$$
$$xr - zp = X_3 f$$

meine bekannten Relationen

$$(X_1 X_2) = X_3 f\,, \quad (X_2 X_3) = X_1 f\,, \quad (X_3 X_1) = X_2 f$$

erfüllen.

Die drei Ausdrücke X_1, X_2, X_3 bestimmen gleichzeitig eine homogene Functionengruppe. Unter den Functionen dieser Gruppe giebt es unbegrenzt viele, nämlich alle von der Form

$$X_3 \Phi\left(\frac{X_1}{X_3}\,,\ \frac{X_2}{X_3}\right),$$

die *homogen* von *erster* Ordnung in p, q, r sind. Alle diese Functionen von erster Ordnung lassen sich als charakteristische Functionen von infinitesimalen Berührungstransformationen auffassen, und zwar bilden alle diese Transformationen:

$$X = X_3 \Phi\left(\frac{X_1}{X_3}\,,\ \frac{X_2}{X_3}\right)$$

wie ich oft hervorgehoben habe, eine *unendliche* Gruppe von Berührungstransformationen, die die Gruppe der Rotationen X_1, X_2, X_3 als endliche Untergruppe enthält.

Es giebt nun andererseits unendlich viele Berührungstransformationen

$$H = rW\left(x,\ y,\ z, \frac{p}{r}, \frac{q}{r}\right),$$

die mit den Rotationen X_1, X_2, X_3 vertauschbar sind und somit die Relationen

$$(X_1 H) = 0\,,\quad (X_2 H) = 0\,,\quad (X_3 H) = 0\,,$$

sowie die Homogenitätsbedingung

$$p\frac{\partial H}{\partial p} + q\frac{\partial H}{\partial q} + r\frac{\partial H}{\partial r} - H = 0$$

erfüllen. Unter diesen Grössen H bemerken wir ganz besonders die drei Grössen:

$$xp + yq + zr = H_1\,,$$

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = H_2\,,$$

$$\sqrt{(xq - yp)^2 + (yr - zq)^2 + (zp - xr)^2} = H_3\,.$$

Die allgemeinste Grösse H besitzt die Form:

$$H = H_3\,\Phi\left(\frac{H_1}{H_3}, \frac{H_2}{H_3}\right).$$

Hier ist H das allgemeine Symbol aller infinitesimalen Berührungstransformationen, die mit allen Rotationen X_1, X_2, X_3 und in Folge dessen zugleich mit allen Berührungstransformationen X vertauschbar sind.

Factisch erzeugen alle H eine unendliche Transformationsgruppe, während alle X eine andere derartige Gruppe bestimmen. Diese beiden Berührungstransformationsgruppen stehen in der Beziehung zu einander, dass jede Transformation der einen Gruppe mit jeder Transformation der zweiten Gruppe vertauschbar ist.

Auf der anderen Seite bestimmen die *Functionen* X_1, X_2, X_3, wie schon hervorgehoben, eine homogene Functionengruppe und ebenso die Functionen H_1, H_2, H_3 eine andere Functionengruppe.

Diese beiden Functionengruppen sind nach meiner gewöhnlichen Terminologie *reciproke* Functionengruppen. Jede Function der einen Gruppe liegt mit jeder Function der zweiten Gruppe in *Involution.*

Wenn aber in den Veränderlichen x, y, z, p, q, r *zwei* reciproke *drei*gliedrige Functionengruppen vorliegen, so giebt es nach meinen alten Untersuchungen immer eine Function, die zu beiden Gruppen gehört, und in beiden Gruppen als *ausgezeichnete* Function auftritt. Im vorliegenden Falle hat diese Grösse die Form

$$\sqrt{(xq-yp)^2+(yr-zq)^2+(zp-xr)^2}=H_3$$

und kann daher, weil sie homogen von erster Ordnung ist, als charakteristische Function einer infinitesimalen Berührungstransformation aufgefasst werden.

Die hiermit gefundene infinitesimale Berührungstransformation, sowie die endlichen Transformationen der zugehörigen eingliedrigen Gruppe geniessen merkwürdige Eigenschaften. Es bestehen ja die Gleichungen:

$$(X_1 H_3)=0\,, \quad (X_2 H_3)=0\,, \quad (X_3 H_3)=0\,,$$

sowie die analogen

$$(H_1 H_3)=0\,, \quad (H_2 H_3)=0\,, \quad (H_3 H_3)=0\,.$$

In Folge dessen liegt H_3 in Involution mit jeder Grösse Ω, die die Form

$$\Omega=W(X_1\,X_2\,X_3\,H_1\,H_2)$$

hat.

Die infinitesimalen wie die endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe H_3 sind daher vertauschbar:

1) mit allen Rotationen um den Coordinatenanfang;

2) mit allen Spiraltransformationen, die den Coordinatenanfang in Ruhe lassen;

3) mit allen Dilatationen;

4) mit allen endlichen und infinitesimalen Fusspunkttransformationen;

5) mit allen endlichen und infinitesimalen Berührungs- und Punkttransformationen, die mit allen Rotationen um den Coordinatenanfang vertauschbar sind;

6) überhaupt mit allen endlichen und infinitesimalen Transformationen derjenigen *unendlichen* Gruppe von Berührungstransformationen, deren charakteristische Functionen die allgemeine Form

$$H_3 W\left(\frac{X_1}{H_3}, \frac{X_2}{H_3}, \frac{X_3}{H_3}, \frac{H_1}{H_3}, \frac{H_2}{H_3}\right)$$

besitzen. Dabei ist zu beachten, dass unter den fünf Argumenten der Function W nur vier unabhängig sind.

Bei den infinitesimalen und endlichen Transformationen der eingliedrigen Gruppe H_3 bleiben eine Reihe Grössen *invariant*, insbesondere die Grössen

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

$$\frac{xp + yq + zr}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

sowie überhaupt jede Grösse, die sich als Function von $X_1 X_2 X_3$, $H_1 H_2 H_3$ ausdrücken lässt.

Es erscheint überflüssig, auf die verschiedenartigen Consequenzen dieser Sätze weiter einzugehen. Dagegen bemerke ich, dass es möglich ist, die *aequationes directrices* hinzuschreiben, die alle endlichen Transformationen unserer Gruppe liefern. Zu jeder derartigen Transformation gehören *zwei* aequationes directrices, unter denen die eine immer die Form hat:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Die andere Gleichung hat die allgemeine Form

$$(x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z})^2 - m^2(x^2 + y^2 + z^2)(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2) = 0 ,$$

dabei vorausgesetzt, dass m eine Constante bezeichnet.

Es ist leicht, diese Gleichungen geometrisch zu deuten. Sie zeigen, dass *jeder Punkt* (xyz) *in einen Kreis übergeht*, dessen Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ dieselbe Entfernung vom Coordinatenanfang wie der Punkt (xyz) selbst haben. Es bilden andererseits die Radii vectores nach (xyz) und $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ einen Winkel, der für jede einzelne Transformation unserer eingliedrigen Gruppe einen constanten Werth hat, nämlich

$$\operatorname{arc}\cos m .$$

Bei den Transformationen unsrer Gruppe bleiben die concentrischen Kugeln

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{Const.}$$

invariant; dabei werden die *Linienelemente* jeder einzelnen Kugel jedesmal durch eine *Dilatation* transformirt.

Die hier besprochene eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen umfasst eine längst bekannte Transformation, die allerdings kaum früher als Berührungstransformation aufgefasst worden ist. Setzt man nämlich $m = 0$, so bestimmen die entsprechenden aequationes directrices

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$
$$x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z} = 0$$

eine Berührungstransformation, die jede Fläche in eine sogenannte *Apsidalfläche* überführt. Diese Berührungstransformation bezeichne ich daher als die *Apsidaltransformation*; dementsprechend bezeichne ich die infinitesimale Berührungstransformation

$$\sqrt{(xq - yp)^2 + (yr - zq)^2 + (zp - xr)^2}$$

als die *infinitesimale* Apsidaltransformation.

Ich kann nicht bezweifeln, dass die hier gegebenen Entwickelungen gestatten werden, die bisherigen Untersuchungen über Apsidaltransformationen wesentlich zu vereinfachen und zu vervollständigen.

Die vorhergehenden Entwickelungen stehen im genauesten Zusammenhange mit einer Theorie, deren Ursprung bis auf MONGE zurückgeht.

Jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$\frac{X_2}{X_3} = \varphi\left(\frac{X_1}{X_3}\right)$$

liegt nämlich in *Involution* mit jeder Gleichung von der Form

$$\frac{H_2}{H_3} = \psi\left(\frac{H_1}{H_3}\right).$$

Diese beiden Gleichungen repräsentiren also intermediäre Integrale und zwar allgemeine intermediäre Integralgleichungen

einer gewissen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren geometrische Bedeutung leicht gefunden werden kann. Die letzte intermediäre Integralgleichung kann in der That auf die Form

$$\frac{xp + yq + zr}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \Omega(x^2 + y^2 + z^2)$$

gebracht werden; daher lassen sich die zugehörigen Integralflächen dadurch definiren, dass ihre Krümmungslinien der einen Schaar auf den concentrischen Kugeln $x^2 + y^2 + z^2 = c$ liegen. Also sind nach Monge die Krümmungslinien der zweiten Schaar eben und in Ebenen gelegen, die durch den Coordinatenanfang gehen.

Ertheilt man nun den willkürlichen Functionen φ und ψ in den obenstehenden intermediären Integralgleichungen bestimmte Formen, so liegen die hervorgehenden Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{X_2}{X_3} - \varphi_0\left(\frac{X_1}{X_3}\right) = 0\,, \quad \frac{H_2}{H_3} - \psi_0\left(\frac{H_1}{H_3}\right) = 0\,,$$

wie schon bemerkt, in Involution. Will man die ∞^1 gemeinsamen Integralflächen finden, so muss man einen Integrabilitätsfactor aufstellen. Hierzu führt nun in einfachster Weise die Bemerkung, dass *die infinitesimale Apsidaltransformation* nach den früheren Entwickelungen *die gesuchten ∞^1 Flächen unter einander transformirt.* Diese Bemerkung ist beachtenswerth, wenn sie gleich als ein directer Ausfluss meiner allgemeinen Theorie der integrablen Monge-Ampère'schen Gleichung aufzufassen ist[1]).

Noch möge hinzugefügt werden, dass die obenstehenden Entwickelungen zeigen, dass viele interessante Berührungstransformationen jede Fläche, deren Krümmungslinien auf concentrischen Kugeln liegen, in ebensolche Flächen überführen[2]).

---

1) Vgl. Norw. Arch. Bd. 2, 1877.

2) Bei mehreren Gelegenheiten habe ich schon darauf hingewiesen, dass die geometrische Optik durch explicite Einführung der Begriffe infinitesimale Berührungstransformation und eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen an Einfachheit und Uebersichtlichkeit gewinnt. Reflexionen sind bei dieser Auffassung Berührungstransformationen, die die betreffende infinitesimale Berührungstransformation invariant lassen. Ebenfalls Refractionen, wenn in beiden Medien die Wellenflächen ähnlich

II.

Jede dreigliedrige Transformationsgruppe $X_1 X_2 X_3$ des Raumes (xyz) kann als Ausgangspunkt für Theorien dienen, die den soeben entwickelten vollständig analog sind. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die drei betreffenden charakteristischen Functionen X_1, X_2, X_3 unabhängig sind und nicht paarweise in Involution liegen.

Die drei infinitesimalen Punkttransformationen

$$X_1 f = q + xr,$$
$$X_2 f = yq + zr,$$
$$X_3 f = y(xp + yq + zr) - zp$$

bilden eine dreigliedrige Transformationsgruppe; diese Transformationen sind vertauschbar mit den drei Transformationen

$$H_1 f = p + yr,$$
$$H_2 f = xp + zr,$$
$$H_3 f = x(xp + yq + zr) - zq,$$

die ihrerseits eine einfache transitive dreigliedrige Gruppe erzeugen. Zwei dreigliedrige Transformationsgruppen des Raumes $x\,y\,z$, die in der angegebenen Beziehung stehen, bezeichne ich, wie früher, als reciproke Transformationsgruppen.

Auf der anderen Seite aber bilden $X_1 X_2 X_3$ und $H_1 H_2 H_3$ zwei dreigliedrige und homogene Functionengruppen in den Veränderlichen

$$x, y, z, p, q, r.$$

Diese Functionengruppen bezeichne ich wiederum als reciproke Gruppen.

Nach meinen allgemeinen Theorien enthalten diese Functionengruppen eine gemeinsame *ausgezeichnete* Function, nämlich

$$\sqrt{(q + xr)(y(xp + yq + zr) - zp) - (yq + zr)^2}$$
$$= \sqrt{(p + yr)(x(xp + yq + zr) - zq) - (xp + zr)^2}$$
$$= \sqrt{(xy - z)(pq + r(xp + yq + zr))} = \Omega .$$

und ähnlich gelegen sind. Sind in beiden Medien die Wellenflächen verschieden, so muss man die Refraction als eine Berührungstransformation auffassen, die eine gewisse eingliedrige Gruppe in eine bestimmte andere überführt.

Jetzt bestimmen wiederum die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{X_2}{X_3} - \varphi\left(\frac{X_1}{X_3}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{H_2}{H_3} - \psi\left(\frac{H_1}{H_3}\right) = 0$$

mit den willkürlichen Functionen φ und ψ allgemeine intermediäre Integralgleichungen einer wichtigen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = Q(x, y, z, p, q),$$

die ich bei verschiedenen Gelegenheiten betrachtet habe. Die Integralflächen dieser Gleichungen zweiter Ordnung lassen sich dadurch charakterisiren, dass ihre sämmtlichen Haupttangentencurven linearen Complexen angehören; dabei bilden alle diese linearen Complexe zwei in Involution liegende Bündel.

Ertheilen wir nun den willkürlichen Functionen φ und ψ bestimmte Formen, etwa φ_0 und ψ_0, so gestatten die entsprechenden Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{X_2}{X_3} - \varphi_0\left(\frac{X_1}{X_3}\right) = 0, \quad \frac{H_2}{H_3} - \psi_0\left(\frac{H_1}{H_3}\right) = 0$$

immer die infinitesimale Berührungstransformation Ω, und daher finden wir die zugehörigen ∞^2 gemeinsamen Integralflächen in allen Fällen durch eine Quadratur.

Die infinitesimale Transformation Ω erzeugt eine wichtige eingliedrige Gruppe von Berührungstransformationen, deren endliche Gleichungen dadurch gefunden werden, dass man die aus der Polartheorie so bekannte Gleichung

$$0 = (z - xy)(z_1 - x_1 y_1) - m\left(\frac{z + z_1}{2} - xy_1 - x_1 y\right)^2$$

als *aequatio directrix* betrachtet. Wenn ich nicht irre, ist der Satz, dass die in dieser Weise hervorgehenden ∞^1 Berührungstransformationen, *unter denen sich die Transformation durch reciproke Polaren findet, eine eingliedrige Gruppe* bilden, bis jetzt der Aufmerksamkeit der Mathematiker entgangen.

Durch geometrische Betrachtungen erkennt man leicht (vgl. z. B. meine Arbeit in den Math. Ann. Bd. V), dass jede partielle Differentialgleichung

$$\frac{X_2}{X_3} - \varphi\left(\frac{X_1}{X_3}\right) = 0$$

alle nicht geradlinigen Flächen bestimmt, deren Haupttangenten der einen Schaar einem Liniencomplex angehören, der als Umhüllungscomplex von ∞^1 linearen Liniencomplexen aufgefasst werden kann.

Wir werden diese, an sich so interessanten Betrachtungen an dieser Stelle nicht weiter ausführen.

Hier möge aber die folgende Bemerkung Platz finden. Die Frage, ob jede endliche Berührungstransformation einer eingliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen angehört, ist in meinen bisherigen Publicationen nicht ernstlich in Angriff genommen worden. Unter diesen Umständen erscheint es mir nicht ohne Interesse, dass im Vorangehenden zwei eingliedrige Gruppen aufgestellt sind, unter denen die eine die Transformation durch reciproke Polaren, die andere die Apsidaltransformation umfasst.

Durch Betrachtung der projectiven Gruppe einer gewundenen Curve 3. O. findet man in *ganz ähnlicher Weise* eine eingliedrige Gruppe, die die Dualität hinsichtlich eines linearen Liniencomplexes umfasst.

III.

Ich betrachte r unabhängige Functionen $u_1, u_2 \dots u_r$ der Veränderlichen $x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n$ und bezeichne dabei den Inbegriff aller Grössen von der Form

$$\varphi(u_1 \dots u_r)$$

als eine r-gliedrige *Schaar von Functionen.*

Unter allen möglichen r-gliedrigen Schaaren von Functionen $u_1 \dots u_r$ beschäftigte ich mich in meinen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen und Berührungstransformationen eingehend mit gewissen Schaaren, die ich als *Functionengruppen* bezeichnete.

Liegt irgend eine r-gliedrige Functionengruppe $v_1 \dots v_r$ vor, so besitzt die lineare partielle Differentialgleichung

$$(V(v_1 v_2 \dots v_r), f) = 0$$

immer $r - 1$ (oder gar r) unabhängige Lösungen, die selbst der Functionengruppe angehören.

Es sind nun die Functionengruppen nicht die einzigen Functionenschaaren, die die soeben besprochene Eigenschaft besitzen. Nehmen wir nämlich irgend eine *homogene* Functionengruppe $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_s$, deren Klammerausdrücke $(\omega_i \omega_k)$ nicht sämmtlich identisch verschwinden, so enthält die Gruppe $s - 1$ unabhängige Functionen nullter Ordnung, die nach meinen alten Untersuchungen eine $(s - 1)$-gliedrige Functionenschaar bilden, die ebenfalls die besprochene Eigenschaft besitzt.

Es ist leicht, noch viel allgemeinere Functionenschaaren zu construiren, die ebenfalls jene Eigenschaft besitzen. Führt man nämlich auf eine homogene Functionengruppe eine ganz beliebige Berührungstransformation aus, die die Form

$$\begin{aligned} x_k' &= X_k(x_1 \dots x_n,\ p_1 \dots p_n), \\ p_i' &= P_i(x_1 \dots x_n,\ p_1 \dots p_n), \\ z' &= \text{Const.}\ z + W(x_1 \dots p_n) \end{aligned}$$

besitzt, so liefern die Transformirten der Functionen nullter Ordnung unserer Gruppe immer eine Functionenschaar, die die verlangte Eigenschaft besitzt.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, *alle* Functionenschaaren $u_1 \dots u_r$ in den Veränderlichen $x_1 \dots x_n$, $p_1 \dots p_n$ zu finden, die die Eigenschaft geniessen, dass *jede* lineare partielle Differentialgleichung

$$(U(u_1 \dots u_r),\ f) = 0$$

$r - 1$ (oder gar r) unabhängige Lösungen besitzen, die der Functionenschaar der u gehören.

Dieses allgemeine Problem deckt sich, wie man fast unmittelbar erkennt, mit dem folgenden

Problem. *Welche Functionenschaaren $u_1 \dots u_r$ geniessen die Eigenschaft, dass alle Klammerausdrücke $(u_i u_k)$ die Form*

$$(u_i u_k) = \varrho \cdot \varphi_{ik}(u_1 \dots u_r)$$

besitzen, wobei ϱ eine von den u unabhängige Grösse bezeichnet?

Die Annahme, dass ϱ von den u unabhängig sein soll, machen wir, weil die Grössen u sonst eine Functionengruppe bilden; alle Functionengruppen sind aber von mir in älteren Arbeiten bestimmt, und auf einfache kanonische Formen gebracht.

Indem wir nun unser Problem in Angriff nehmen, finden wir es zweckmässig, zuerst den speciellen Fall $r = 4$ zu erledigen.

Es bestehen jetzt sechs Relationen von der Form

$$(u_i u_k) = \varrho \varphi_{ik}(u_1 \dots u_4)$$
$$(i = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad i \neq k) .$$

Die Identität

$$((u_1 u_2) u_3) + ((u_2 u_3) u_1) + ((u_3 u_1) u_2) = 0$$

giebt daher die Relation:

$$0 = \varphi_{12} \cdot (\varrho u_3) + \varphi_{23} \cdot (\varrho u_1) + \varphi_{31} \cdot (\varrho u_2)$$
$$+ \varrho^2 \sum_s \left(\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial u_s} \varphi_{s3} + \frac{\partial \varphi_{23}}{\partial u_s} \varphi_{s1} + \frac{\partial \varphi_{31}}{\partial u_s} \varphi_{s2} \right) ,$$

die in den (ϱu_k) linear ist, während der Factor von ϱ^2 nur von den u abhängt.

Indem wir nun die Indices 1, 2, 3, 4 cyclisch permutiren, erhalten wir also zur Bestimmung der vier Grössen (ϱu_1), (ϱu_2), (ϱu_3), (ϱu_4) vier Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}
\varphi_{23}(\varrho u_1) + \varphi_{31}(\varrho u_2) + \varphi_{12}(\varrho u_3) \qquad\qquad\qquad &= \psi_{123}(u)\varrho^2 , \\
\varphi_{34}(\varrho u_2) + \varphi_{42}(\varrho u_3) + \varphi_{23}(\varrho u_4) &= \psi_{234}(u)\varrho^2 , \\
\varphi_{34}(\varrho u_1) + \qquad\qquad \varphi_{41}(\varrho u_3) + \varphi_{13}(\varrho u_4) &= \psi_{341}(u)\varrho^2 , \\
\varphi_{24}(\varrho u_1) + \varphi_{41}(\varrho u_2) \qquad\qquad + \varphi_{12}(\varrho u_4) &= \psi_{412}(u)\varrho^2 .
\end{aligned}$$

Die Frage, ob diese Gleichungen nach den (ϱu_k) aufgelöst werden können, beruht auf der Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} & 0 \\ 0 & \varphi_{34} & \varphi_{42} & \varphi_{23} \\ \varphi_{34} & 0 & \varphi_{41} & \varphi_{13} \\ \varphi_{24} & \varphi_{41} & 0 & \varphi_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \varphi_{21} & 0 & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 & \varphi_{34} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & 0 \end{vmatrix} .$$

Ist die schiefe vierreihige Determinante $| \varphi_{ik} |$ von Null verschieden, so findet man durch Auflösung für die (ϱu_i) Ausdrücke von der Form

$$(\varrho u_i) = \varrho^2 \psi_i(u_1 \dots u_4)$$

und dementsprechend

$$\left(\frac{1}{\varrho}, u_i\right) = -\psi_i(u_1 \ldots u_4).$$

Die Formeln zeigen, dass die fünf Grössen $u_1, u_2, u_3, u_4, \varrho$ eine fünfgliedrige Functionengruppe erzeugen; und dass es eine Berührungstransformation in den x, p giebt, die diese Functionengruppe in eine *homogene* Gruppe überführt, deren Functionen nullter Ordnung die Transformirten der u sind.

Wir wenden uns jetzt zu dem allgemeinen Falle, setzen aber dabei voraus, dass es unter den r Grössen u möglich ist, *vier* zu wählen, etwa u_α, u_β, u_γ, u_δ, so dass die Determinante der φ, die analog der obigen schiefen Determinante, aber mit den Indices α, β, γ, δ statt 1, 2, 3, 4 gebildet ist, nicht identisch verschwindet. Dann erkennen wir zunächst ganz wie soeben, dass die vier Grössen (ϱu_α), (ϱu_β), (ϱu_γ), (ϱu_δ) sich als Product von ϱ^2 und einer Function der u ausdrücken. Ist dabei, wie wir annehmen können, etwa $\varphi_{\alpha\beta} \neq 0$, so erkennen wir durch Bildung der Identität

$$((u_\alpha u_\beta) u_i) + ((u_\beta u_i) u_\alpha) + ((u_i u_\alpha) u_\beta) = 0,$$

die die Form

$$\varphi_{\alpha\beta}(\varrho u_i) + \varphi_{\beta i}(\varrho u_\alpha) + \varphi_{i\alpha}(\varrho u_\beta) + \varrho^2 \Theta(u) = 0$$

annimmt, dass *alle* (ϱu_i) sich folgendermassen ausdrücken:

$$(\varrho u_i) = \varrho^2 \psi_i(u_1 \ldots u_r).$$

Hieraus schliessen wir, wie soeben, dass die Grössen $u_1 \ldots u_r \varrho$ eine $(r+1)$-gliedrige Gruppe bilden, die durch Berührungstransformation in eine *homogene* Gruppe übergeht, deren Functionen *nullter* Ordnung die Transformirten der u sind.

Wenn dagegen *alle* vierreihigen Determinanten, die analog der obigen Determinante zwischen den Grössen φ gebildet werden können, identisch verschwinden, bleiben die obenstehenden Betrachtungen nicht mehr gültig. In diesem Falle brauchen die Grössen $u_1 \ldots u_r$, ϱ keine Gruppe zu erzeugen. Bei dieser Gelegenheit beschränken wir uns auf die Bemerkung, dass die Discussion des hier ausgeschlossenen, an sich sehr interessanten

Falles auf der Theorie der PFAFF'schen *Systeme* beruht. Bei einer anderen Gelegenheit werde ich diese hier noch unerledigt gebliebenen Fragen wieder aufnehmen.

IV.

Da ich noch nicht Zeit gefunden habe, die *Discussion* meiner allgemeinen Integrationstheorie eines vollständigen Systems mit bekannten infinitesimalen Transformationen ausführlich zu redigiren, so werde ich hier zeigen, wie ich in meinen Vorlesungen den interessantesten, weil einfachsten Fall dieses allgemeinen Problems erledige. Diejenigen, die meine allgemeinen Theorien kennen, werden ohne Schwierigkeit einsehen, dass alle Fälle durch ganz analoge Betrachtungen erledigt werden können.

Ich setze voraus, dass eine Gleichung $Af = 0$ gewisse bekannte infinitesimale Transformationen $X_1 f$, $X_2 f \dots$ gestattet, sowie dass gewisse Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ von $Af = 0$ vorliegen. Ich setze ferner voraus, dass Relationen von der Form

$$(X_i X_k) = \psi_{ik1}(\varphi) X_1 f + \psi_{ik2}(\varphi) X_2 f + \cdots,$$
$$X_i \varphi_k = \omega_{ik}(\varphi_1 \varphi_2 \dots)$$

bestehen, so dass also keine weitere Transformationen und Lösungen abgeleitet werden können.

Jetzt kann ich ohne *wesentliche* Beschränkung annehmen dass $Af = 0$ in der Form

$$Af = \frac{\partial f}{\partial z} + \sum \alpha_i (z \varphi_1 \cdots \varphi_q y_1 y_2 \cdots) \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0$$

und die $X_k f$ in der Form

$$\Phi_k f = \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} + \sum \psi_{ki} (z \varphi_1 \cdots \varphi_q y_1 y_2 \cdots) \frac{\partial f}{\partial y_i},$$

$$Y_\nu f = \qquad \sum \eta_{\nu i} (z \varphi_1 \cdots \varphi_q y_1 y_2 \cdots) \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

vorliegen.

Wir *beschränken* uns nun auf den Fall, dass die Zahl der y sowie die Zahl der Y gleich 3 ist.

Hier bestehen nun sicher Relationen von der Form

$$(A\,\Phi_k) = 0\,, \quad (A\,Y_\nu) = 0\,,$$
$$(\Phi_i\Phi_k) = \sum \omega_{iks}(\varphi)\,Y_s f\,,$$
$$(\Phi_i Y_k) = \sum v_{iks}(\varphi)\,Y_s f\,,$$
$$(Y_i Y_k) = \sum u_{iks}(\varphi)\,Y_s f\,.$$

Dabei können wir ohne Beschränkung

$$(Y_1 Y_2) = Y_1\,, \quad (Y_1 Y_3) = 2\,Y_2\,, \quad (Y_2 Y_3) = Y_3$$

setzen, indem uns hier die Fälle, die durch Quadratur erledigt werden, nicht interessiren.

Indem wir statt $\Phi_k f$ passende Ausdrücke

$$\Phi_k f + \sum \nu_{ki}(\varphi)\,Y_i f$$

als neue $\Phi_k f$ einführen, erreichen wir, dass alle $(\Phi_i Y_k)$ verschwinden:

$$(\Phi_i Y_k) = 0\,.$$

Bilden wir sodann die Identität

$$((\Phi_i\Phi_k)\,Y_j) + ((\Phi_k\,Y_j)\,\Phi_i) + ((Y_j\,\Phi_i)\,\Phi_k) = 0\,,$$

so erkennen wir, dass alle $((\Phi_i\,\Phi_k)\,Y_j)$ und *gleichzeitig* alle $(\Phi_i\,\Phi_k)$ gleich Null sind.

Es bestehen daher jetzt die Relationen

$$(A\,\Phi_k) = 0\,, \quad (A\,Y_\nu) = 0\,,$$
$$(\Phi_i\,\Phi_k) = 0\,, \quad (\Phi_i\,Y_k) = 0\,,$$
$$(Y_1\,Y_2) = Y_1\,, \quad (Y_1\,Y_3) = 2\,Y_2\,, \quad (Y_2\,Y_3) = Y_3\,.$$

Bezeichnen wir daher die allerdings unbekannten Lösungen des vollständigen Systems

$$Af = 0\,, \quad \Phi_1 f = 0 \;\ldots\; \Phi_q f = 0$$

mit

$$y_1'\,,\; y_2'\,,\; y_3'$$

und führen sodann die Grössen

$$z\,,\; \varphi_1 \ldots \varphi_q\,,\; y_1'\,,\; y_2'\,,\; y_3'$$

als neue unabhängige Veränderliche ein, so wird

$$Af = \frac{\partial f}{\partial z} + \sum \alpha_i'(y_1', y_2', y_3') \frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0 ,$$

$$\Phi_k f = \frac{\partial f}{\partial \varphi_k} ,$$

$$Y_k f = \sum \eta_{\nu i}'(y_1', y_2', y_3') \frac{\partial f}{\partial y_i'} ;$$

und hier ist es unmittelbar evident, dass eine weitere Reduction unmöglich ist.

Im vorliegenden Falle leistet daher meine alte Integrationstheorie das Grösstmögliche.

SITZUNG VOM 21. OCTOBER 1895.

Vorträge hielten:

1. **W. His**, o. M., Die Forschungen über JOHANN SEBASTIAN BACH's Gebeine und Antlitz; ergänzende Mittheilungen (erscheint in den Abhandlungen).
2. Herr **G. Wiedemann**, o. M., Vorläufige Vorlegung einer Abhandlung von Dr. ALBERT DAHMS: Bestimmung der magnetischen Declination für die magnetische Warte des physikalischen Instituts der Universität Leipzig im Jahre 1895.
3. Herr **A. Mayer**, o. M., kündigt für Herrn S. LIE, o. M., eine Abhandlung »Theorie der Translationsflächen und des Abel'schen Theorems« an.

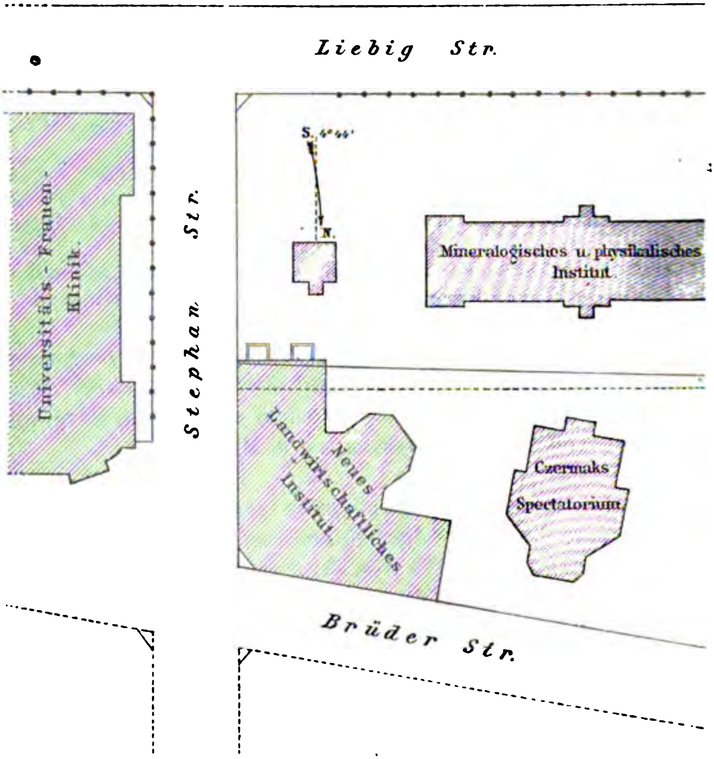
Albert Dahms, *Bestimmung der magnetischen Declination für die magnetische Warte des physikalischen Instituts der Universität Leipzig im Jahre 1895.* Vorgelegt und am 12. November eingereicht von Herrn G. WIEDEMANN, o. M.

Die Bestimmung der Declination geschah in der magnetischen Warte des physikalischen Instituts der Universität Leipzig, welche im Jahre 1873 von ihrer früheren Stelle auf dem Hofe des Augusteums (am Augustusplatz) zu ihrer gegenwärtigen Lage übergeführt wurde. Die Situation ist aus der Figur auf S. 510 zu ersehen.

Die Warte selbst ist ein quadratisches Gebäude von 8 m Seite und 8,15 m Höhe, mit einer nach Norden gelegenen Thüre. Sie ist nach Absicht des Erbauers aus durchaus eisenfreiem Material hergestellt. Alle Metalltheile, die Thürschlösser und Schlüssel, die Anschläge der Fenster, die Thüren und Röhren des an der südöstlichen Ecke gelegenen Thonofens sind aus Messing; ebenso die Nägel, mit denen die die ganzen Wände im Innern bekleidende Holztäfelung angenagelt ist. An einer das Schieferdach tragenden Holzsäule in der Mitte der Warte hängt eine, gleichfalls eisenfreie Pendeluhr. Der Fussboden besteht aus Asphalt.

Die geographische Lage der Warte ist 12° 23′ 22,2″ östliche Länge von Greenwich, 51° 20′ 0,3″ nördliche Breite. Die nordsüdliche Axe der Warte ist mit ihrem nördlichen, der Thüre zu gelegenen Ende 4° 44′ nach Westen gegen den geographischen Meridian gedreht.

Maassstab 1400 : 1.



Die Messung der Declination selbst geschah in der üblichen Weise durch Magnet und Theodolit. Der cylindrische, 248 mm lange, 13 mm dicke, harte Stahlmagnet war zum Schutz gegen die Feuchtigkeit mit einer 0,5 mm dicken Kupferblechhülse umgeben. Auf seine beiden Enden waren ca. 20 cm lange Kupferröhren fest aufgeschoben, welche an ihren Enden kreisförmige, gegen ihre Axe senkrechte, 1,5 mm dicke Kupfer-

scheiben trugen. Mittelst dreier Schrauben mit Gegenfedern waren an dieselben ebenso grosse Kupferscheiben angeschraubt und beliebig zu neigen. Auf letztere waren kreisförmige Planspiegel durch drei Schrauben mit grösseren Köpfen, indess ohne Druck, aufgelegt. Der Magnet ruhte auf einem schwalbenschwanzartig ausgeschnittenen ⊔ förmigen Blech, welches an einem 0,3 mm dicken, 2,8 m langen Messingdraht hing. Letzterer war oben an einem Messingschlitten befestigt, der an einen 5 cm starken Balken angeschraubt war. Dieser Balken war fest in die westliche Wand der Warte und einen geraden, 5 cm langen, zwischen der Mittelsäule und der Südwand eingelassenen Balken eingefügt. Der Schlitten war 2,2 m östlich von der Westwand, 3,04 m von der Südwand entfernt.

Zur Ermittelung der Torsion des Messingdrahtes, welcher den Magnet trug, war oberhalb des Magneten an der Aufhängevorrichtung ein dritter Spiegel angebracht und durch ein verschiebbares Gegengewicht äquilibrirt. Nahezu im gleichen magnetischen Meridian wie der Aufhängedraht des Magneten, 2,96 m nördlich von diesem, war auf einem massiven, aufgemauerten, 43 cm dicken und 93 cm hohen cylindrischen Sandsteinpfeiler der Theodolith montirt, ein Reisetheodolit von Pistor und Martins in Berlin, dessen horizontaler Theilkreis von ungefähr 17 cm Durchmesser in $\frac{1}{6}^\circ$ getheilt war; vermittelst der beiden Nonien konnten Ablesungen auf 10″ vorgenommen werden. Eine auf dem nämlichen Pfeiler unterhalb des Theodolit-Fernrohrs senkrecht zum magnetischen Meridian befestigte Millimeterscala hatte eine Entfernung von 2762,5 mm von dem zugewandten Spiegel des Magneten und eine Entfernung von 2878 mm von dem oberen Spiegel.

Zur *Fixirung der astronomischen Meridianlinie* wurde mit dem durch Libelle geprüften und berichtigten Theodolit die grösste östliche Ausweichung des Polarsternes in den Nächten 27/28. Juni und 2/3. Juli 1895 beobachtet. Beide Beobachtungen führten übereinstimmend zu den Ablesungen

NW-Nonius 143° 52′ 40″; SO-Nonius 323° 53′ 0″.

Aus der Declination von α Ursae minoris

$$\delta = 88^\circ\, 45'\, 2''$$ [1]

1) F. Kohlrausch, Leitfaden der prakt. Physik 1892, Tab. 85.

und der Polhöhe des Beobachtungsortes

$$\varphi = 51^\circ\ 20'\ 6''$$ [1])

berechnet sich der Winkel ϑ zwischen dem Verticalkreis der grössten Ausweichung und der Nordrichtung gemäss der Formel

$$\sin\vartheta = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

zu

$$2^\circ\ 0'\ 0''.$$

Für die Lage des astronomischen Meridians ergeben sich die Einstellungen

NW-Nonius 141° 52′ 40″; SO-Nonius 321° 53′ 0″.

Die folgenden Beobachtungen, welche den *Anschluss des magnetischen Meridians an den astronomischen* betreffen, sind ausgeführt bei den Nonienstellungen

NW-Nonius 131° 8′ 10″; SO-Nonius 311° 8′ 30″,

bei welchen die Axe des Fernrohrs ungefähr im magnetischen Meridian lag. Das auf den oberen Spiegel gerichtete Fernrohr lieferte die Scaleneinstellung 181,0, als statt des Magneten ein gleich schwerer Kupferstab in den Träger eingelegt war. Mit Magnetstab wurde die Einstellung 262,6 erhalten als Mittelwerth der Einstellungen bei zwei Lagen des Magneten, bei welchen dieser in Bezug auf oben und unten entgegengesetzt orientirt war. Daraus und aus dem Abstand 2878 mm des oberen Spiegels von der Scala berechnet sich der Winkel, um welchen der Draht bei der Beobachtung mit dem Magnet gedrillt war, zu

$$\alpha = 0^\circ\ 48'\ 43''.$$

Der Einstellung 262,6 mit dem oberen Spiegel entsprach bei dem Spiegel am Magnet eine Einstellung 268,9. Nach Drehung des Torsionskreises um $\frac{1}{10}$ Kreisumfang,

$$\beta = 36^\circ,$$

resultirte eine Einstellung 342,6 dieses Spiegels. Dies giebt in Verbindung mit dem Scalenabstand 2762,5 eine Ablenkung des Magneten um

---

1) BÖRNSTEIN, Phys.-chem. Tabellen v. LANDOLT und BÖRNSTEIN, 1894, pag. 8.

$$\gamma = 0^\circ\ 45'\ 51''.$$

Das Torsionsverhältniss Θ folgt hiernach

$$\Theta = \frac{\gamma}{\beta - \gamma} = 0{,}0147,$$

und die wegen der Torsion anzubringende Correction wird

$$\Theta\alpha = 0^\circ\ 0'\ 43''.$$

Zu berechnen ist noch der Winkel der Verticalebene der Fernrohraxe und des magnetischen Meridians. Scalenmitte war 249,0; der erwähnte Winkel ergiebt sich zu

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{268{,}9 - 249{,}0}{2762{,}5} = 0^\circ\ 12'\ 23''.$$

Somit erhält man schliesslich für die magnetische Declination

$$\begin{array}{rl} & 141^\circ\ 52'\ 40'' \\ - & 131^\circ\ \ 8'\ 10'' \\ + & 0^\circ\ 12'\ 23'' \\ - & 0^\circ\ \ 0'\ 43'' = 10^\circ\ 56'\ 10''. \end{array}$$

Die diesem Werthe zu Grunde liegenden Beobachtungen beziehen sich auf den 29. Juli 1895. Für diese Zeit wäre also nach den vorliegenden Bestimmungen die westliche magnetische Declination des Beobachtungsortes anzugeben zu

$$10^\circ\ 56'.$$

Abgesehen von den unvermeidlichen Eisentheilen in den grossen benachbarten Gebäuden, ziehen sich eiserne Gitter, welche durch punktirte Linien angedeutet sind, in nicht zu grosser Ferne von der Warte hin. Dann sind auch noch zwei Balcons mit eisernen Geländern an dem landwirthschaftlichen Institut angebracht.

Dass die Einflüsse dieser Eisenmassen nicht zu vernachlässigen sind, ergiebt sich schon daraus, dass eine mit dem Localvariometer von F. Kohlrausch vorgenommene Untersuchung der Warte Aenderungen der magnetischen Horizontalintensität an verschiedenen Stellen im Verhältniss von 1 : 1,0021 anzeigte.

Indess handelte es sich darum, die Declination gerade unter den obwaltenden Umständen in der Warte selbst zu bestimmen.

Das häufige Vorbeifahren von Wagen mit eisernen Axen in der Liebigstrasse und der rege Verkehr, namentlich von Postwagen, in der noch näheren Stephanstrasse, welcher auch des Nachts nicht ganz aufhörte, verursachten, wenn auch nur schwache Störungen der Magnetnadel; auch die Erschütterungen durch die Wagen pflanzten sich bis zu derselben fort. Dadurch wurden die Beobachtungen auf wenige Stunden des Tages beschränkt.

SITZUNG VOM 2. DECEMBER 1895.

Vorträge hielten:

1. Herr AD. MAYER, o. M., Vorlegung einer Abhandlung von J. Thomae-Jena o. M.: Wann hat eine durch neun Punkte gegebene Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt?
2. DERSELBE: Vorlegung zweier mathematischer Mittheilungen von E. Study-Bonn:
   1. Ueber das Pascal'sche Sechseck.
   2. Bemerkungen zur Trigonometrie.
3. Herr H. BRUNS, o. M., Vorlegung einer Abhandlung von Dr. F. Cohn: Bestimmung der Polhöhe der Leipziger Sternwarte.

J. Thomae, *Wann hat eine durch neun Punkte gegebene Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt?*

In seiner »Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung« schliesst H. SCHRÖTER die Curven mit einem Doppelpunkte von der Betrachtung aus. Wird aber eine solche Curve nur durch neun Punkte gegeben, so kann dieselbe leicht einen Doppel- oder Rückkehrpunkt besitzen, und es ist deshalb im Grunde eine solche Ausschliessung unzulässig. Wenigstens müssten die Bedingungen angegeben werden, unter denen ein Doppelpunkt auftritt. Deshalb habe ich mir die Aufgabe gestellt, diese Bedingung auf linearem Wege zu finden, und den Doppelpunkt, falls er vorhanden ist, linear zu construiren. Diese Aufgabe soll in den folgenden Zeilen gelöst werden.

§ 1. *Wann berühren sich zwei durch je fünf Punkte gegebene Kegelschnitte, und wie findet man den Berührungspunkt linear?* Das Doppelpolardreieck zweier Kegelschnitte artet aus, wenn sich die Kegelschnitte berühren. Es giebt nur zwei Doppelpole $P\,P'$, von denen der erste der Berührungspunkt ist, und der zweite P' auf der Tangente und Doppelpolare p des Punktes P liegt. Die zweite Doppelpolare, die für beide Kegelschnitte gemeinsame Polare des Punktes P', ist im Allgemeinen von p verschieden, und werde p' benannt.

Wir construiren das Doppelpolardreieck der beiden durch je fünf Punkte gegebenen Kegelschnitte $K\bar{K}$. Zu fünf Punkten einer Geraden $\mathfrak{f}$ construiren wir die ihnen für K und $\bar{K}$ gleichzeitig oder mit andern Worten die ihnen für den Büschel $(K\bar{K})$ conjugirten Punkte, was auf linearem Wege geschieht und denken durch sie den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ gelegt, der die $\mathfrak{f}$ conjugirten Punkte enthält. Ebenso construiren wir den der Geraden $\bar{\mathfrak{f}}$ für den Büschel $(K\bar{K})$ conjugirten Kegelschnitt $\bar{\mathfrak{K}}$. Ist Q der Schnittpunkt $(\mathfrak{f}\bar{\mathfrak{f}})$ und R der ihm conjugirte Punkt, so schneiden sich $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ in dem linear bekannten Punkte R. Die übrigen Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ geben das Doppelpolardreieck, und es müssen sich demnach $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ und zwar in P berühren, wenn sich $K\bar{K}$ dort berühren.

Denken wir uns nämlich den Büschel $(K\bar{K})$ durch die beiden (uneigentlichen) Kegelschnitte gegeben, von denen der eine das gemeinsame Secantenpaar durch P' etwa $s'.p$, der andere das gemeinsame Secantenpaar durch P etwa $s.s_1$ ist, so wird der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ dadurch erhalten, dass man zu den Punkten von $\mathfrak{f}$ die beiden Geradenbüschel (σ') (σ) construirt, deren Strahlen von ihnen bez. durch $s'p$ und $s s_1$ harmonisch getrennt sind. Die projectiven in $P' P$ centrischen Büschel $(\sigma') \,\overline{\wedge}\, (\sigma)$ erzeugen $\mathfrak{K}$. Dem Punkte $(\mathfrak{f}p)$ entspricht als Strahl σ' die Gerade p, als Strahl σ die Gerade p', p' ist also Tangente an $\mathfrak{K}$ in P und ist von der Lage der Geraden $\mathfrak{f}$ unabhängig, so dass auch $\bar{\mathfrak{K}}$ in $P\,p'$ zur Tangente hat und $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ sich dort berühren. Dies Resultat ist nur theoretisch wichtig, die wirkliche Construction der Geraden $s'\,p$, $s\,s_1$ wird nicht verlangt.

Es müssen sich also $K\bar{K}$ $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ zugleich in einem Punkte schneiden, und es entsteht die Frage, wann schneiden sich vier durch je fünf Punkte gegebene Kegelschnitte in einem gemeinsamen Punkte, und wie findet man denselben?

Durch drei Kegelschnitte, die nicht einem Büschel angehören, ist ein Netz als eine lineare zweifach unendliche Mannigfaltigkeit bestimmt. Durch vier Kegelschnitte $K\bar{K}$ $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ ist ebenso eine dreifach unendliche lineare Mannigfaltigkeit bestimmt, wenn sie nicht in einem Netze liegen, wir wollen diese Mannigfaltigkeit mit

$$M^{(3)}\,(K\bar{K}\,\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}})$$

oder, da es hier ohne Zweideutigkeit geschehen kann, kürzer mit $M^{(3)}$ bezeichnen. Jedes durch Kegelschnitte von $M^{(3)}$ bestimmte Netz liegt ganz in $M^{(3)}$. In wie weit durch diesen Satz ein Kegelschnitt aus den vier gegebenen bestimmt ist, ergeben die nachfolgenden Constructionen. — Wir wünschen den Kegelschnitt von $M^{(3)}$ zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte $M_1\ M_2\ M_3$ geht. Wir construiren zunächst drei Kegelschnitte $\Gamma_1\ \Gamma_2\ \Gamma_3$ (d. h. wir construiren von ihnen je fünf Punkte), die bez. den Büscheln $(K\overline{K})$ $(K\mathfrak{K})$ $(K\overline{\mathfrak{K}})$ angehören, und durch M_1 gehen. Dass dies linear ausführbar ist, soll nachher besonders bewiesen werden. Das Netz $(\Gamma_1\ \Gamma_2\ \Gamma_3)$ liegt ganz in $M^{(3)}$.

Nun bestimmen wir zwei Kegelschnitte Γ_{12} Γ_{13}, die bez. in den Büscheln $(\Gamma_1\,\Gamma_2)$ $(\Gamma_1\,\Gamma_3)$ liegen und durch M_2 gehen. Γ_{12} Γ_{13} bestimmen einen Büchel, der ganz im Netze $(\Gamma_1\ \Gamma_2\ \Gamma_3)$ und folglich in $M^{(3)}$ liegt. — Endlich bestimmen wir den Kegelschnitt Γ des Büschels $(\Gamma_{12}\ \Gamma_{13})$, der durch M_3 geht, er liegt in $M^{(3)}$ und geht durch $M_1\ M_2\ M_3$.

Lässt man die drei Puukte $M_1\ M_2\ M_3$ auf eine Gerade g fallen, so zerfällt der durch sie bestimmte Kegelschnitt Γ in ein Geradenpaar, etwa $g.h$, und h wird auf linearem Wege gefunden. Nimmt man $M_1\ M_2\ M_3$ viermal auf geraden Linien etwa auf $g\,g'\,g''\,g'''$ an, die sich nicht in einem Punkte schneiden, so erhält man vier gerade Linien $h\,h'\,h''\,h'''$, die mit ihren zugehörigen g zusammen vier zerfallende Kegelschnitte der Mannigfaltigkeit $M^{(3)}$, die Kegelschnitte $g.h$, $g'.h'$, $g''.h''$, $g'''.h'''$ bilden[1]), und *die Bedingung dafür, dass $K\overline{K}\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}}$ sich in einem gemeinsamen Punkte schneiden ist die, dass die vier Geraden $h\,h'\,h''\,h'''$ sich in einem Punkte schneiden.* Allerdings kann der Fall eintreten, dass eine der Geraden g durch den Schnittpunkt P der Kegelschnitte $K\overline{K}\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}}$ geht, und es braucht dann das entsprechende h nicht durch ihn zu gehen. Dieser singuläre Fall darf ausser Acht gelassen werden. Denn legt man g durch einen gegebenen Punkt von K, der nicht allen vier Kegelschnitten gemein ist, und ist M der zweite Schnittpunkt von g mit K, so müsste nun, wenn

---

1) Sind vier Kegelschnitte analytisch durch quadratische Gleichungen gegeben, so kann man die Grössen $l\bar{l}\mathfrak{l}\bar{\mathfrak{l}}$ so bestimmen, dass in $lK + \bar{l}\overline{K} + \mathfrak{l}\mathfrak{K} + \bar{\mathfrak{l}}\overline{\mathfrak{K}}$ die quadratischen Glieder fortfallen, man erhält so den zerfallenden Kegelschnitt von $M^{(3)}$, von dem die unendlich ferne Gerade ein Bestandtheil ist.

g durch P gehen sollte, M dreimal mit je fünf Punkten von $\bar{K}\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ ein Pascal'sches Sechseck bilden, und es läge gewissermassen ein glücklicher Zufall vor, der sofort den gemeinsamen Punkt der Kegelschnitte von $M^{(3)}$ lieferte. Dreht man die Gerade in eine andere Lage, so gelangt man zum allgemeinen Falle.

Es könnte einfacher erscheinen, als Bedingung für die Berührung von K und $\bar{K}$ die anzugeben, dass drei Geradenpaare $g.h$, $g'.h'$, $g''.h''$ als zerfallende Kegelschnitte des Netzes $K\bar{K}\mathfrak{K}$ einen gemeinsamen Punkt besitzen müssen, allein diese Geradenpaare des Netzes sind nicht linear construirbar.

§ 2. *Sind die Kegelschnitte $K\bar{K}\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$, von denen die beiden letzten durch das Doppelpolardreieck der beiden ersten gehen, von einander linear unabhängig?* Berühren sich die Kegelschnitte nicht, so liegen die Ecken $P_1 P_2 P_3$ des Doppelpolardreiecks je zweimal mit zwei Grundpunkten des Büschels $(K\bar{K})$ in einer Geraden. $P_1 P_2 P_3$ aber gehören zu den Grundpunkten des Büschels $(\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}})$. Die Kegelschnitte $K\bar{K}\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ liegen nur dann in einem Netze, und sind nur dann von einander linear abhängig, wenn die Büschel $(K\bar{K})$ $(\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}})$ einen Kegelschnitt gemein haben. Dieser müsste die vier Grundpunkte von $(K\bar{K})$ und die Punkte P zugleich enthalten, also nothwendig in ein Geradenpaar zerfallen, das alle Punkte P und die Grundpunkte von $(K\bar{K})$ enthielte, was nicht möglich ist, weil $P_1 P_2 P_3$ von einander verschieden sind und ein eigentliches Dreieck bilden.

Berühren sich $K\bar{K}$ in P und ist P' der neben P noch vorhandene Doppelpol, p' seine Polare, p die Gerade PP', so berühren sich auch $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ in P mit p' als Tangente und gehen durch P'. Soll nun ein Kegelschnitt des Büschels $(\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}})$ dem Büschel $(K\bar{K})$ angehören, so kann es nur der in das Geradenpaar $p.p'$ zerfallende sein, weil nur dieser P' enthält und zugleich $K\bar{K}$ in P und auch $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ in P berührt. Da aber der Büschel $(\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}})$ ausser PP noch zwei Grundpunkte enthält, und diese nicht zugleich auf p liegen können, so gehört $p.p'$ dem Büschel $(\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}})$ nicht an, die vier Kegelschnitte liegen nicht in einem Netze.

Es kommt aber ein Fall in Betracht, in dem möglicher Weise die Kegelschnitte $K\bar{K}\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ in einem Netze liegen. Der Fall nämlich, dass die Kegelschnitte $K\bar{K}$ im Punkte P sich nicht blos berühren, sondern sich aneinander schmiegen, d. h. eine Berüh-

rung zweiter Ordnung miteinander eingehen. Alsdann schrumpft das Doppelpolardreieck in einen Punkt zusammen, d. h. die drei Ecken fallen in einen Punkt P zusammen, und die Tangente p ist die einzige Doppelpolare. Die Gerade p bildet mit der P und den letzten Schnittpunkt von $K\bar{K}$ verbindenden Geraden s das einzige im Büschel enthaltene Geradenpaar. Denkt man sich den Büschel durch die beiden Kegelschnitte K und $p.s$ gegeben und sucht man zu einer Geraden $\mathfrak{k}$ den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der die $\mathfrak{k}$ für den Büschel $(K\bar{K})$ conjugirten Punkte enthält, so wird er durch zwei projective Strahlenbüschel (g) (h) erzeugt. Die Geraden g gehen durch den Punkt P und sind von den Punkten auf $\mathfrak{k}$ durch sp harmonisch getrennt, die Geraden h aber gehen durch den Pol H von h für K und sind die Polaren der Punkte von $\mathfrak{k}$. Dem Schnittpunkte $(p\mathfrak{k})$ entspricht als Gerade g die Gerade p selbst, als Gerade h die Gerade HP. Demnach ist p Tangente an $\mathfrak{K}$ in P. Dasselbe gilt für $\bar{\mathfrak{K}}$, und da sich $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ ausser in dem $(\mathfrak{k}\bar{\mathfrak{k}})$ conjugirten Punkte und ausser in P nicht mehr treffen können (jeder weitere Schnittpunkt wäre ein weiterer Doppelpol), so müssen sich $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ im Punkte P ebenfalls in Schmiegung befinden. Die Kegelschnitte $K\bar{K}\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ haben die gemeinsame Tangente p, und haben dort gleichzeitig zwei Punkte mit einander gemein. Der Kegelschnitt des Schmiegungsbüschels $(\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}})$, der sich mit K und also auch mit $\bar{K}$ in P in Schmiegung befindet, könnte nun möglicherWeise durch den letzten Schnittpunkt von K und $\bar{K}$ gehen, und so im Büschel $(K\bar{K})$ liegen. Auf die Untersuchung dieser Möglichkeit brauchen wir nicht einzugehen, weil in diesem Falle das Netz $(K\bar{K}\mathfrak{K})$ zur Auffindung des Schmiegungspunktes genügt.

Sind QQ' zwei Punkte auf K, denen RR' bez. für den Büschel $(K\bar{K})$ conjugirt sind, so legen wir $\mathfrak{k}$ durch RR'. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ trifft dann K in QQ' und berührt ihn in P. Die Gerade (QQ') bildet mit p ein Paar gemeinsamer Secanten für K und $\mathfrak{K}$ und p wird daher nach weiter oben gegebener Methode leicht gefunden. Die Polare eines Punktes auf ihr in Bezug auf K oder $\mathfrak{K}$ liefert P linear[1]).

Gehen aber die beiden Kegelschnitte in einem Punkte P

1) Dass zwei Schmiegungsbüschel mit demselben Schmiegungspunkte und derselben Schmiegungstangente sowohl von einander linear un-

Schmiegung mit einander ein, so sind **entweder** in $M^{(3)}(K\bar{K}\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}})$ die Kegelschnitte $K\bar{K}\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ von einander linear unabhängig und die oben beschriebene Methode liefert zwar nicht unmittelbar den Punkt P, wohl aber die Tangente p. Denn da die vier Kegelschnitte in P zwei Punkte mit einander gemein haben, so muss jedes in $M^{(3)}$ als Kegelschnitt enthaltene Geradenpaar p als einen seiner Bestandtheile enthalten. Suchen wir also nach der oben beschriebenen Methode zu vier Geraden $gg'g''g'''$ die zu ihnen gehörenden Ergänzungen $hh'h''h'''$, die mit ihnen bez. einen zerfallenden Kegelschnitt in $M^{(3)}$ bilden, so müssen $hh'h''h'''$ zusammenfallen, und dies ist das Kriterium für das Vorhandensein eines Schmiegungspunktes, den man nun selbst mittelst der Polare eines Punktes von p für K linear findet. **Oder** die Kegelschnitte $K\bar{K}\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$ liegen in einem Netze. Dies wird dadurch festgestellt, dass die beiden Büschel $(K\bar{K})$ und $(\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}})$ einen Kegelschnitt gemein haben, was auf linearem Wege erkannt wird. Dies bedeutet dann das Vorhandensein eines Schmiegungspunktes, der nun mit Hülfe des Netzes $(K\bar{K}\mathfrak{K})$ in oben beschriebener Weise gefunden wird.

Berühren sich die Kegelschnitte $K\bar{K}$ in **zwei** Punkten, so ist wieder ein eigentliches Doppelpolardreieck vorhanden. Denkt man sich den Büschel durch die beiden Kegelschnitte bestimmt, von denen der eine aus den beiden Tangenten in den Berührungspunkten, der andere aus der Verbindungslinie der Berührungspunkte doppelt gezählt besteht, so findet man, dass der $\mathfrak{k}$ für $(K\bar{K})$ conjugirte Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt, dessen eine Gerade die Verbindungslinie der Berührungspunkte ist. Man erkennt demnach das Vorhandensein zweier Berührungspunkte, aber die Construction derselben ist quadratisch, nur ihre Verbindungslinie wird linear gefunden. — Der Fall endlich, in dem die beiden Kegelschnitte $K\bar{K}$ sich an einer Stelle vier-

abhängig als auch abhängig sein können, soll algebraisch dargelegt werden. — Die beiden Büschel seien

$$x^2 + y(y-2a) + \lambda y(ex+fy) = 0,$$
$$x^2 + \frac{c^2}{d^2}\,y(y-2d) + \mu y(e'x+f'y) = 0,$$

worin $\lambda\mu$ die Büschelparameter sind. Die beiden Büschel enthalten nur dann einen gemeinsamen Kegelschnitt, sind also dann und nur dann von einander linear abhängig, wenn der Coefficient von y in ihnen gleich ist, also wenn $ad = c^2$ ist.

punktig berühren, macht sich wie der vorige kenntlich, indem den Punkten jeder Geraden $\mathfrak{k}$ für $(K\bar{K})$ die Punkte einer Geraden, der gemeinsamen Tangente p, conjugirt sind. Der Punkt P wird hier linear gefunden durch die Polare eines Punktes von p für K. Die zweite Gerade, die neben p die $\mathfrak{k}$ conjugirten Punkte enthält, ist die Polare von $(\mathfrak{k}p)$, geht also durch P.

§ 3. *Wann hat eine durch neun Punkte gegebene Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ einen Doppelpunkt?* Der Wurf der von einem Punkte der Curve $C^{(3)}$ an sie gezogenen Tangenten ist für alle ihre Punkte derselbe; hat die Curve einen Doppelpunkt, so giebt es nur zwei Tangenten, und eine durch den Doppelpunkt gehende Gerade, die man als (doppelt zu zählende) Pseudotangente bezeichnen kann. Giebt es also irgend einen Punkt, von dem aus nur drei Tangenten an die Curve vorhanden sind, so muss eine davon eine Pseudotangente sein, die Curve muss einen Doppelpunkt haben. Dass die Wendetangente, wenn der Punkt ein Wendepunkt ist, mitzuzählen ist, versteht sich von selbst. Giebt es nur zwei Tangenten, von denen die eine Pseudotangente ist, so muss die Curve einen Rückkehrpunkt haben.

Es seien $N_1 N_2 N_3 .. N_9$ die gegebenen Punkte. Wir construiren zu $N_1 N_2 N_3 N_4$ den gegenüberliegenden Punkt auf $C^{(3)}$. Dass dieser linear gefunden wird, ist bekannt, er werde mit N_{1234} bezeichnet. Die Curve $C^{(3)}$ wird punktweise construirt durch einen Kegelschnittbüschel $(N_1 N_2 N_3 N_4)$ und einen ihm projectiven Strahlenbüschel (N_{1234}). Zieht man von N_{1234} an die Kegelschnitte des Büschels $(N_1 N_2 N_3 N_4)$ Tangenten, so liegen die Berührungspunkte auch auf einer Curve dritter Ordnung $\Gamma^{(3)}$, die durch $N_1 N_2 N_3 N_4$ N_{1234} und den N_{1234} für den Büschel $(N_1 N_2 N_3 N_4)$ conjugirten Punkt N'_{1234} hindurch geht. Denn die Polaren von N_{1234} für die Kegelschnitte des Büschels bilden einen Strahlenbüschel (N'_{1234}) durch N'_{1234}, und es ist

$$(N'_{1234}) \barwedge (N_1 N_2 N_3 N_4).$$

Die Schnittpunkte der Polaren mit den entsprechenden Kegelschnitten sind die Punkte von $\Gamma^{(3)}$. Einer der Kegelschnitte geht durch N_{1234}, die dort an ihn gezogene Tangente berührt ihn in N_{1234}, so dass dieser Punkt mit zur Curve $\Gamma^{(3)}$ gehört. Ausserdem schneiden sich $C^{(3)}$ $\Gamma^{(3)}$ allgemein zu reden noch in vier Punkten, sie sind die Berührungspunkte der von N_{1234} an

$C^{(3)}$ gezogenen Tangenten. Giebt es deren nur drei, und berührt $\Gamma^{(3)}$ nicht $C^{(3)}$ in N_{1234}, in welchem Falle dieser Punkt ein Wendepunkt ist, so hat $C^{(3)}$ einen Doppelpunkt, und einer der Schnittpunkte ist der Doppelpunkt.

Die Schnittpunkte von $\Gamma^{(3)}$ und $C^{(3)}$ findet man als die Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit $\Gamma^{(3)}$, der schon die beiden Punkte N_{1234} N'_{1234} mit $\Gamma^{(3)}$ gemein hat. Es ist nämlich

$$(N_{1234}) \barwedge (N_1 N_2 N_3 N_4) \barwedge (N'_{1234}),$$

und es besteht also zwischen den beiden Strahlenbüscheln eine projective Beziehung

$$(N_{1234}) \barwedge (N'_{1234}),$$

sie erzeugen einen Kegelschnitt K durch die Punkte N_{1234} N'_{1234} auf $\Gamma^{(3)}$. Die weiteren vier Punkte, die K mit $\Gamma^{(3)}$ gemein hat, liegen zugleich auf $C^{(3)}$, weil die von N_{1234} nach ihnen gehenden Strahlen und die durch sie gehenden Kegelschnitte des Büschels $(N_1 N_2 N_3 N_4)$ in der $C^{(3)}$ erzeugenden Projectivität

$$(N_{1234}) \barwedge (N_1 N_2 N_3 N_4)$$

einander zugeordnet sind, sie berühren dort ihre entsprechenden Kegelschnitte. K ist die harmonische Polare des Punktes N_{1234} für $C^{(3)}$ und berührt deshalb diese Curve in N_{1234}, so dass der Kegelschnitt K die Curve $C^{(3)}$ ebenfalls sechsmal, nämlich doppelt in N_{1234} trifft. Beliebig viele Punkte von K werden linear gefunden.

Es seien $\bar{N}_1 \equiv N_{1234}$, $\bar{N}_2 \equiv N_1$, $\bar{N}_3 \equiv N_2$, $\bar{N}_4 \equiv N_3$, $\bar{N}_5 \equiv N_4$, $\bar{N}_6$, $\bar{N}_7$, $\bar{N}_8$, $\bar{N}_9$ neun Punkte von $\Gamma^{(3)}$, von denen die fünf ersten, die schon vorhin benutzt wurden, zugleich auf $C^{(3)}$ liegende Punkte sind. Der $\bar{N}_1 \bar{N}_2 \bar{N}_3 \bar{N}_4$ auf $C^{(3)}$ gegenüberliegende Punkt sei $\bar{N}_{1234}$, der ihnen auf $\Gamma^{(3)}$ gegenüberliegende Punkt sei $\bar{\mathsf{N}}_{1234}$. $\Gamma^{(3)}$ wird durch die Projectivität zwischen Kegelschnittbüschel und Strahlenbüschel

$$(\bar{N}_1 \bar{N}_2 \bar{N}_3 \bar{N}_4) \barwedge (\bar{\mathsf{N}}_{1234}),$$

$C^{(3)}$ durch die Projectivität

$$(\bar{N}_1 \bar{N}_2 \bar{N}_3 \bar{N}_4) \barwedge (\bar{N}_{1234})$$

erzeugt, woraus folgt, dass die Strahlenbüschel

$$(\bar{N}_{1234}) \barwedge (\bar{\mathsf{N}}_{1234})$$

einander projectiv zugeordnet sind, und also einen Kegelschnitt $\overline{K}$ erzeugen, von dem man beliebig viele Punkte linear construiren kann. Dieser Kegelschnitt geht durch die vier $C^{(3)}$ und $\Gamma^{(3)}$ neben N_{1234} $N_1 N_2 N_3 N_4$ gemeinsamen Punkte. K und $\overline{K}$ bestimmen durch ihre Schnittpunkte die vier Tangenspunkte des Punktes N'_{1234} auf der Curve $C^{(3)}$.

Um zu entscheiden, ob eine durch neun Punkte gegebene Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ einen Doppelpunkt besitzt, hat man in der eben beschriebenen Weise von zwei Kegelschnitten $K\overline{K}$ je fünf Punkte linear zu construiren, berühren sich diese Kegelschnitte, so giebt es von einem Punkte der Curve $C^{(3)}$ nur drei Tangenten an sie, die Curve hat einen Doppelpunkt.

§ 4. *Der Doppelpunkt ist linear construirbar.* Schneidet $\overline{K}$ den Kegelschnitt K in vier Punkten, so hat jeder dieser Kegelschnitte in jedem von N_{1234} verschiedenen Schnittpunkte mit $C^{(3)}$ einen Punkt mit dieser Curve gemein. Fallen zwei der Schnittpunkte von K und $\overline{K}$ zusammen, so müssen diese Kegelschnitte dort zwei Punkte mit $C^{(3)}$ gemein haben, der Berührungspunkt von K und $\overline{K}$ muss mithin der Doppelpunkt von $C^{(3)}$ sein. Demnach ist der Schnittpunkt der vier Geraden h des § 1 der Doppelpunkt, und wird folglich linear gefunden. Es erscheint bemerkenswerth, dass der Berührungspunkt zweier durch je fünf Punkte gegebenen Kegelschnitte, wenn man sein Vorhandensein im voraus weiss, nach der Methode des § 1 linear gefunden wird. Es stimmt das mit der algebraischen Thatsache überein, dass von einer Gleichung, die eine (und nur eine) doppelte Wurzel hat, diese doppelte Wurzel linear gefunden wird. Mit denselben Mitteln findet man linear den Berührungspunkt einer Geraden g mit einer Curve dritter Ordnung, wenn man weiss, dass sie Tangente ist. Denn der Kegelschnittbüschel und der ihm projective Strahlenbüschel, die die Curve erzeugen, bestimmen auf ihr eine Involution und eine dieser projective Punktreihe. Die sich selbst entsprechenden Elemente dieser Projectivität, also die Schnittpunkte der Curve dritter Ordnung mit der Geraden, findet man nach vorausgegangener Projection der auf g liegenden Projectivität auf einen Kegelschnitt Γ als die drei Schnittpunkte eines Kegelschnittes Δ, der mit Γ einen gegebenen Punkt (der keinen sich selbst entsprechenden Punkt liefert) gemein hat. Berühren sich Γ und Δ,

so ist g Tangente, und da der Berührungspunkt von $\Gamma\Delta$ linear gefunden wird, so wird auch der Berührungspunkt von g mit der Curve dritter Ordnung linear gefunden. Ebenso findet man den Berührungspunkt eines Kegelschnittes Γ mit einer Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$, wenn zwei Schnittpunkte AB bekannt sind, und wenn man weiss, dass sich Γ und $C^{(3)}$ berühren. Denn man kann $C^{(3)}$ durch einen Kegelschnittbüschel, der AB zu Grundpunkten hat, und einen ihm projectiven Strahlenbüschel erzeugen. Sie bestimmen auf Γ zwei einander projective Involutionen. Diese Involutionen erzeugen durch Verbindung ihrer Paare zwei projective Strahlenbüschel, deren Träger die Involutionscentren sind, und diese erzeugen einen Kegelschnitt Δ, dessen Schnittpunkte mit Γ die sich selbst entsprechenden Elemente der beiden projectiven Involutionen und also die Schnittpunkte von Γ mit $C^{(3)}$ sind. Berührt Γ die Curve $C^{(3)}$, so müssen sich dort auch Δ und Γ berühren, und wenn die Berührung im voraus feststeht, so findet man den Berührungspunkt mit den hier gegebenen Mitteln linear.

Berühren sich K und $\bar{K}$ in einem Punkte doppelt, findet Schmiegung statt, so giebt § 2 dafür ein lineares Kriterium und die lineare Construction des Schmiegungspunktes. Hier würde es sich vom algebraischen Standpunkte aus um die Auffindung einer dreifachen Wurzel handeln.

Berühren sich die Kegelschnitte K und $\bar{K}$ in zwei verschiedenen Punkten, so gehen die Geraden h des § 1 sämmtlich durch die beiden Berührungspunkte, oder vielmehr der Kegelschnitt, welcher die einer Geraden $\mathfrak{k}$ für K und $\bar{K}$ conjugirten Punkte enthält, zerfällt in ein Paar gerader Linien, von denen die eine die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte ist. Die Curve hat dann zwei Doppelpunkte und zerfällt in einen Kegelschnitt und eine Gerade. Die Auffindung dieser Punkte ist **nicht** linear, wohl aber das Kriterium für das Vorhandensein derselben, es besteht einfach in Folgendem. Von den neun gegebenen Punkten müssen entweder sechs auf einem Kegelschnitt und drei auf einer Geraden liegen, oder es müssen vier auf einer Geraden, oder sieben auf einem Kegelschnitte liegen.

Gehen K und $\bar{K}$ eine Berührung dritter Ordnung mit einander ein, so besitzt die Curve einen dreifachen Punkt, zerfällt also in drei sich in einem Punkte schneidende gerade Linien,

die neun gegebenen Punkte müssen auf drei solchen Geraden liegen. Liegen aber die neun Punkte in drei Geraden, die sich nicht in einem Punkt schneiden, so hat $C^{(3)}$ drei Doppelpunkte, zerfällt in diese drei Geraden. Die Construction dieser Curven fällt nicht unter die allgemeinen Regeln, man braucht aber auf diesen Fall als einen trivialen nicht weiter einzugehen.

So ist es nun durch lineare Constructionen möglich, die Existenz eines Doppelpunktes einer durch neun Punkte gegebenen Curve dritter Ordnung zu ermitteln, und wenn er vorhanden ist, ihn linear zu construiren. Das Verfahren ist allerdings ein langwieriges, dürfte vielleicht noch manche Vereinfachungen zulassen, was zu untersuchen ich Andern überlassen will. Fragt man aber, wie auf algebraischem Wege das Vorhandensein eines Doppelpunktes zu constatiren ist, so erhält man als Antwort das Verschwinden einer gewissen Invariante, die völlig auszuschreiben einen nicht unerheblichen Raum erfordert. Sie hängt mit dem Doppelverhältniss der vier Tangenten von einem Punkte der Curve an dieselbe zusammen. Werden aber die Coefficienten der Curvengleichung durch die Coordinaten von neun gegebenen Punkten ausgedrückt, so treten Complicationen auf, deren Entwirrung einen äusserst geschickten Rechner voraussetzen dürfte.

§ 5. *Lineare Bestimmung eines Kegelschnittes durch einen Punkt, wenn der Kegelschnitt einem Büschel angehören soll, der durch zwei punktweise gegebene Kegelschnitte K und $\overline{K}$ bestimmt ist.* Diese Aufgabe ist aus der Lehre von den Kreisbüscheln sehr bekannt, pflegt aber dort mit Benutzung des Zirkels gelöst zu werden, obschon dabei noch die Erleichterung eintritt, dass eine gemeinsame Secante, nämlich die unendlich ferne Gerade, unmittelbar gegeben ist.

Wir legen durch den gegebenen Punkt M eine Gerade g. Auf ihr bestimmen die für K und die für $\overline{K}$ conjugirten Punkte zwei Involutionen, von denen man linear je zwei Paare auffinden kann. Projicirt man die beiden Involutionen von zwei Punkten AB aus, so erhält man zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}}$, von denen eine gemeinsame Sehne $(AB) \equiv s$ unmittelbar bekannt ist. Verbindet man zwei Punkte $C\overline{C}$ der Kegelschnitte $\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{K}}$ durch eine Gerade h, so findet man die weiteren Schnittpunkte von h mit $\mathfrak{K}$ und $\overline{\mathfrak{K}}$ etwa D und $\overline{D}$ linear. Die Gerade h treffe s in E,

und F werde durch die Involution $C\bar{C}.D\bar{D}.EF$, von der fünf Punkte gegeben sind, bestimmt. F ist ein Punkt der Geraden s', der Doppelsehne s' der Kegelschnitte $\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}}$, die mit s zusammen ein *Paar* bildet. Eine zweite Gerade h liefert einen weitern Punkt von s', diese Gerade wird also linear gefunden. Die Involution, die der Büschel $(K\bar{K})$ auf g bestimmt, ist identisch mit der, welche der Büschel $(\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{K}})$ auf ihr bestimmt, weil diese Involutionen zwei Paare, die Schnittpunkte von K und $\bar{K}$ und die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ mit g gemein haben. Wird nun die Gerade g durch einen Punkt C von K gelegt, so ist auch der zweite Schnittpunkt D von g und K linear bestimmt, C und D sind zugleich die Schnittpunkte von g mit $\mathfrak{K}$. Der Punkt N der Involution $CD.(gs)(gs').MN$, von der fünf Punkte linear bekannt sind, ist ein Punkt des gesuchten Kegelschnittes nach dem charakteristischen Satze bei Kegelschnittbüscheln. Indem man nun g variirt, findet man beliebig viele Punkte dieses Kegelschnittes linear.

---

§ 6. *Neue Definition der Involution dritter Ordnung.* Liegen zwei eineindeutig projective Elementenreihen auf demselben Träger, und giebt es ein involutorisches Paar, entspricht also dem Elemente A der ersten Reihe das Element B der zweiten, und entspricht B als Element der ersten Reihe dem Elemente A als Element der zweiten Reihe, so sind alle Paare in Involution, die Projectivität ist eine Involution zweiter Ordnung.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich die Involution dritter Ordnung definiren aus einer collocalen zweizweideutigen Projectivität, worauf übrigens schon Weyr in seinen Beiträgen zur Curvenlehre (Wien 1880) hingewiesen hat, jedoch unter Anwendung algebraischer Hülfsmittel.

Sind die collocalen Elementenreihen (A) (B) einander zweizweideutig projectiv zugeordnet, und entsprechen dem Elemente A der ersten Reihe die Elemente BC der zweiten, entsprechen B als Element der ersten Reihe die Elemente CA als Elemente der zweiten Reihe, und entsprechen dem Elemente C als Element der ersten Reihe AB als Elemente der zweiten Reihe, mit andern Worten, sind ABC ein involutorisches Tripel der zweizweideutigen Projectivität, so bilden die einem beliebigen Elemente A_i der ersten

Reihe entsprechenden Elemente B_i C_i der zweiten zusammen ebenfalls ein involutorisches Tripel. Die Tripel (ABC) bilden eine cubische Involution.

Nach meinen Untersuchungen über zweizweideutige projective Verwandtschaften im Bande XXI der Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften (auf Seite 472) giebt es in einer zweizweideutigen Projectivität nur zwei involutorische Paare, oder alle Paare liegen involutorisch. Da nun bei Annahme eines involutorischen Tripels ABC

$$AB, \; BC, \; CA$$

drei involutorische Paare sind, so sind alle Paare der Verwandtschaft

$$(A) \overset{2,2}{\wedge} (B)$$

involutorisch, die Verwandtschaft ist eine symmetrische. Nimmt man die Projectivität $(A) \overset{2,2}{\sim} (B)$ als auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ liegende Punktreihen an, so stützen sich die Verbindungslinien entsprechenden Paare (§ 19 meiner citirten Abhandlung) auf einen Kegelschnitt Γ und umgekehrt bestimmen die Tangenten desselben die Paare der Verwandtschaft. Giebt es ein involutorisches Tripel ABC, so bilden die Geraden (AB), (BC), (CA) ein $\mathfrak{K}$ eingeschriebenes Dreiseit, das Γ umschrieben ist. Nach einem bekannten Satze erhält man wieder ein $\mathfrak{K}$ eingeschriebenes Dreieck, wenn man von einem beliebigen Punkte A_i auf $\mathfrak{K}$ an Γ eine Tangente zieht, die $\mathfrak{K}$ in B_i trifft, von B_i eine weitere Tangente an Γ, die $\mathfrak{K}$ in C_i trifft. Die von C_i gezogene Tangente geht durch A_i. Daraus folgt, dass in der Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\sim} (B)$ alle Tripel involutorisch liegen, dass sie in diesen Tripeln eine Involution dritter Ordnung erzeugt.

Nimmt man auf $\mathfrak{K}$ zwei Tripel ABC, $A_1B_1C_1$ willkürlich an, so berühren die Geraden (AB) (BC) (CA) (A_1B_1) (B_1C_1) (C_1A_1) einen und denselben bestimmten Kegelschnitt Γ, dessen Tangenten auf $\mathfrak{K}$ eine zweizweideutige projective Verwandtschaft erzeugen, in der ABC, $A_1B_1C_1$ involutorische Tripel sind. Daraus folgt der Satz:

Durch zwei Tripel ist eine Involution dritter Ordnung bestimmt.

Correctur. In diesen Berichten Jahrgang 1895 lies auf S. 369 letzte Zeile $\Phi . \Psi$ st. Φ, Ψ, auf S. 371 Zeile 3 lies projectiv st. perspectiv und folgt st. erfolgt.

§ 7. *Uebereinstimmung der neuen Definition mit den sonst üblichen.* Herr Milinowski definirt die cubische Involution auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ durch die drei weiteren Schnittpunkte desselben mit den Kegelschnitten K eines Büschels $K_1 K_2$, von dem ein Grundpunkt X auf $\mathfrak{K}$ liegt. Sind LMY die weitern Grundpunkte des Büschels $(K_1 K_2)$ und sind diese reale Punkte, so erweist man leicht den Satz, dass die Punkttripel ABC, die K auf $\mathfrak{K}$ (neben X) bestimmt, Dreiecke bilden, deren Seiten einen und denselben Kegelschnitt Γ berühren. — Das Geradenpaar $(XA).(BC)$ ist ein Kegelschnitt des Büschels $(K\mathfrak{K})$, und wenn $\mathfrak{K}$ die Gerade (LM) in den Punkten UV, wenn $(XA).(BC)$ dieselbe Gerade in RS treffen, so sind die sechs Punkte $LM.UV.RS$ in Involution. Geht K in $K'K''\ldots$ Kegelschnitte des Büschels $(K_1 K_2)$ über, so treffen alle diese Kegelschnitte die Gerade (LM) in L und M. RS gehen dabei in $R'S'$, $R''S''$,.. über. Die Involutionen $LM.UV.R'S'$, $LM.UV.R''S''$,.. haben zwei Paare gemein, gehören also einer und derselben Involution

$$LM.UV.RS.R'S'.R''S''..$$

an und es ist folglich

$$RR'R''..\;\overline{\wedge}\;SS'S''..$$

Die Strahlen (BC) bestimmen auf (LM) und in gleicher Weise auf (YL) dem Büschel $X(AA'A''..)$ also unter sich projective Punktreihen, und stützen sich daher auf einen Kegelschnitt, den auch (LM) (MY) (YL) berühren. Lässt man A auf B und C fallen, so folgt, dass auch (AC) und (AB) denselben Kegelschnitt berühren.

Diese Schlussweise wird hinfällig, wenn LM aggregirt ideale Punkte sind, so dass zwar (LM) eine reale, (YL) (YM) aber ideale Geraden sind. Dann muss man etwas weiter ausholen.

Die Kegelschnitte $K_1 K_2 \mathfrak{K}$ bestimmen ein Netz. Von allen Geradenpaaren $x.y$ dieses Netzes geht der eine Bestandtheil, die Gerade x, durch X. Ist x gegeben, so ist y dadurch eindeutig bestimmt. Jedes in einem Büschel des Netzes enthaltene Geradenpaar gehört dem Netze an. $(XA).(BC)$ ist ein Geradenpaar des Büschels $(K\mathfrak{K})$, also des Netzes $(K_1 K_2 \mathfrak{K})$. Variirt man K, so erhält man alle Geradenpaare des Netzes. Es handelt sich also darum nachzuweisen, dass der Bestandtheil y der dem Netze $(K_1 K_2 \mathfrak{K})$ angehörenden Geradenpaare $x.y$ sich auf einen Kegelschnitt Γ stützt. — Um sämmtliche Geradenpaare des

Netzes zu finden, ist es nicht nöthig das Netz gerade durch $K_1 K_2 \mathfrak{K}$ zu definiren, sondern man kann dazu drei beliebige andere nicht in einem Büschel liegende Kegelschnitte des Netzes wählen. Dazu nehmen wir zwei reale Geradenpaare $x_1 . y_1$, $x_2 . y_2$ und den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, so dass das Netz mit

$$(x_1 . y_1, \; x_2 . y_2, \; \mathfrak{K})$$

bezeichnet werden kann. Da sich $x_1 . y_1$, $x_2 . y_2$ ausser in X noch in drei realen Punkten schneiden, so folgt auf die oben auseinandergesetzte Weise, dass sich die Geraden y auf einen Kegelschnitt Γ stützen, womit der Satz allgemein erwiesen ist.

Die durch den Kegelschnittbüschel $(K_1 K_2)$ auf $\mathfrak{K}$ bestimmten Tripel haben die Eigenschaft Dreiecke zu bilden, deren Seiten einen und denselben Kegelschnitt Γ berühren. Daraus ergiebt sich, dass $(A) \overset{2,2}{\sim} (B)$ ist, und dass die einem Elemente A entsprechenden Elemente BC ein involutorisches Tripel bilden.

Umgekehrt kann man durch zwei Tripel $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$ und den Punkt X auf $\mathfrak{K}$ zwei Kegelschnitte $K_1 K_2$ legen, dessen Individuen auf $\mathfrak{K}$ Dreiecke bestimmen, deren Seiten einen Kegelschnitt umhüllen. Es ist klar, dass dieser Kegelschnitt derselbe sein muss als der, den die Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\sim} (B)$ auf $\mathfrak{K}$ bestimmt. — Damit ist die Uebereinstimmung dieser Definitionen erwiesen.

Herr Kötter definirt die cubische Involution in folgender Weise. — Wird die (quadratische) Involution $UU'. U_1 U_1'. U_2 U_2' \ldots$ der Reihe nach den ihr collocalen Reihen

$$\Phi \Psi W W' W'' \ldots, \quad \Phi \Psi W W_1' W_1'' \ldots, \quad \Phi \Psi W_2 W_2' W_2'' \ldots,$$

projectiv gesetzt, so giebt es in jeder dieser Projectivitäten ein Tripel sich selbst entsprechender Elemente (Doppelelemente) ABC, $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, .., diese Tripel bilden eine cubische Involution.

Denken wir alle in Frage stehenden Elemente als Punkte einer Geraden g, und projiciren die Involution $UU'. U_1 U_1' \ldots$ durch ein Strahlenbüschel $uu'. u_1 u_1'. u_2 u_2' \ldots$ von einem Punkte M aus, und die Projectivitäten $\Phi \Psi W W' \ldots$, $\Phi \Psi W_1 W_1' \ldots, \ldots$ durch Strahlenbüschel $\varphi \psi w w'$, $\varphi \psi w_1 w_1' \ldots, \ldots$ von einem Punkte N aus, so erzeugen die Projectivitäten

$$uu'. u_1 u_1'. u_2 u_2' \ldots \;\overline{\wedge}\; \varphi \psi w w' w'' \ldots$$
$$uu'. u_1 u_1'. u_2 u_2' \ldots \;\overline{\wedge}\; \varphi \psi w_1 w_1' w_2' \ldots$$

. . . .

einen Büschel von Curven dritter Ordnung, die in M einen Doppelpunkt haben, und noch durch die festen Punkte $N(\varphi u)$ $(\varphi u')$ (ψu_1) $(\psi u_1')$ gehen. Die Schnittpunkte dieser Curven mit g geben die Tripel der Kötter'schen Definition. Sie sind den Curven und also $w w_1 w_2 ..$ projectiv zugeordnet. Bilden wir das ganze System durch eine Steiner'sche Verwandtschaft ab, in der $MN(\varphi u)$ Hauptpunkte sind, so bildet sich g auf einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ durch $MN(\varphi u)$ ab, und die Curven dritter Ordnung bilden sich auf einen Kegelschnittbüschel ab, von dem M und die $(\varphi u')$ (ψu_1) $(\psi u_1')$ in der Steiner'schen Verwandtschaft entsprechenden Punkte die Grundpunkte sind. Den Schnittpunkten der Curven dritter Ordnung mit g entsprechen die Schnittpunkte des Kegelschnittbüschels mit $\mathfrak{K}$. Von diesen Tripeln haben wir erwiesen, dass sie Tripel einer durch eine zweizweideutige Verwandtschaft definirten Involution sind. Sie sind den Kötter'schen Tripeln auf g projectiv zugeordnet und mithin bilden auch diese Tripel eine wie hier definirte Involution.

Einfacher gelangt man zu diesem Resultate, wenn man $UU'.\,U_1U_1'\ldots$, $\Phi\Psi WW'..$, $\Phi\Psi W_1W_1'..$, .. auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ annimmt, die Involution vom Involutionscentrum P durch Strahlen $pp'p''..$, die Reihen $\Phi\Psi WW'..$, $\Phi\Psi W_1W_1'..$, .. von einem Punkt X auf $\mathfrak{K}$ aus durch Strahlen $\varphi\psi ww'..$, $\varphi\psi w_1w_1'..$, .. projicirt. Dann erzeugen die Projectivitäten

$$pp'p''..\;\overline{\wedge}\;\varphi\psi ww'..$$
$$pp'p''..\;\overline{\wedge}\;\varphi\psi w_1w_1'..$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

einen Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $XP(p\varphi)$ $(p'\varphi')$, dessen Individuen der Reihe $ww_1w_2..$ projectiv zugeordnet sind. Die Schnittpunkte eines solchen Kegelschnittes mit $\mathfrak{K}$ sind die Coincidenzen entsprechender Elemente der Projectivitäten $UU'.\,U_1U_1'\ldots\;\overline{\wedge}\;\Phi\Psi WW'..$, .., sind also Kötter'sche Tripel. Die Tripel liegen den Kegelschnitten des Büschels $(XP(\varphi p)$ $(\psi p'))$ perspectiv, und sind deshalb den Punkten $WW_1W_2..$ projectiv zugeordnet.

§ 8. *Lineare Construction eines dreifachen Elementes einer cubischen Involution.* Von den Punkten A des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ giebt es im Allgemeinen zwei Tangenten an den Kegelschnitt Γ, sie bestimmen auf $\mathfrak{K}$ die Punkte CB des Tripels der durch Γ bestimmten cubischen Involution auf $\mathfrak{K}$. Von den Schnittpunkten

der Kegelschnitte $(\mathfrak{K}\Gamma)$ giebt es aber nur eine Tangente an Γ, sie bestimmen die Doppelelemente der cubischen Involution, deren es demnach vier giebt. Berühren sich aber die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und Γ, so berührt die Tangente, die von diesen Punkte an Γ gezogen wird, eben dort zugleich $\mathfrak{K}$. Wir haben also einen Punkt, der ein Tripel vertritt, in der Involution nur sich selbst entspricht, einen dreifachen Punkt derselben. Weiss man, dass die Involution einen dreifachen Punkt besitzt, so findet man ihn mit den Mitteln des § 4 linear.

Besitzt die cubische Involution zwei dreifache Punkte, so berühren sich die Kegelschnitte Γ und $\mathfrak{K}$ doppelt, die Tripel ABC haben dann die Eigenschaft, dass sowohl $(A) \overline{\wedge} (B)$ als auch $(B) \overline{\wedge} (C)$ und $(C) \overline{\wedge} (A)$ ist. Ein Beispiel dafür liefern zwei concentrische Kreise $\mathfrak{K}$ und Γ, von denen der eine einem gleichseitigen Dreieck eingeschrieben, der andere ihm umschrieben ist.

Jena 1895.

E. Study, *Mathematische Mittheilungen.*

I. Ueber das Pascal'sche Sechseck.

Der vorliegende Aufsatz bildet eine Ergänzung zu mehreren älteren Untersuchungen des Verfassers, die sich alle auf einen sehr speciellen Gegenstand, nämlich auf die ternären orthogonalen Substitutionen, beziehen [1]: Es soll nunmehr der Zusammenhang dieser Theorie mit der Figur des Pascal'schen Sechsecks und mit den binären Formen 6. O. betrachtet werden. Dieser Zusammenhang ist von Hesse aufgefunden worden [2]. Später hat man von den hyperelliptischen Functionen und der Liniengeometrie aus, wie es scheint, ganz unabhängig von der wenig beachteten Arbeit Hesse's, ein Theorem hergeleitet, das sich im Grunde nur in der Form von dem Satze Hesse's unterscheidet [3]; so dass man nicht ganz mit Unrecht wird sagen können, dass die sogenannten *Borchardt'schen Moduln* — freilich nicht auch ihre Gruppe — eigentlich schon bei Hesse vorkommen. Diese Grössen sind nämlich, wenn man sich nicht an die transcendente Definition, sondern an den algebraischen Kern der Sache hält, nichts Anderes als die Euler'schen Parameter der zu der Form 6. O. gehörigen orthogonalen Substitution, und diese werden von Hesse ausdrücklich erwähnt.

---

1) Von den Bewegungen und Umlegungen II, § 5. (Math. Ann. Bd. 39, S. 529.) — Zur Theorie der Kummer'schen Configuration. (Sächs. Ber. 1892, S. 122.) — Sphärische Trigonometrie, II, § 5—18. (Abh. der K. S. G. d. W. 1893, Nr. II.)

2) Transformationsformeln für rechtwinklige Raumcoordinaten, Crelle's J. Bd. 63 (1868), S. 250; vgl. auch Bd. 45 (1853) S. 93 u. ff.

3) S. Reichardt: »Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen« (Diss. Leipzig 1887 oder: Acta Leopoldina Bd. 50, 1887), insb. Seite 394.

Hesse's Satz ist gewisser Ergänzungen und auch einer eleganteren Formulirung fähig. Diese legen wir im Folgenden dar; und wir verbinden damit eine Erörterung einiger anderer mit dem Hesse'schen Satz zusammenhängender algebraischer Fragen.

Die Betrachtungen des § 5 lassen sich in derselben Form auf orthogonale Substitutionen von n Veränderlichen ausdehnen, und die des § 6 auf binäre Formen der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung. Wir beabsichtigen, auf diese Verallgemeinerung, die schon im nächsthöheren Falle $n=4$ zu merkwürdigen Erweiterungen der Hesse-schen Betrachtung führt, demnächst zurückzukommen.

1.

Von den Relationen im Coefficientensystem einer ternären orthogonalen Substitution.

Wir betrachten ein System von zehn homogenen Grössen $a_{00}, a_{11} \ldots a_{33}$, zwischen deren *Quadraten* dieselben linearen Relationen stattfinden sollen, die zwischen den Quadraten der Coefficienten einer orthogonalen Substitution bestehen, während wir hinsichtlich der Producte die entsprechende Voraussetzung zunächst noch nicht machen wollen. Es giebt bekanntlich fünfzehn lineare Identitäten zwischen je vier Quadraten. *Diese Relationen können wir alle in eine einzige Formel zusammenfassen, wenn wir die bekannte Charakteristikenbezeichnung noch etwas weiter ausbilden.* Wir wollen nämlich festsetzen, dass z. B. die Grösse a_{00}^2 durch das symbolische Product $[135][246] = [246][135]$ dargestellt werden soll[1]), wobei allgemein

$$[\varkappa\lambda\mu] = [\lambda\mu\varkappa] = [\mu\varkappa\lambda] = -[\varkappa\mu\lambda] = -[\lambda\varkappa\mu] = -[\mu\lambda\varkappa]$$

angenommen werden mag. Die fraglichen Relationen werden dann vorgestellt durch das Verschwinden der $15 = \frac{6.5}{2}$ wesentlich verschiedenen Ausdrücke:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} A_{ij;\,\varkappa\lambda\mu\nu} = [\lambda\mu\nu][\varkappa ij] - [\mu\nu\varkappa][\lambda ij] + \\ + [\nu\varkappa\lambda][\mu ij] - [\varkappa\lambda\mu][\nu ij]. \end{aligned}$$

1) Die Zuordnung zwischen den anderen Grössen a_{ik}^2 und ihren Charakteristiken ist der Tabelle (4) in der erwähnten Abhandlung, Sächs. Ber 1892, S. 185, zu entnehmen.

Unter diesen Ausdrücken sind aber nur fünf von einander unabhängig, und zugleich linear-unabhängig, z. B. irgend fünf unter den folgenden sechs:

$$\begin{aligned}
A_{35} &= [135][246]-[235][146]-[435][216]-[635][241],\\
A_{51} &= [135][246]-[125][346]-[145][236]-[165][243],\\
A_{13} &= [135][246]-[132][546]-[134][256]-[136][245],\\
A_{46} &= [135][246]-[235][146]-[125][346]-[132][546],\\
A_{62} &= [135][246]-[435][216]-[145][236]-[134][256],\\
A_{24} &= [135][246]-[635][241]-[165][243]-[136][245],
\end{aligned}$$

zwischen denen die eine Identität

$$A_{35}+A_{51}+A_{13}=A_{46}+A_{62}+A_{24}$$

besteht. Wir schliessen hieraus:

Deutet man die zehn Grössen $a_{i\varkappa}$ als (reelle) homogene Punktcoordinaten in einem neunfach ausgedehnten Raume, so definiren die Gleichungen $A_{ij}=0$ eine (reelle) vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit dieses Raumes, die als vollständiger Schnitt von fünf quadratischen Mannigfaltigkeiten die Ordnung 32 hat.

Wir erschliessen nämlich die Irreducibilität unserer M_4 aus dem Umstande, dass passend gewählte der fünf Grössen $a_{i\varkappa}$, z. B. a_{00}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, die übrigen durch fünf von einander unabhängige Quadratwurzeln bestimmen.

Sollen nun diese Grössen $a_{i\varkappa}$ Coefficienten einer orthogonalen Substitution sein, so treten zu den betrachteten Relationen noch fünfzehn weitere, lineare Gleichungen zwischen je drei Producten von zweien der Grössen $a_{i\varkappa}$. Diese sind zwar *linear* von einander unabhängig; aber sie sind, da eine orthogonale Substitution noch drei wesentliche Parameter enthält, *algebraisch*-abhängig, in der Weise, dass eine einzige von ihnen entweder alle übrigen oder doch ein ganz ähnlich gebautes Relationensystem nach sich zieht. Betrachten wir alle die verschiedenen hier auftretenden Möglichkeiten als gleichberechtigt, so können wir auch diese Relationen in eine Formel zusammenfassen:

$$(2)\quad \begin{aligned}&\sqrt{[i\varkappa\lambda][j\mu\nu]}\,\sqrt{[j\varkappa\lambda][i\mu\nu]}+\sqrt{[i\varkappa\mu][j\varkappa\lambda]}\,\sqrt{[j\varkappa\mu][i\nu\lambda]}+\\ &+\sqrt{[i\varkappa\nu][j\lambda\mu]}\,\sqrt{[j\varkappa\nu][i\lambda\mu]}=0.\end{aligned}$$

Die Thatsache, dass eine Gleichung dieser Form wirklich noch vierzehn ähnlich gebaute nach sich zieht, erhärten wir

dadurch, dass wir den Ausdruck links in (2) rational machen, und die Gleichheit der so entstehenden Grössen nachweisen.

Wir behaupten:

Die fünfzehn Functionen

$$(3)\qquad \begin{aligned} B_{ij} &= \sum_{\lambda,\mu,\nu} \{[i\varkappa\lambda]\,[j\mu\nu]\}^2 \cdot \{[j\varkappa\lambda]\,[i\mu\nu]\}^2 \\ &- 2\sum [i\varkappa\mu]\,[j\nu\lambda] \cdot [j\varkappa\mu]\,[i\nu\lambda] \cdot [i\varkappa\nu]\,[j\lambda\mu] \cdot [j\varkappa\nu]\,[i\lambda\mu] \end{aligned}$$

$$(i,j, = 1 \cdots 6;\ i \neq j \neq \varkappa \neq \cdots;\ (\lambda,\mu,\nu) = \lambda,\mu,\nu;\ \mu,\nu,\lambda;\ \nu,\lambda,\mu)$$

von zehn Grössen a_{st} sind alle untereinander congruent nach dem Modulsystem $A_{\sigma\tau}$.

Da der Ausdruck B_{ij} offenbar ungeändert bleibt, wenn man i und j, oder wenn man $\varkappa$, λ, μ, ν beliebig vertauscht, so haben wir nur zu zeigen, dass der Satz für irgend zwei benachbarte B_{ij} gilt, dass also z. B. (wenn $a_{i+3,\,\varkappa} = a_{i\varkappa}$)

$$\begin{aligned} B_{13} - B_{35} &= \sum_1^3{}_i \left(a_{i1}^4\, a_{i2}^4 - 2a_{i+1,1}^2\, a_{i+1,2}^2\, a_{i+2,1}^2\, a_{i+2,2}^2\right) \\ &- \sum_1^3{}_i \left(a_{i2}^4\, a_{i3}^4 - 2a_{i+1,2}^2\, a_{i+1,3}^2\, a_{i+2,2}^2\, a_{i+2,3}^2\right) \equiv 0 \text{ modd. } A_{\sigma\tau}. \end{aligned}$$

Führt man nun in die erste Summe vermöge der Relationen $a_{00}^2 = a_{\varkappa 1}^2 + a_{\varkappa 2}^2 + a_{\varkappa 3}^2$ überall statt der Grössen a_{11}, a_{21}, a_{31} die Grössen a_{13}, a_{23}, a_{33} ein, und beseitigt man dann noch a_{00} vermöge $a_{00}^2 = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2$, so findet man, nach einiger Rechnung, $B_{13} - B_{35} = 0$, woraus sich ohne Weiteres die behauptete Congruenz ergiebt.

Es gehen nun aus irgend einem beliebigen mit den Gleichungen $A_{ij} = 0$ verträglichen Lösungssystem der Gleichungen (2) alle übrigen dadurch hervor, dass man die Vorzeichen der Grössen a_{st} nach Belieben wechselt. Die Zahl dieser Zeichenwechsel ist 2^9, da ein gleichzeitiger Wechsel aller Vorzeichen bedeutungslos ist. Aber auch von diesen 2^9 Zeichenwechseln sind noch 2^4 ohne Einfluss auf die Relationen (2), [1]) sodass nur 2^5 wesentlich verschiedene Lösungssysteme der Gleichungen (2) übrig bleiben, die man aus einem von ihnen z. B. durch die Zeichenwechsel von a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{12}, a_{32} ableiten kann. Eines

1) Sächs. Ber. 1892, S. 136.

dieser Lösungssysteme ist das System der Coefficienten einer orthogonalen Substitution.

Deuten wir nun diese Substitutionscoefficienten, wie vorhin, als homogene Coordinaten in einem Gebiete zehnter Stufe, so erhalten wir eine gewisse dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit M_3, die vermöge der Euler'schen Parameter eindeutig-umkehrbar auf den gewöhnlichen Punktraum bezogen ist. Man schliesst aus der Natur dieser Abbildung ohne Mühe, dass die Ordnung von M_3 gleich acht ist. So sehen wir:

Der vollständige Durchschnitt M_3^{256} der vorhin definirten Mannigfaltigkeit M_4^{32} in R_9 mit der durch die Gleichung $B = 0$ (Nr. 3) dargestellten Mannigfaltigkeit M_7^8 besteht aus 32 verschiedenen (reellen) rationalen Mannigfaltigkeiten M_3^8, die alle zu einander projectiv sind, und deren jede als partieller Schnitt von 20 linear-unabhängigen quadratischen Mannigfaltigkeiten M_7^2 definirt werden kann[1].

Eine dieser Mannigfaltigkeiten wird dargestellt durch die zehn Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution.

Eine solche Mannigfaltigkeit M_3 ist, wie sich zeigen lässt, bereits vollständig definirt durch ihre Ordnung und durch die Thatsache, dass sie eine projective Gruppe gestattet, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe des Raumes gleichzusammengesetzt ist[2].

2.

Die Abhängigkeit der Substitutionscoefficienten von einander.

Wegen der Reducibilität der Mannigfaltigkeit M_3^{256} werden die Quadratwurzeln aus zehn Grössen, die durch die Relationen $A_{ij} = 0$ und $B_{ij} = 0$ oder $B = 0$ verknüpft sind, von einander abhängig, derart, dass man durch fünf unter ihnen die übrigen rational darstellen kann. Wir wollen nun diese Abhängigkeit genauer untersuchen, indem wir unter den verschiedenen irreducibelen Theilmannigfaltigkeiten M_3^8 die eine auswählen, die dem Falle einer orthogonalen Substitution entspricht.

Um alle Systeme von fünf unter einander unabhängigen Quadratwurzeln zu bestimmen, müssen wir die aus den Ele-

---

1) Math. Annalen Bd. 39 (1891), S. 532.

2) Vgl. Lie und Engel, Theorie der Transformationsgruppen, III, S. 786, 787.

menten a_{ix}^2 zu bildenden Quintupel classificiren, indem wir alle die zu einer Art zusammenfassen, die gegenüber den Relationen $A_{ij} = 0$, $B = 0$ dasselbe Verhalten zeigen, d. h. vermöge der Vertauschungsgruppe der Charakteristiken 1 ... 6 unter einander gleichberechtigt sind. Wir verfahren dabei am besten systematisch, indem wir auch die Paare, Tripel und Quadrupel in die Betrachtung ziehen.

Wir haben zunächst 45 gleichberechtigte *Paare* von Grössen a_{ix}, die sich in bekannter Weise zu je dreien auf 15 Sextupel vertheilen, entsprechend den 15 Formen der Relation $B = 0$.

Von *Tripeln* giebt es zwei Arten, 60 »syzygetische«, solche die mit einem weiteren Element durch eine Relation $A_{ij} = 0$ verbunden sind, und 60 »asyzygetische«, die wie z. B. a_{11}, a_{22}, a_{33} in keiner Relation $A_{ij} = 0$ zusammen stehen.

Von *Quadrupeln* haben wir drei Arten zu unterscheiden: Zunächst 15 solche, die durch je eine Relation $A_{ij} = 0$ verbunden sind; zweitens 180 solche, die zwei syzygetische Tripel enthalten, wie z. B. a_{00}, a_{11}; a_{12}, a_{21} oder a_{11}, a_{22}; a_{23}, a_{32}; endlich 15 solche, die kein syzygetisches Tripel enthalten, wie a_{00}, a_{11}, a_{22}, a_{33} oder a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33} (asyzygetische Quadrupel).

Endlich giebt es auch drei Arten von *Quintupeln:* 90 Quintupel erster Art entstehen, wenn man zu einem Quadrupel erster Art noch ein weiteres Element hinzufügt; 72 Quintupel zweiter Art sind dadurch gekennzeichnet, dass sie wie a_{00}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} oder a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{32}, a_{33} fünf syzygetische und fünf asyzygetische Tripel enthalten; endlich 90 Quintupel dritter Art werden erhalten, wenn man aus einem der oben erwähnten Sextupel irgend ein Element weglässt.

Die Quintupel erster Art ergänzen sich mit je einem Quintupel dritter Art zur Gesammtheit der zehn Elemente, die Quintupel zweiter Art gehören paarweise zusammen; ebenso entsprechen natürlich den drei Arten von Quadrupeln drei Arten von Sextupeln u. s. f.

Nun ist das Product der vier Elemente eines asyzygetischen Quadrupels immer darstellbar durch die Quadrate a_{ix}^2; solche vier Wurzelwerthe wie a_{00}, a_{11}, a_{22}, a_{33} sind also von einander abhängig. Es sind daher die Quintupel dritter Art für unseren Zweck nicht zu brauchen. Wohl aber sind es die beiden anderen Arten. Wir wollen diese Bemerkung zu dem folgenden Satze erweitern:

Man kann die zehn Coefficienten einer orthogonalen Substitution auf 36 Arten so auf zwei Quintupel vertheilen, dass die Elemente eines jeden rational ausdrückbar werden durch die des ergänzenden Quintupels.

Wenn die Quadrate der Substitutionscoefficienten rational bekannt sind, so giebt es 90 weitere Quintupel, durch deren Elemente man die übrigen Substitutionscoefficienten ebenfalls rational darstellen kann.

Die wirkliche Aufstellung dieser Formeln, die ganz einfach sind, halten wir nicht für nöthig; wir wollen nur noch die Bemerkung hinzufügen, dass die zuletzt besprochenen Quintupel erster Art, wenn die Quadrate nicht rational bekannt sind, die übrigen Substitutionscoefficienten auch *nicht* rational bestimmen. Man bedarf einer Quadratwurzel, wie man am schnellsten erkennt, wenn man etwa aus den Werthen von a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{31} die Verhältnisse der Euler'schen Parameter berechnet.

Sind nicht fünf Substitutionscoefficienten, sondern nur vier unabhängige rational bekannt, so sind die Ausdrücke der übrigen sechs immer irrational. Wesentliches Interesse bieten hier nur die Quadrupel dritter Art, die asyzygetischen Quadrupel.

Man kommt auf die Formeln, die gewöhnlich nach Monge benannt werden, aber, wie mir scheint, schon vollständig in den älteren Formeln Euler's enthalten sind.

Setzt man

$$4c_0 = a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33},$$
$$4c_1 = a_{00} + a_{11} - a_{22} - a_{33},$$
$$4c_2 = a_{00} - a_{11} + a_{22} - a_{33},$$
$$4c_3 = a_{00} - a_{11} - a_{22} + a_{33},$$

so wird

$$\tfrac{1}{2}a_{23} = \sqrt{c_2}\sqrt{c_3} + \sqrt{c_0}\sqrt{c_1},$$
$$\tfrac{1}{2}a_{32} = \sqrt{c_2}\sqrt{c_3} - \sqrt{c_0}\sqrt{c_1},$$

u. s. w. Die Grössen $\sqrt{c_i}$ sind die Euler'schen Parameter.

3.

Das ebene Sechseck und der Hesse'sche Satz.

Die in § 1 und § 2 durchgeführte Untersuchung erhält ein besonderes Interesse durch den Umstand, dass die dort betrachteten Systeme von zehn Grössen $a_{\sigma\tau}$ oder $[i\varkappa\lambda][j\mu\nu]$ aus

einer Figur der ebenen Geometrie, nämlich aus dem System von sechs Punkten abgeleitet werden können.

Bekanntlich bestehen zwischen den simultanen Invarianten von je dreien unter sechs ternären linearen Formen gewisse Relationen, die sich, nach einem Satze des Verfassers, alle vermöge der Relationen zweiten Grades ausdrücken lassen[1]).

Die Relationen zweiten Grades sondern sich in zwei Gruppen: 15 Relationen des Typus

$$(4)\quad A_{ij}: (\lambda\mu\nu)(\varkappa ij) - (\mu\nu\varkappa)(\lambda ij) + (\nu\varkappa\lambda)(\mu ij) - (\varkappa\lambda\mu)(\nu ij) = 0,$$

worin $\varkappa$, λ, μ, ν, i, j die die sechs Formen vertretenden Zahlen 1 ... 6 in irgend einer Anordnung bedeuten sollen, und 2 . 15 Relationen des speciellen Typus:

$$(5)\qquad \Gamma_{ij}: (\lambda\mu i)(\varkappa ij) + (\mu\varkappa i)(\lambda ij) + (\varkappa\lambda i)(\mu ij) = 0\,.$$

Vergleichen wir nun die Formeln (4) mit den Formeln (1) des § 1, so erkennen wir ohne Weiteres:

Zwischen den zehn Invarianten des Typus (135)(246) *von sechs Punkten in der Ebene bestehen dieselben linearen Identitäten, wie zwischen den Quadraten der Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution.*

Wir übersehen damit ohne Weiteres die Gruppirung dieser Gleichungen; wir hätten aber natürlich auch umgekehrt von hier aus die Charakteristikengleichung der Grössen $a_{i\varkappa}^2$ entwickeln können.

Sechs Punkte von beliebiger Lage in der Ebene enthalten, wenn man projective Figuren als äquivalent ansieht, vier wesentliche Constante; wir haben daher in den Quadratwurzeln unserer zehn Grössen im Allgemeinen nicht das Coefficientensystem einer orthogonalen Substitution vor uns, wohl aber wird dies, bei geeigneter Wahl der Vorzeichen, der Fall sein, wenn der Ausdruck

$$(6)\quad \begin{aligned} B = &\sum_{\lambda,\mu,\nu} (i\varkappa\lambda)^2 (i\mu\nu)^2 (j\varkappa\lambda)^2 (j\mu\nu)^2 \\ &- 2\sum (i\varkappa\mu)(i\nu\lambda)(i\varkappa\nu)(i\lambda\mu)\cdot(j\varkappa\mu)(j\nu\lambda)(j\varkappa\lambda)(j\lambda\mu) \\ &((\lambda,\mu,\nu) = \lambda,\mu,\nu;\ \mu,\nu,\lambda;\ \nu,\lambda,\mu)\,, \end{aligned}$$

---

1) Methoden zur Theorie der ternären Formen, Leipzig 1889, II, § 6.

der, wie wir in § 1 gesehen haben, nur *scheinbar* von den Indices i und j abhängt, den Werth Null hat. Nun ist B vom vierten Grade in Bezug auf die Coordinaten jedes einzelnen der Punkte 1 ... 6; die Gleichung B = 0 bedeutet also, wenn etwa der Punkt 1 als veränderlich gedacht wird, eine Curve 4. O. Aber diese Curve hat, wie die verschiedenen Formen von B zeigen, die Punkte 2 ... 6 zu Doppelpunkten; sie reducirt sich also auf einen doppelt zählenden Kegelschnitt. Wir sehen also:

Der Ausdruck B *ist ein vollständiges Quadrat.*

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die zehn Invarianten (135) (246) *u. s. w. als die Quadrate der Coefficienten einer (allgemeinen oder ausgearteten) orthogonalen Substitution angesehen werden können, besteht darin, dass die sechs Punkte auf einer Curve 2. Ordnung liegen.*

Wenn also die sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, so sind wir im Stande, die zehn Quadratwurzeln $\sqrt{(135)(246)}$ u. s. w. in der in § 2 geschilderten Weise rational durch fünf unter ihnen auszudrücken, und hierauf ihre sämmtlichen Verhältnisse rational durch vier homogene Parameter darzustellen.

Der wesentliche Theil vom Inhalte dieses Satzes rührt von Hesse her, der ihn nur etwas anders ausgedrückt hat[1]) (vgl. § 6); neu dürfte dagegen der Beweis der Umkehrung sein, wonach die Pascal'schen Sechsecke die einzigen sind, für die eine solche Beziehung zu orthogonalen Substitutionen besteht.

Wir wollen der Vollständigkeit halber hier noch die (im Wesentlichen bekannte) Gruppirung der orthogonalen Substitutionen besprechen, die zu demselben Pascal'schen Sechseck gehören, und damit zugleich eine Erörterung der *Realitätsverhältnisse* in dem System dieser Substitutionen verbinden.

Die Zahl der (eigentlichen) orthogonalen Substitutionen, die zu einem Pascal'schen Sechseck gehören, ist $2^4 \cdot 6! = 11520$. Darunter befinden sich reelle Substitutionen, wenn das Sechseck reell ist, und zwar giebt es solcher Substitutionen 1152. Die übrigen enthalten vierte Einheitswurzeln in ihrem Coefficientensystem. Der Uebergang zwischen den einzelnen Systemen wird durch eine wohlbekannte Gruppe von linearen Substitutionen der Euler'schen Parameter vermittelt, die Gruppe von sechs

1) Crelle's J. Bd. 63, 1863, S. 250.

reellen linearen Complexen, die paarweise zu einander conjugirt sind.

Nehmen wir an, dass die sechs reellen Punkte auf dem Kegelschnitt die Reihenfolge 1 2 3 4 5 6 haben, so wird durch die angegebenen Formeln, bei gehöriger Wahl der Vorzeichen der Quadratwurzeln, zunächst *ein* reelles Coefficientensystem definirt. Aus diesem erhalten wir dann, vermöge der zulässigen Vorzeichenwechsel, sechzehn Coefficiententafeln, die durch eine Gruppe G_{16} von 16 reellen Substitutionen unter einander zusammenhängen. Diese Gruppe, geschrieben in den Euler'schen Parametern, ist die Gruppe der Kummer'schen Configuration. Sie besteht aus den Vorzeichenwechseln von je zweien der Euler-schen Parameter x_i, verbunden mit den Vertauschungen der sogenannten Vierergruppe; wobei ein Wechsel aller Vorzeichen der x_i natürlich bedeutungslos ist.

Vertauschen wir sodann die Charakteristiken 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6, so bedeutet das für die a_{ik} eine Vertauschung der Horizontal- und Verticalreihen; die Gruppe G_{16} erweitert sich zu einer Gruppe G_{32}, indem noch ein Vorzeichenwechsel einer einzelnen Grösse x_i hinzukommt.

Fügen wir ferner die sechs Vertauschungen von 1, 3, 5 und die sechs Vertauschungen von 2, 4, 6 hinzu, so erhalten wir eine Gruppe G_{1152}, die alle Substitutionen umfasst, bei denen a_{00} an seiner Stelle bleibt, und damit die Gesammtheit aller reellen Substitutionen überhaupt. Die Vertauschung von 3 und 5 z. B. bedeutet für die Coefficiententafel die Vertauschung der zweiten und dritten Verticalreihe, verbunden mit einem Vorzeichenwechsel der ersten Verticalreihe. Die neu hinzutretenden Substitutionen der Euler'schen Parameter vermitteln den Uebergang zwischen sechs Tetraedern, die zwei Reihen von sogenannten desmischen Tetraedern bilden[1]).

Es bleiben nun noch die Substitutionen zu bilden, bei denen die Charakteristik [135] [246] durch eine andere ersetzt wird. Diese setzen sich zusammen aus den bereits angegebenen und etwa der Vertauschung von 1 und 2. Wir erhalten so aus dem Coefficientensystem $a_{00}, a_{11} \ldots a_{33}$ z. B. das folgende:

---

1) S. die ausführliche Darstellung im II. Abschnitt von des Verfassers Trigonometrie und die dort gegebenen Litteraturnachweise.

$$a_{11}, \quad \begin{array}{ccc} a_{00}, & ia_{12}, & ia_{13}, \\ ia_{21}, & a_{33}, & -a_{32}, \\ ia_{31}, & -a_{23}, & a_{22}. \end{array}$$

Die zugehörige Parametersubstitution ist

$$x_0' = \pm x_0, \quad x_1' = \pm x_1, \quad x_2' = \pm ix_2, \quad x_3' = \pm ix_3.$$

4.

Die alternirende Invariante von sechs Punkten in der Ebene.

Drückt man den Pascal'schen Satz analytisch aus, oder verlangt man, dass vier Punkte aus zwei weiteren Punkten durch gleiche Würfe projicirt werden, so findet man, dass für sechs Punkte auf einem Kegelschnitt eine Invariante des Typus

$$(7) \qquad \begin{aligned} &(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2 = \\ &= (135)(612)(234)(456) - (246)(123)(345)(561) \end{aligned}$$

verschwindet. Diese Formel stellt die Bedingung für sechs Punkte eines Kegelschnitts rein dar; es müssen daher alle ähnlich gebildeten Ausdrücke, die man durch Vertauschung der sechs Punkte erhält, mit ihr bis auf Zahlenfactoren übereinstimmen. In der That ist z. B.

$$\begin{aligned} &(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2 + (2\,1\,3\,4\,5\,6)^2 = \\ &= (612)(456)\,[(135)(234) - (235)(134)] \\ &- (123)(345)\,[(246)(561) - (146)(562)] = \\ &= (612)(456)(123)(354) - (123)(345)(612)(456) = 0, \end{aligned}$$

vermöge der Relationen Γ_{ij} (Nr. 5); und da bei einer cyclischen Vertauschung der sechs Punkte die Invariante (7) ihr Zeichen wechselt, so folgt, dass unsere Invariante bei jeder ungeraden Vertauschung der sechs Punkte in den entgegengesetzten Werth übergeht und sich also bei den geraden Vertauschungen überhaupt nicht ändert[1]).

Die im vorigen § gefundene Invariante B muss nun, bis auf einen Zahlenfactor, gleich dem Quadrat der Invariante (7) sein.

1) Diese Invariante hat schon eine ganze Litteratur: Reiss, Math. Ann. Bd. 2 (1870), S. 397; Hunyady, Crelle's Journal Bd. 83 (1877), S. 76; Mertens, ebenda Bd. 84, S. 355; Pasch, Bd. 89, S. 247; Caspary, Bd. 92, S. 123; Hunyady, Bd. 92, S. 307. Die symbolische Rechnungsweise verlangt die Bezeichnung $(1\,2\,3\,4\,5\,6)^2$ statt $(1\,2\,3\,4\,5\,6)$.

Dies durch Rechnung vermöge der Identitäten A_{ij} und Γ_{ij} nachzuweisen, scheint umständlich: wir werden uns daher begnügen, den fraglichen Factor aus einem besonderen Fall abzuleiten, indem wir etwa

$$(2) = (3) + (5)\,, \quad (4) = (5) + (1)\,, \quad (6) = (1) + (3)$$

setzen. Der Factor findet sich dann gleich Eins. Mit der dies ausdrückenden Formel mögen wir noch eine formale Umgestaltung vornehmen. Setzen wir nämlich zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} a &= (i\varkappa\lambda)(i\mu\nu)\,, & b &= (i\varkappa\mu)(i\nu\lambda)\,, & c &= (i\varkappa\nu)(i\lambda\mu)\,, \\ \alpha &= (j\varkappa\lambda)(j\mu\nu)\,, & \beta &= (j\varkappa\mu)(j\nu\lambda)\,, & \gamma &= (j\varkappa\nu)(j\lambda\mu)\,, \end{aligned}$$

so wird vermöge der Formeln Γ_{ij}:

$$a + b + c = 0\,, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0\,,$$

und

$$[(1\;2\;3\;4\;5\;6)^2]^2 = B =$$

$$(8) \quad \begin{aligned} &= a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 - 2bc\beta\gamma - 2ca\gamma\alpha - 2ab\alpha\beta \\ &= \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)\,. \end{aligned}$$

Wir sehen also:

Das Quadrat der alternirenden Invariante von sechs Punkten lässt sich ausdrücken durch die Quadrate der Invarianten von je dreien.

Für uns ist noch eine andere Eigenschaft der alternirenden Invariante von sechs Punkten von Bedeutung, die wir nun auch gleich entwickeln wollen. Wir können nämlich, indem wir den Ausdruck $(1\;2\;3\;4\;5\;6)^2$ als die symbolische Darstellung der alternirenden Invariante von sechs Curven 2. Classe auffassen, mit ihrer Hülfe die lineare Identität aufstellen, die zwischen irgend sieben ternären Formen 2. Classe $(u0)^2$, $(u1)^2 \ldots (u6)^2$ besteht: Die fragliche Formel lautet, wie unschwer zu beweisen,

$$(9) \quad \begin{aligned} &(1\;2\;3\;4\;5\;6)^2(u0)^2 + (2\;3\;4\;5\;6\;0)^2(u1)^2 + \cdots \\ &\cdots + (6\;0\;1\;2\;3\;4)^2(u5)^2 + (0\;1\;2\;3\;4\;5)^2(u6)^2 = 0\,, \end{aligned}$$

oder, in etwas anderer Schreibart,

$$(9^b) \quad \begin{aligned} &(1\;2\;3\;4\;5\;6)^2(u0)^2 = (0\;2\;3\;4\;5\;6)^2(u1)^2 + \\ &+ (1\;0\;3\;4\;5\;6)^2(u2)^2 + \cdots + (1\;2\;3\;4\;5\;0)^2(u6)^2\,. \end{aligned}$$

Verschwindet die Invariante $(1\;2\;3\;4\;5\;6)$, so erhält man den analytischen Ausdruck der linearen Abhängigkeit zwischen

sechs Curven 2. Classe, die zu einer und derselben Curve 2. O. conjugirt sind, allerdings behaftet mit den Coefficienten einer willkürlichen Curve 2. Classe $(u0)^2$. Diesen letzten Umstand mag man als einen Uebelstand empfinden; er lässt sich indessen nicht vermeiden, wenn man nicht den Grad der Formel in $(u1)^2 \ldots (u6)^2$ erhöhen, d. h. fremde Factoren einführen will. Nehmen wir 0 ... 6 insbesondere als Punkte, so erkennen wir sofort:

Wenn die Punkte 1 ... 6 auf einer Curve 2. O. liegen, so werden die beiden in Bezug auf den Punkt 0 und die Linie u quadratischen Formen

$$(10)\quad \begin{array}{l} (0\,2\,3\,4\,5\,6)^2(u1)^2 + (0\,1\,2\,4\,5\,6)^2(u3)^2 + (0\,1\,2\,3\,4\,6)^2(u5)^2, \\ (0\,1\,3\,4\,5\,6)^2(u2)^2 + (0\,1\,2\,3\,5\,6)^2(u4)^2 + (0\,1\,2\,3\,4\,5)^2(u6)^2 \end{array}$$

einander gleich, und ausserdem reducibel. Der durch Nullsetzen der Ausdrücke (10) definirte Connex (2, 2) zerfällt nämlich in die Curve 2. O. durch die Punkte 1 ... 6 und die Curve 2. Classe, von der 135 und 246 zwei Poldreiecke sind.

Nehmen wir an, dass der Punkt 0 nicht auf der C^2 durch die Punkte 1 ... 6 liegt, so haben wir also auf die einfachste überhaupt mögliche Weise jene Curve 2. Classe bestimmt. Zugleich zeigt unsere Formel, dass die lineare Invariante des Connexes (2, 2), und also auch die bilineare Invariante der Curve 2. O. und der Curve 2. Classe verschwindet.

Dass zwischen den Quadraten von sechs linearen Formen, deren Nullpunkte auf einem Kegelschnitt liegen, eine lineare Identität bestehen muss, und dass diese Identität zugleich die Curve 2. Classe liefert, die zwei einer Curve 2. O. eingeschriebene Dreiecke zu Poldreiecken hat, ist oft bemerkt worden (zuerst wohl von P. Serret in einer Géométrie de direction); die obigen Ausdrücke für die Coefficienten jener Identität scheinen aber übersehen worden zu sein.

5.

Zweiter Beweis und schärfere Fassung des Hesse'schen Satzes.

Zu einem neuen Beweis, und zu einer tieferen Einsicht in das Wesen des Hesse'schen Satzes gelangen wir, wenn wir an die letzten Betrachtungen des § 4 anknüpfen. Die beiden Poldreiecke 135 und 246 der Curve 2. Classe Nr. (10) bestimmen näm-

lich, auf irrationale Weise, ein System von sechzehn orthogonalen Substitutionen: Wählt man zwei Systeme von projectiven Coordinaten so, dass die quadratische Form (10) in beiden als Summe von drei reinen Quadraten erscheint, so hängen die Coordinaten einer beliebigen Geraden in beiden Coordinatensystemen durch eine orthogonale Substitution zusammen; und solcher Substitutionen giebt es sechzehn, wenn man die uneigentlichen bei Seite lässt, da man dann in jedem Coordinatensystem noch eine Gruppe von vier Zeichenwechseln zur Verfügung hat.

Um diesen Gedanken auszuführen, müssen wir noch die Covariante und die Invariante der quadratischen Form Nr. (10), oder, wie wir nun kürzer schreiben wollen, der Form

$$(10^b) \qquad (U\mathfrak{A})^2 = \begin{cases} = k_1 (u1)^2 + k_3 (u3)^2 + k_5 (u5)^2 \\ = k_2 (u2)^2 + k_4 (u4)^2 + k_6 (u6)^2 \end{cases}$$

bilden:

$$(11) \qquad \begin{aligned} (LX)^2 &= \tfrac{1}{2} (\mathfrak{A}\mathfrak{A}'X)^2 = \\ &= k_3 k_5 (35x)^2 + k_5 k_1 (51x)^2 + k_1 k_3 (13x)^2 \\ &= k_4 k_6 (46x)^2 + k_6 k_2 (62x)^2 + k_2 k_4 (24x)^2 \end{aligned}$$

und

$$(12) \qquad J = \tfrac{1}{3} (L\mathfrak{A})^2 = k_1 k_3 k_5 (135)^2 = k_2 k_4 k_6 (246)^2 .$$

Wir benutzen nun die Identität (12) zur Erklärung einer Abhängigkeit zwischen gewissen Quadratwurzeln, indem wir festsetzen, dass

$$(13) \qquad \sqrt{J} = \sqrt{k_1}\,\sqrt{k_3}\,\sqrt{k_5}\,(135) = \sqrt{k_2}\,\sqrt{k_4}\,\sqrt{k_6}\,(246)$$

sein soll. Setzen wir dann

$$(14) \qquad (i'u) = \sqrt{k_i}\,.\,(iu) \qquad (i = 1, 2, .. 6),$$

so wird

$$(15) \qquad \begin{aligned} (U\mathfrak{A})^2 &= (1'u)^2 + (3'u)^2 + (5'u)^2 , \\ (U\mathfrak{A})^2 &= (2'u)^2 + (4'u)^2 + (6'u)^2 . \end{aligned}$$

Die Grössen $(i'u)$, die nichts Anderes sind, als die projectiven Liniencoordinaten in den Coordinatensystemen 1′, 3′, 5′ und 2′, 4′, 6′, hängen also durch eine orthogonale Substitution zusammen:

$$(16) \qquad \begin{aligned} (2'u) &= c_{21} (1'u) + c_{23} (3'u) + c_{25} (5'u) , \\ (4'u) &= c_{41} (1'u) + c_{43} (3'u) + c_{45} (5'u) , \\ (6'u) &= c_{61} (1'u) + c_{63} (3'u) + c_{65} (5'u) . \end{aligned}$$

Die Grössen $c_{i\varkappa}$ lassen sich ohne Weiteres bestimmen: Es ist z. B.

$$c_{21} = \frac{(2'3'5')}{(1'3'5')} = \frac{(1'4'6')}{(2'4'6')} \quad \text{u. s. f.,} \tag{17}$$

wobei nach Formel (13):

$$(1'3'5') = (2'4'6'),\ \text{und also}\ (2'3'5') = (1'4'6')\ \text{u. s. w.} \tag{13^b}$$

Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Sechs Punkten, die auf einem irreducibelen Kegelschnitt liegen, kann man immer (und zwar im Ganzen auf $2^4 . 6!$ Arten) ternäre lineare Formen (deren Nullpunkte sie sind) so zuordnen, dass die Summe der Quadrate von irgend dreien dieser Formen gleich der Summe der Quadrate der drei übrigen wird, und dass ferner die zwanzig Invarianten von je drei der linearen Formen paarweise einander gleich, und überdies Coefficienten einer (eigentlichen) orthogonalen Substitution werden.

Dazu ist nöthig das Ausziehen von vier neben einander stehenden Quadratwurzeln.

Unsere jetzige Formulirung hat vor der früheren (§ 3) den Vorzug, dass sie jede Erörterung über das Vorzeichen der Wurzeln $\sqrt{(135)\ (246)}$ u. s. w. entbehrlich macht: unsere Formeln liefern ganz von selbst die richtigen Wurzelwerthe.

Es sind also jetzt auch die Relationen zwischen den Producten der Substitutionscoefficienten in eine einzige Formel zusammengefasst:

$$(\lambda'\mu'i')(\varkappa'i'j') + (\mu'\varkappa'i')(\lambda'i'j') + (\varkappa'\lambda'i')(\mu'i'j') = 0\,. \tag{5^b}$$

Dass man nur vier und nicht fünf unabhängige Wurzeln hat, geht daraus hervor, dass in die Ausdrücke $c_{i\varkappa}$ nur die Verhältnisse der in Nr. (13) erklärten Wurzelwerthe eintreten.

Eine mehr symmetrische Formulirung erhalten wir natürlich, wenn wir die Formen $(i'u)$ so erklären, dass die Summe ihrer Quadrate Null wird. (Vgl. § 6.)

Unser Satz ist einer einfachen geometrischen Deutung fähig. Wir können nämlich die Curve $(U\mathcal{A})^2 = 0$ mit dem sogenannten unendlich fernen Kugelkreis identificiren; die Formen $(i'0)$ werden dann durch unter einander gleichlange Strecken dargestellt, die von irgend einem Punkte aus in den positiven Richtungen

zweier gleichartig orientirter Coordinatenkreuze gezogen sind. Die Invariante $(\varkappa'\lambda'\mu')$ bedeutet den Rauminhalt des Parallelepipedons, das durch die Strecken $\varkappa', \lambda', \mu'$ bestimmt ist, oder das »äussere Product« dieser Strecken. Diese Rauminhalte sind in der That paarweise gleich, und sie sind die Coefficienten der orthogonalen Substitution, die den Uebergang von einem Coordinatensystem zum anderen vermittelt, in homogener Schreibart.

Wir haben bisher angenommen, das die Invariante J nicht verschwindet. Das Gegentheil tritt, so lange die Punkte 1 ... 6 getrennt bleiben, nur dann ein, wenn vier von den sechs Punkten in einer Geraden liegen, oder wenn sich die Punkte 1, 3, 5 und 2, 4, 6 auf zwei Gerade vertheilen. Diese Fälle machen besondere Formulirungen nothwendig, bieten aber keine besondere Schwierigkeit.

6.

Die binäre Form 6. Ordnung.

Das Resultat des vorigen § vereinfacht sich noch etwas, wenn wir nunmehr vermöge des Hesse'schen Uebertragungsprincips in das binäre Gebiet des Kegelschnittes übertreten, der das betrachtete Sechseck enthält. Es wird nämlich dann der in unseren Formeln benutzte Hülfspunkt 0 überflüssig. In der That mögen wir bemerken, dass wir in der Formel (10) statt der zu dem Punkte 0 gehörigen linearen Form auch irgend eine Form 2. Classe hätten benutzen können, die nicht conjugirt ist zu den Formen 2. O., die für die Punkte 1 ... 6 verschwinden, oder anders ausgedrückt, die von den zu 1 ... 6 gehörigen speciellen Formen 2. Classe linear-unabhängig ist. Diese Bedingung ist erfüllt durch die Umhüllungsform der genannten Curve 2. O. Wir werden also beim Uebergang zum binären Gebiet das willkürliche Element 0 zum Verschwinden bringen können.

Die Durchführung der hiermit angezeigten Rechnung, die nicht ohne Interesse ist, wollen wir auf eine andere Gelegenheit verschieben. Wir begnügen uns, das Resultat anzugeben, das man voraussehen und nachträglich leicht durch einfache Rechnungen bestätigen kann. Wir geben zur Abwechslung die symmetrische Formulirung, die sich innerhalb einer allgemeinen Theorie der binären Formen 6. O. als die zweckmässigste erweisen wird. Wir bezeichnen dabei, zur Unterscheidung von den bisher verwendeten Abkürzungen, die simultanen Invarianten

binärer linearer Formen durch scharfe Klammern, wobei noch zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}[\varkappa\lambda][\lambda\mu][\varkappa\mu] = [\varkappa\lambda\mu]$$

gesetzt werden mag.

Es seien 1 ... 6 *irgend welche sechs Punkte des binären Gebietes, und es möge*

$$(18)\quad \pi_1 = [12][13]\cdots[16],\ \cdots,\ \pi_6 = [61][62]\cdots[65]$$

gesetzt werden. Erklären wir dann eine Abhängigkeit zwischen den sechs Quadratwurzeln $\sqrt{\pi_\varkappa}$ *durch die Formel*

$$(19)\quad \sqrt{\pi_1}\sqrt{\pi_2}\sqrt{\pi_3}\sqrt{\pi_4}\sqrt{\pi_5}\sqrt{\pi_6} = \sqrt{-1}\cdot\Pi[i\varkappa]\ \left(\begin{matrix} i = 1\ldots 5 \\ \varkappa = i+1\ldots 6\end{matrix}\right),$$

so sind

$$(20)\qquad [i'l]^2 = \frac{[il]^2}{\sqrt{\pi_i}}\qquad (i = 1\ldots 6)$$

die Ausdrücke gewisser quadratischer Formen von verschwindender Discriminante, mit den Nullpunkten 1 ... 6.

Die Summe der Quadrate dieser Formen verschwindet identisch:

$$(21)\qquad \sum [i'l]^4 = 0\qquad (i = 1\ldots 6).$$

Zugleich wird das Grössensystem

$$(22^a)\qquad \begin{matrix} & -[1'3'5'], & \\ [1'4'6'], & [3'4'6'], & [5'4'6'], \\ [2'1'6'], & [2'3'6'], & [2'5'6'], \\ [2'4'1'], & [2'4'3'], & [2'4'5'] \end{matrix}$$

identisch mit dem Grössensystem

$$(22^b)\qquad \begin{matrix} & -\sqrt{-1}\,[2'4'6'], & \\ \sqrt{-1}\,[2'3'5'], & \sqrt{-1}\,[1'2'5'], & \sqrt{-1}\,[1'3'2'], \\ \sqrt{-1}\,[4'3'5'], & \sqrt{-1}\,[1'4'5'], & \sqrt{-1}\,[1'3'4'], \\ \sqrt{-1}\,[6'3'5'], & \sqrt{-1}\,[1'6'5'], & \sqrt{-1}\,[1'3'6'], \end{matrix}$$

und bildet, in dieser Anordnung, das System der Coefficienten einer (eigentlichen) orthogonalen Substitution [1]).

1) Wenn die Quadratwurzeln $\sqrt{[ik]}$ als rational bekannt gelten, so lässt sich die Regel über die Vorzeichen der Wurzeln $\sqrt{\pi_k}$ auch so aus-

Die Zahl der wesentlich verschiedenen Systeme von Formen $[i'l]^2$ ist 2^4. Es ist nämlich ein simultaner Zeichenwechsel aller Grössen $\sqrt{\pi_x}$ ohne Einfluss auf das Resultat, und ebenso der Zeichenwechsel von $\sqrt{\pi_2}$, $\sqrt{\pi_4}$, $\sqrt{\pi_6}$ verbunden mit dem von $\sqrt{-1}$. Man wird sich natürlich für einen bestimmten Werth der vierten Einheitswurzel entscheiden, der für alle 6! Anordnungen derselbe bleibt. Die Substitutionsgruppe der Grössen $\sqrt{\pi_x}$ besteht dann aus den geraden Vertauschungen, verbunden mit 16 »verschiedenen« Vorzeichenwechseln einer geraden Anzahl unter ihnen, und den ungeraden Vertauschungen, diese verbunden mit den 16 Vorzeichenwechseln einer ungeraden Anzahl.

Die einfache Gestalt des obigen Satzes beruht auf einer doppelten Verwendung homogener Grössen, darauf nämlich, dass wir sowohl die Veränderlichen des binären Gebietes, als auch die Substitutionscoefficienten homogen geschrieben haben. Verzichtet man auf Beides, so erhält man mehrere (vier) weniger einfache Formulirungen, darunter die von Hesse angegebene[1]). Da die Grössen $[i'l]^4$ bis auf einen allen gemeinsamen Factor durch die sechs Punkte völlig bestimmt sind, so können sie als *irrationale Covarianten einer binären Form 6. Ordnung* angesehen und in dem System dieser Form als Wurzeln einer gewissen Gleichung 6. Grades definirt werden. Ihre Quadratwurzeln — die quadratischen Formen $[i'l]^2$ — spielen in der Theorie der Formen 6. Ordnung genau dieselbe Rolle, wie die vom Verfasser definirten und näher untersuchten irrationalen linearen Covarianten in der Theorie der binären Formen 4. O.[2]). Freilich sind in unserem jetzigen Falle die Verhältnisse schon sehr viel verwickelter; die wirkliche Aufstellung der erwähnten Gleichung 6. Grades wird nicht ohne einen ziemlichen Aufwand von Rechnung zu leisten sein.

---

drücken: Man setze $\sqrt{\pi_1} = \sqrt{[12]}\sqrt{[13]}\ldots\sqrt{[16]}$, u. s. w. und erkläre allgemein $\sqrt{[ki]}$, wenn $i<k$, durch $-\sqrt{-1}\sqrt{[ik]}$ $(i=1\ldots5,\ k=i+1\ldots6)$. Die hiervon abweichende Regel, die sich bei Reichardt findet (S. 387, Anmerkung), scheint mir nicht recht verständlich zu sein.

1) Hesse in Crelle's Journal, Bd. 68 (1864), S. 248. Hesse hebt die Abhängigkeit zwischen den Wurzeln $\sqrt{\pi_k}$ nicht hervor, und er trennt daher auch die eigentlichen Substitutionen nicht von den uneigentlichen.

2) Am. Journal, Vol. 17 (1895), p. 187—284.

Ein Theil vom Inhalte des obigen Theorems kann, nach einem Satze des Verfassers[1]), noch in einer anderen Form ausgedrückt werden, nämlich, mit besonderer Rücksicht auf den Fall reeller Punkte 1 ... 6, etwa so:

Setzt man, im System von irgend sechs binären linearen Formen $[i\,t]$,

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{J}_1 &= [12][13][14][15][16], & \mathfrak{J}_2 &= [12][23][24][25][26],\\
\mathfrak{J}_3 &= [13][23][34][35][36], & \mathfrak{J}_4 &= [14][24][34][45][46],\\
\mathfrak{J}_5 &= [15][25][35][45][56], & \mathfrak{J}_6 &= [16][26][36][46][56],
\end{aligned}
$$

so sind die Ausdrücke

$$
(24^a)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{[13][34]\sqrt{\mathfrak{J}_6}}{[16][46]\sqrt{\mathfrak{J}_3}} = \frac{[26][56]\sqrt{\mathfrak{J}_3}}{[23][35]\sqrt{\mathfrak{J}_6}},\\
&\frac{[35][56]\sqrt{\mathfrak{J}_2}}{[23][26]\sqrt{\mathfrak{J}_5}} = \frac{[12][24]\sqrt{\mathfrak{J}_5}}{[15][45]\sqrt{\mathfrak{J}_2}},\\
&\frac{[12][15]\sqrt{\mathfrak{J}_4}}{[24][45]\sqrt{\mathfrak{J}_1}} = \frac{[34][46]\sqrt{\mathfrak{J}_1}}{[13][16]\sqrt{\mathfrak{J}_4}}
\end{aligned}
$$

die Cosinus der Seiten, und die Ausdrücke

$$
(24^b)\qquad
\begin{aligned}
&-\frac{[15][56]\sqrt{\mathfrak{J}_4}}{[14][46]\sqrt{\mathfrak{J}_5}} = -\frac{[24][34]\sqrt{\mathfrak{J}_5}}{[25][35]\sqrt{\mathfrak{J}_4}},\\
&-\frac{[12][13]\sqrt{\mathfrak{J}_6}}{[26][36]\sqrt{\mathfrak{J}_1}} = -\frac{[46][56]\sqrt{\mathfrak{J}_1}}{[14][15]\sqrt{\mathfrak{J}_6}},\\
&-\frac{[34][35]\sqrt{\mathfrak{J}_2}}{[24][25]\sqrt{\mathfrak{J}_3}} = -\frac{[12][26]\sqrt{\mathfrak{J}_3}}{[13][36]\sqrt{\mathfrak{J}_2}}
\end{aligned}
$$

die Cosinus der entsprechenden Winkel eines sphärischen Dreiecks.

Die Abhängigkeit zwischen den Wurzeln $\sqrt{\mathfrak{J}_i}$ wird man am Besten durch die Gleichung

$$
(25)\qquad \Pi\sqrt{\mathfrak{J}_j} = \Pi\,[i\,k] \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \ldots 5 \\ k = i+1 \ldots 6 \end{pmatrix}
$$

erklären; doch ist die specielle Vorzeichenbestimmung zur Geltung *dieses* Satzes nicht nothwendig. Die Beziehung zwischen

---

1) Trigonometrie II, § 6 (S. 134).

den Grössen $\sqrt{\pi_i}$ und $\sqrt{\mathfrak{F}_i}$ wird am einfachsten erklärt durch die Gleichungen

$$(26) \quad \sqrt{\pi_i}=\sqrt{\mathfrak{F}_i} \;(i=1,3,5), \quad \sqrt{\pi_i}=-\sqrt{-1}\sqrt{\mathfrak{F}_i} \;(i=2,4,6).$$

Wir haben schliesslich, um unsere Untersuchung zum Abschluss zu bringen, nur noch die Frage zu erledigen, wie man das Sechseck finden kann, wenn die zugehörige orthogonale Substitution gegeben ist. Es kann sich dabei natürlich nur um die Auffindung der Doppelverhältnisse oder Würfe handeln, die je vier von den sechs Punkten mit einander bilden. Diese lassen sich aber sofort angeben; es ist z. B.

$$(27^a) \qquad \frac{[35][46]}{[34][56]}=\frac{[135][146]}{[134][156]}=\frac{[235][246]}{[234][256]},$$

oder, was dasselbe ist,

$$(27^b) \qquad \frac{[35][46]}{[34][56]}=\frac{(135)(146)}{(134)(156)}=\frac{(235)(246)}{(234)(256)}.$$

Hier hat man nur die Zahlen rechter Hand mit Accenten zu versehen, und dann ihre Werthe etwa aus Nr. (22) einzutragen.

Die aus den sechs Punkten zu bildenden Doppelverhältnisse sind also gewisse Doppelquotienten der Coefficienten der zugehörigen orthogonalen Substitution.

Man kann dieser letzten Betrachtung noch eine etwas andere Wendung geben, derart, dass sie das Frühere nicht voraussetzt, und so einen *dritten Beweis* des Hesse'schen Satzes liefert. Wir berechnen nämlich einfach die Doppelverhältnisse, die zu solchen sechs Punkten der Kummer'schen Configuration gehören, die in einer Ebene liegen; wobei wir uns die »Kummer'sche Configuration«, ohne irgend welche weitere Voraussetzungen zu machen, aus beliebigen Coordinatenverhältnissen $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ durch die bekannten Vorzeichenwechsel und Vertauschungen erzeugt denken. Ein solches System von sechs Punkten können wir der Tabelle Nr. (3) der mehrfach erwähnten Abhandlung (Sächs. Ber. 1892, S. 134) entnehmen. Indem wir jedesmal die Coordinate x_0' weglassen, d. h. die Figur auf die zugehörige Coordinatenebene projiciren, erhalten wir ein ebenes Sechseck mit den folgenden Coordinatenwerthen:

	1	3	5	2	4	6
$x_1' =$	x_0	x_3	$-x_2$	x_0	$-x_3$	x_2
$x_2' =$	$-x_3$	x_0	x_1	$-x_3$	x_0	x_1
$x_3' =$	x_2	$-x_1$	x_0	x_2	$-x_1$	x_0

Berechnen wir nun die Invarianten von je dreien dieser Punkte, so findet sich

$$(135) = (246) = x_0 \cdot a_{00},$$

$$(235)=(146)=x_0 \cdot a_{11},\ (125)=(346)=x_0 \cdot a_{12},\ (132)=(546)=x_0 \cdot a_{13},$$
$$(435)=(216)=x_0 \cdot a_{21},\ (145)=(236)=x_0 \cdot a_{22},\ (134)=(256)=x_0 \cdot a_{23},$$
$$(635)=(241)=x_0 \cdot a_{31},\ (165)=(243)=x_0 \cdot a_{32},\ (136)=(245)=x_0 \cdot a_{33}.$$

Diese Formeln erfüllen identisch die Bedingung dafür, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, und sie liefern ohne Weiteres den Hesse'schen Satz. Zugleich enthalten sie einen von liniengeometrischen Betrachtungen unabhängigen Beweis für die Haupteigenschaft der Kummer'schen Configuration.

Sollte x_0 verschwinden, so wird die Ableitung illusorisch. Man kommt aber dann durch Projection aus einer anderen Ecke des Coordinatentetraeders zu demselben Ergebniss. Es ist gewiss merkwürdig, dass die 4 . 20 dreireihigen Determinanten, die man der Matrix der Coordinaten von sechs derselben Ebene angehörigen Punkten der Kummer'schen Configuration entnehmen kann, alle reducibel und paarweise gleich den 40 Producten $x_j \cdot a_{ik}$ sind.

Bonn, 30. October 1895.

II. Bemerkungen zur Trigonometrie.

In einer Dissertation der Universität Göttingen hat Frl. Grace Chisholm u. A. einen Theil der Untersuchungen des Verfassers über Trigonometrie neu dargestellt, indem sie an Stelle des vom Speciellen zum Allgemeinen fortschreitenden Entwickelungsgangs eine mehr deductive Darstellungsweise setzt[1]). Es werden dadurch und durch die etwas weiter ausgebildete Terminologie vielleicht einige Punkte leichter verständlich gemacht. Doch dürfte die Arbeit auch geeignet sein, Missverständnisse hervorzurufen, namentlich weil die Verfasserin nicht deutlich gesagt hat, inwiefern sie zu von den meinigen abweichenden Ergebnissen gekommen zu sein glaubt. Ich bin Frl. Chisholm zu Dank verpflichtet dafür, dass sie mich auf das nachher zu besprechende Versehen aufmerksam gemacht hat; den Worten ihrer Vorrede gegenüber muss ich aber darauf bestehen, dass abgesehen von der »Verzerrungsgruppe« (die bei mir überhaupt nicht vorkommt) die Sätze im ersten Theil ihrer Dissertation mit derselben Schärfe und in wesentlichen Stücken mit grösserer Vollständigkeit von mir ausgesprochen und bewiesen worden sind, auch in gruppentheoretischer Hinsicht; die Ergänzungen, die nöthig gewesen sein sollen, beziehen sich, soviel ich sehe, nur auf vermeintliche Lücken. — Es wird vielleicht ganz nützlich sein, wenigstens die Punkte nochmals zu besprechen, in denen eine Schwierigkeit zu liegen scheint.

Für den *Begriff des reellen Dreiecks*, wie er meiner Untersuchung zu Grunde liegt, ist wesentlich die Annahme positiver Richtungen der Seiten und die Orientirung der Kugel, die Fest-

---

1) Algebraisch-gruppentheoretische Untersuchungen zur sphärischen Trigonometrie. Göttingen 1895. — Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen. Abhandlungen der K. S. G. d. W Bd. 20, Nr. 8 (Leipzig 1893, bei S. Hirzel). Die Citate »Trig.« beziehen sich auf die letztgenannte Arbeit.

setzung eines gemeinsamen positiven Drehungssinnes aller Winkel (Trig. S. 91). Vermöge dieser Bestimmungen entspricht jedem Dreieck auf der Kugel ein völlig bestimmtes »abstractes Dreieck«, ein System von sechs Grössen a_i, α_i, den »Seiten« und »Winkeln« des Dreiecks. Da es zwei gleichberechtigte Orientirungen der Kugel giebt, so entsteht auf diese Art jedes abstracte Dreieck zweimal: Zu jedem System von sechs Zahlen a_i, α_i gehören natürlich zwei Figuren, die *auf entgegengesetzt orientirten Kugeln* symmetrisch liegen. Da diese Figuren analytisch nicht zu unterscheiden sind, so werden sie zweckmässiger Weise auch geometrisch nicht getrennt. Ich erkläre sie deshalb für »identisch« (Trig. S. 92). Dieses Verfahren wird manchen Geometer vielleicht etwas fremdartig anmuthen; in der Gruppentheorie aber ist Derartiges nicht ungewöhnlich: die Bestimmung hat den Zweck, die Correspondenz (1,2) zwischen abstractem Dreieck und Figur auf eine Correspondenz (1,1) herabzusetzen. Offenbar lässt sich dies auch auf andere Weise erreichen, indem man nämlich eine der beiden Orientirungen ganz ausschliesst, und, mit etwas gewaltsamem Sprachgebrauch, überhaupt nur die eine der beiden zusammengehörigen Figuren ein »Dreieck« nennt. Im Grunde kommen beide Bestimmungen natürlich auf Dasselbe hinaus; es ist daher auch nicht zu verwundern, dass Frl. Chisholm, die sich der zweiten bedient, keine anderen Gruppen findet, als die von mir angegebenen.

Um zum *Begriff des complexen Dreiecks*, des Dreiecks mit complexen Seiten und Winkeln a_i, α_i zu gelangen, ist das Nächstliegende, die Mannigfaltigkeit der reellen Dreiecke analytisch fortzusetzen. Frl. Chisholm bleibt auch dabei stehen. Wenn man sich aber bestrebt, beim Aufbau der analytischen Trigonometrie aus der Geometrie nur das Nothwendigste zu entlehnen, so wird man (auf Grund der Untersuchung Trig. II, § 1) dazu geführt, als ein allgemeines Dreieck überhaupt ein jedes System von sechs reellen oder complexen Grössen a_i, α_i anzusehen, die den sechs Gleichungen des Cosinussatzes genügen. Nun kommt man zwar bei dieser Definition zu keinen allgemeineren Grössensystemen a_i, α_i als bei der vorhergehenden; das ist aber nicht von vornherein klar, sondern es muss bewiesen werden. Es besteht also zwischen den beiden Definitionen kein materieller, aber doch ein wohl zu beachtender begrifflicher Unterschied; die erste ist die (logisch) *engere*.

Dieser Umstand ist wohl zu beachten bei der Auffassung der folgenden *Continuitätssätze*:

I. *Die Mannigfaltigkeit aller complexen Dreiecke besteht aus zwei verschiedenen irreducibelen Mannigfaltigkeiten, zwischen denen kein stetiger Uebergang möglich ist, der »eigentlichen« und der »uneigentlichen« Mannigfaltigkeit.*

II. *Jede dieser Theilmannigfaltigkeiten hat nur einen reellen Zug.*

Oder, in etwas anderer Gliederung:

1) *Es giebt zwei und nicht mehr continuirlich zusammenhängende Mannigfaltigkeiten reeller Dreiecke* (Trig. S. 111).

2) *Diese sind völlig getrennt, und sie bleiben es auch dann noch, wenn man sie ins complexe Gebiet fortsetzt* (Trig. S. 111).

3) *Es giebt keine Mannigfaltigkeiten complexer Dreiecke ausser den unter 2) genannten* (Trig. S. 129), *also keine Mannigfaltigkeiten ohne reelle Züge.*

Frl. Chisholm scheint zu glauben, dass die Sätze 1) und 2) bei mir nicht vollständig bewiesen seien. Es müssen hier Missverständnisse vorliegen. Jedenfalls ist ihr Beweis für den Satz 1) vollkommen identisch mit dem meinigen, der sich überhaupt nicht viel wird abändern lassen. Den Satz 2) habe ich allerdings nicht ausdrücklich bewiesen, sondern ich habe ihn (Trig. S. 111) als »*selbstverständlich*« hingestellt. Ich habe aber natürlich nicht sagen wollen, dass der Satz überhaupt keines Beweises bedürfe, sondern nur, dass ein ganz einfacher Beweis nahe liegt. In der That, wäre ein stetiger Uebergang zwischen beiden Mannigfaltigkeiten möglich, so müssten in den Delambre-schen Gleichungen die oberen und die unteren Vorzeichen für endliche Argumente zusammen bestehen können; es müssten also z. B. die folgenden vier Gleichungen mit einander verträglich sein:

$$\cos\frac{a_1}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}=0\,,\qquad \sin\frac{a_1}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}=0\,,$$

$$\cos\frac{a_1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}=0\,,\qquad \sin\frac{a_1}{2}\cdot\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}=0\,,$$

was ein offenbarer Widersinn ist.

Eher noch hätte man vielleicht darin eine Lücke finden können, dass die Irreducibilität der complexen eigentlichen Mannig-

faltigkeit nicht ausdrücklich bewiesen wird; doch ist auch dieses Bedenken im Augenblicke zu erledigen[1]).

Der Satz Nr. 3) endlich fehlt bei Frl. Chisholm ganz, eben zufolge ihrer abweichenden Definition der complexen Dreiecke. Allerdings sind wichtiger die beiden Sätze 1) und 2); aber ganz nebensächlich ist die Frage nach den *algebraisch* möglichen Vorzeichencombinationen in den Delambre'schen Formeln wohl nicht. Ich kann daher, im Gegensatz zu Frl. Chisholm, die übliche Behandlung des Gegenstandes, wie man sie »in irgend einem Lehrbuche« findet, als sachgemäss nicht anerkennen (Trig. S. 128 Anmerkung), wenigstens nicht in einer systematischen Bearbeitung der Trigonometrie. Diese Methode ist ja für die Zwecke der Astronomie und Geodäsie ausreichend, sie ist aber nicht algebraisch und sie führt nicht zum Beweise des Satzes 3).

Die Trennung der eigentlichen und uneigentlichen Dreiecke kommt, nach Frl. Chisholm's interessantem Citat aus der Theoria Motus (Liber I, Sect. II, § 54) schon bei Gauss vor. Vielleicht bringt uns Gauss' der Welt noch immer vorenthaltener Nachlass noch einmal Aufschluss darüber, ob Gauss seine Untersuchungen auch auf die Continuitätsfragen ausgedehnt hat.

Die Ungleichungen für die Typen nicht construirbarer Dreiecke sind, zufolge eines mir selbst unbegreiflichen Irrthums, in meiner Trigonometrie auf S. 96 nicht richtig, nämlich unvollständig angegeben, während auf S. 160, wo ich auf den Gegenstand zurückkomme, die richtigen Formeln angeführt werden. Die fraglichen Ungleichungen für die Typen B_{ik} lauten danach:

	B_{00}	B_{01}	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}
a_1	$\leqq \pi$	$\leqq \pi$	$\leqq \pi$	$\leqq \pi$	$\geqq 0$	$\geqq 0$
a_2	$\leqq \pi$	$\geqq 0$	$\leqq 2\pi$	$\geqq \pi$	$\leqq 2\pi$	$\geqq \pi$
a_3	$\leqq \pi$	$\geqq 0$	$\leqq 2\pi$	$\geqq \pi$	$\geqq \pi$	$\leqq 2\pi$
	$s_0 \leqq 0$	$s_1 \leqq 0$	$s_0 \leqq -\pi$	$s_1 \leqq \pi$	$s_2 \leqq 0$	$s_3 \leqq 0$

, u. s. w.,

---

1) Wenn nämlich für zwei in den Seiten übereinstimmende complexe Dreiecke die oberen Vorzeichen der Delambre'schen Formeln gelten

während die entsprechenden Ungleichungen für die Typen B'_{ik} aus diesen durch die Substitution $a'_j = 2\pi - a_j$ hervorgehen. Diese Ungleichungen ziehen die Ungleichungen $0 \leqq a_j \leqq 2\pi$, und die Ungleichungen Trig. S. 96 nach sich, während das Umgekehrte nicht der Fall ist. —

Um von der Gruppirung unserer Ungleichungen eine deutliche Vorstellung zu erhalten, denke man sich den Raum durch drei Schaaren paralleler Ebenen in Würfel von der Seitenlänge 2π, und jeden von diesen wieder in acht Würfel von der Seitenlänge π zerlegt. Die construirbaren Dreiecke entsprechen dann, bei Deutung der a_i als Cartesischer Coordinaten, den Punkten im Inneren gewisser regelmässiger Tetraeder, die den kleinen Würfeln eingeschrieben sind; die nicht construirbaren Dreiecke entsprechen den ausgeschlossenen Gebieten, deren es 32 modd. 2π verschiedene giebt. Diese letzteren Gebiete, gleichschenklige rechtwinklige Dreikante, schliessen sich in periodischer Wiederholung zu vier Octaedern zusammen, z. B. die Typen B_{ii}, B'_{ii} (Trig. S. 161) zu dem Octaeder

$$-\pi \leqq s_0 \leqq 0, \quad 0 \leqq s_j \leqq \pi \quad (j = 1, 2, 3).$$

Das Innere eines solchen Octaeders geht bei der Trig. S. 160 besprochenen Abbildung über in das Innere einer Gruppe von vier doppelt überdeckten Tetraedern, die längs gewisser Kanten zusammenhängen, wie dort im Einzelnen ausgeführt ist.

Bonn, 25. November 1895.

---

so besteht zwischen ihren Winkeln eine Beziehung der Form $\sigma'_i = \varepsilon\sigma_i + 2\lambda_i\pi$ (Trig. S. 130, Nr. 4) oder $\alpha'_1 = \varepsilon\alpha_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)\pi$, u. s. w., wo $\varepsilon = \pm 1$. Das ist aber (S. 107, Nr. 9) eine Substitution der Gruppe $\mathfrak{G}$; sie kann also durch continuirliche Aenderung hervorgerufen werden.

Fritz Cohn, *Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte.*

Einleitung.

Das Instrument, mit welchem die folgende Bestimmung der Polhöhe der Leipziger Sternwarte angestellt ist, ist das in verschiedenen, früheren Publicationen [1]) beschriebene Wanschaff-sche Universalinstrument. Der Zweck der Beobachtungsreihe war der, den durch die früheren Reihen — hauptsächlich wegen der damals recht merklichen Breitenschwankung — noch nicht genügend sicher gestellten Werth der mittleren Polhöhe von Leipzig für das letzte Jahrzehnt festzulegen und zugleich zu untersuchen, in wieweit die an dem Instrument vorgenommenen Aenderungen die früher hervorgetretenen kleinen Mängel beseitigt und ein fehlerfreieres Functioniren desselben bewirkt hatten. Insbesondere sollten erneut die Unterschiede der einzelnen Kreisstände untersucht werden. Hingegen lag es der Beobachtungsreihe völlig fern, einen Beitrag zum Capitel der Polhöhenschwankung zu liefern, da der ganze Beobachtungsmodus daraufhin nicht eingerichtet war. Zwar hätte vermuthet werden können, dass sich bei einem mittleren Abendfehler von $\pm 0''.3$ bis $\pm 0''.4$ die grösseren Schwankungen in den Beobachtungen verrathen würden; indessen ist das kaum der Fall ge-

---

1) Es sind die drei unter ein und demselben Titel »Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte« in diesen Berichten erschienenen Arbeiten von Schumann (Sitzung v. 6. Febr. 1893), Hayn (6. Febr. 1893), Hartmann (31. Juli 1893). Da dieselben im Folgenden öfters zu citiren sind, führen wir für dieselben die abkürzenden Bezeichnungen Sch, H_1, H_2 ein. Diese Bezeichnungen sollen auch für die Beobachtungsreihen selbst gelten, wobei Sch neben dem Berechner Schumann zugleich den Beobachter Schnauder andeutet, ferner eine Zusammenziehung der beiden Reihen H_1 und H_2 kurz mit H und meine eigene Beobachtungsreihe mit C bezeichnet werden soll.

wesen. Vielmehr wird sich später zeigen, dass z. B. die von Herrn Dr. Hartmann durch Zusammenziehung der Reihen H_1 und H_2 erhaltene Darstellung der Schwankung in nicht genügender Uebereinstimmung mit den coincidirenden Beobachtungen anderer Sternwarten, welche direct zur Ermittlung der Polhöhenschwankung angestellt wurden, steht. Dasselbe gilt für die vorliegende Beobachtungsreihe, für welche es indessen bei der zur Zeit nur geringen Bewegung der Erdaxe von vornherein nicht anders zu erwarten gewesen war.

Die Beobachtungen begannen am 30. März 1894, nachdem einige instrumentelle Untersuchungen vorangegangen waren und den Beobachter mit der Handhabung des Instruments und der Ablesung der Mikroskope vertraut gemacht hatten, und erstreckten sich in ziemlicher Gleichmässigkeit über fast ein Jahr bis zum 9. März 1895; nur im August und September 1894 entstand durch eine achtwöchentliche militärische Uebung eine erhebliche Lücke.

Instrumentelles.

Bezüglich der Einrichtungen des Instruments und der mannigfachen, daran vorgenommenen Aenderungen sei auf die früheren Arbeiten verwiesen; nur auf die nach Abschluss von H_2 noch getroffenen Aenderungen soll hier eingegangen werden. Die früher bemerkte Bewegung der Niveaublase, welche bei feststehendem Instrument während der Ablesung der Mikroskope vor sich ging und ihre Ursache in Nachziehungen haben musste, welche das ganze Instrument infolge der vorangegangenen Drehung im Azimuth erlitt, war durch die Veränderung des Mikroskopträgers nahezu beseitigt worden und hat auch während meiner Beobachtungsreihe fast ganz gefehlt. Indessen hatte es sich herausgestellt, dass bei der damals neu eingeführten Entlastungsvorrichtung das Instrument sich oft im Azimuth schwer drehte und bisweilen ganz festsetzte. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, wurden vor dem Beginn meiner Beobachtungsreihe die flachen Federn, welche nach H_2 unter die drei, das Aufliegen der Büchse auf dem konischen Zapfen regulirenden Schrauben zur elastischen Entlastung gelegt waren, wieder beseitigt und statt dessen eine Entlastungsvorrichtung hergestellt, die jederzeit bequem, ohne dass man das Instrument auseinander zu

nehmen brauchte, zu handhaben war. Durch Drehung eines Excenters, der eine Stahlstange trägt, kann jetzt nämlich die Büchse des Instruments von dem konischen Zapfen ein wenig abgehoben werden, sobald die schwierigere Drehung im Azimuth ein baldiges Festsetzen des Instruments befürchten lässt. Dadurch lässt sich die leichte Drehbarkeit des Instruments im Azimuth wieder herstellen. War die Entlastungsvorrichtung in Thätigkeit getreten, so sollte sie während der Beobachtung selbst wieder abgestellt werden. Die Beobachtungen mussten nun darüber Aufschluss geben, in wieweit diese Einrichtung dem erwähnten Uebelstande abhalf. Schon die ersten Versuche ergaben, dass sich das Instrument ohne Benutzung der Entlastung sehr schnell völlig festsetzte. War einmal die Entlastungsvorrichtung benutzt und dann wieder abgestellt, so drehte sich das Instrument leicht um die verticale Axe. Indessen zeigte sich auch hier bald, dass diese Beweglichkeit nicht sehr lange vorhielt, dass sonach während eines Beobachtungsabends wiederholt die Entlastungsvorrichtung gebraucht werden musste. Um hierbei von vornherein möglichst gleichmässig zu verfahren, wurde consequent, sobald die Beobachtung eines Sterns, die etwa 12^m bis 15^m dauert, erledigt war, die Entlastung in Thätigkeit gesetzt, wieder abgestellt und mit dem Beginn der Beobachtung des folgenden Sterns ein wenig gewartet, bis der Stand der Niveaublase anzeigte, dass das Instrument zur Ruhe gekommen war. Bisweilen kam es dabei vor, dass bei Benutzung der Entlastung sich das Instrument mit einem merklichen Ruck von dem Conus abhob, und es mag in diesen Erschütterungen die Ursache liegen, dass der Zenithpunkt des Kreises bisweilen im Laufe eines Abends merkliche Aenderungen erlitten hat; indessen dürfte der schädliche Einfluss dieser Erschütterungen nur sehr gering sein. Während der Sommermonate reichte übrigens öfters diese viertelstündige Benutzung der Entlastung nicht aus, sondern sie musste auch während der Beobachtung eines Sternes angewendet werden, weil sich die Drehung des Instruments um 180° im Azimuth behufs Beobachtung in der andern Kreislage gar nicht oder nur schwer ausführen liess. Doch ist eine Zunahme des mittleren Beobachtungsfehlers in solchen Fällen nicht nachweisbar. Im Winter hingegen — also umgekehrt wie bei H_2 — schlotterte das Instrument nach Gebrauch der Entlastung auf dem Conus. Wenigstens lässt es sich

nur so erklären, dass die Stellung der Niveaublase sich bei festem Azimuth merklich änderte, sobald das Fernrohr von einem Südstern auf einen Nordstern oder umgekehrt gerichtet wurde, und dass sie überhaupt nicht ganz die früher stets bemerkte Ruhe zeigte; zur Vermehrung der Unsicherheit der Beobachtungen dürfte indess auch dies nicht beigetragen haben. Nur geht in Folge dieser Erscheinung der Werth eines Niveautheils mit dem — allerdings auch noch geringen — Factor: — 0.64 in das Endresultat ein, der, wenn die Erscheinung zeitiger bemerkt worden wäre, hätte erheblich vermindert werden können.

Am Schluss eines Beobachtungsabends wurde das Instrument stets bis zur nächsten Beobachtung entlastet, und erst kurz vor Beginn derselben wurde die Entlastung abgestellt; auch hier wurde darauf geachtet, dies so zeitig zu thun, dass das Instrument vor der Beobachtung zur Ruhe kommen konnte.

In Bezug auf die Bestimmung der Instrumentalcorrectionen kann eine kurze Angabe genügen.

Der Werth eines *Niveautheils* wurde von mir vor Beginn der Reihe am Niveauprüfer ermittelt, es fand sich:

1894 März	12	1^p	$= 2''003$
»	13		$= 1.952$
»	14		$= 1.965$
	Mittel	1^p	$= 1''973$

Berücksichtigt man die früher erhaltenen Werthe (H_1: $1''96$, H_2: $2''00$), so kann $1''98$ als ein bis auf wenige hundertstel Secunden sicherer Mittelwerth angesehen werden. Die Reductionen wegen des Niveaus wurden indessen des bequemen Rechnens halber mit dem runden Werth: $2''00$ ausgeführt und erst am Schluss der Berechnung den Abendmitteln die ganz geringe, selten $0''02$ übersteigende Correction dieserhalb hinzugefügt. Der oben erwähnte Factor: — 0.64, mit dem der Werth eines Niveautheils in das Endresultat eingeht, ist so gering, dass die aus seiner ungenauen Kenntniss entspringende Unsicherheit nur ganz wenige hundertstel Secunden betragen dürfte.

Die Schrauben der Ablesemikroskope wurden auf periodische und fortschreitende Fehler untersucht; bei Mikroskop II waren beide Fehler unmerklich; bei I waren zwar fortschreitende Fehler merklich, konnten jedoch ihrer Geringfügigkeit halber

unberücksichtigt bleiben. Für die periodischen Fehler der Schraube I ergab sich folgende Correctionstabelle:

	1894 März	1895 Januar
$0^{p}.0$	$-0^{p}.24$	$-0^{p}.16$
6.0	— 0.18	— 0.14
12.0	0.00	— 0.03
18.0	+ 0.18	+ 0.13
24.0	+ 0.28	+ 0.23
30.0	+ 0.26	+ 0.20
36.0	+ 0.12	+ 0.08
42.0	— 0.04	— 0.05
48.0	— 0.16	— 0.12
54.0	— 0.23	— 0.15

Beide Bestimmungen zeigen, dass die Fehler gering sind ($1^{p} = 2''$) und während der Beobachtungsreihe sich nur wenig verändert haben. Die erstere wurde bis incl. Juli 1894, die letztere von October 1894 an benutzt. Bei dieser Bestimmung ergab sich der mittlere Ablesefehler zu $\pm\ 0''.4$.

Der *Run* der Ablesemikroskope wurde wie früher aus den Einstellungen der beiden Doppelfäden auf zwei benachbarte Theilstriche des Kreises ermittelt, wobei als Distanz der beiden Doppelfäden nach wiederholten Messungen

für Mikroskop I $3^{R}\ 14^{p}.21$
für Mikroskop II $3^{R}\ 13^{p}.53$

in naher Uebereinstimmung mit den Werthen der früheren Beobachter angenommen wurde. Der Run hat sich im Ganzen gut gehalten, wie aus der folgenden Zusammenstellung der einzelnen Abendwerthe erhellt.

Tabelle I.

Run.

	I	II		I	II
1894 März 30	$0^{p}.0$	$-1^{p}.1$	1894 April 8	$-0^{p}.2$	$-1^{p}.0$
31	— 0.2	— 1.1	9	+ 0.2	— 0.8
April 1	— 0.2	— 1.1	10	+ 0.1	— 1.0
3	— 0.3	— 1.0	12	— 0.2	— 0.8
6	— 0.4	— 1.0	23	0.0	— 0.8
7	— 0.3	— 0.8	25	— 0.2	— 1.0

		I	II			I	II
1894 Mai	6	— 0″4	— 0″9	1894 Oct.	24	0″0	— 0″6
	8	0.0	— 1.4		27	+ 0.1	— 0.8
	9	— 0.3	— 1.0	Nov.	1	+ 0.2	— 1.0
	15	0.0	— 1.1		6	— 0.1	— 1.0
	16	— 0.2	— 1.2		7	0.0	— 0.6
	19	+ 0.2	— 1.1		15	— 0.2	— 1.0
	24	+ 0.1	— 0.9		30	— 0.4	— 1.2
Juni	17	— 0.1	— 0.8	Dec.	1	— 0.6	— 0.9
	22	— 0.4	— 1.0		3	— 0.1	— 0.7
	23	— 0.2	— 0.4		9	— 0.4	— 0.7
	27	+ 0.2	— 0.5		10	— 0.8	— 0.2
	28	— 0.2	— 0.5		11	— 0.8	— 0.5
	30	— 0.4	— 1.0	1895 Jan.	14	0.0	— 0.5
Juli	1	— 0.7	— 0.9		18	0.0	— 0.8
	21	— 0.6	— 0.8		19	0.0	— 0.6
	23	— 0.6	— 0.9	Febr.	15	— 0.4	— 0.8
	25	— 0.2	— 0.9	März	3	— 0.2	— 1.0
Sept.	30	— 0.2	— 0.8		4	— 0.2	— 1.0
Oct.	5	— 0.5	— 1.1		6	— 0.2	— 1.0
	9	— 0.2	— 1.0		7	— 0.3	— 0.9
	11	0.0	— 0.6		8	+ 0.2	— 0.9
	21	— 0.2	— 0.6		9	— 0.2	— 1.1
	23	— 0.2	— 0.7				

Vom 2. bis 12. Juli 1894 war das Instrument auseinandergenommen, da die Klappen des Beobachtungsraums, deren eine beschädigt war, neu in Stand gesetzt werden mussten.

Der Collimationsfehler ist für Zenithdistanzmessungen unwesentlich, wurde indessen, ebenso wie die Neigung der Fäden, stets möglichst klein gehalten.

Die Beleuchtung, die, wie bei Sch berichtet, von einer Centrallampe ausgeht, functionirte meistens gut; nur zuweilen war sie bei den Ablesemikroskopen mangelhaft und beeinträchtigte die Sicherheit der Ablesungen.

Die systematischen Theilungsfehler des Kreises wurden nach der in H_1 gegebenen Tabelle III in Rechnung gezogen, obwohl dieselbe jetzt nicht mehr Gültigkeit zu haben braucht. Ihr Einfluss auf die einzelnen Sternbreiten ist zwar in den einzelnen Kreisständen erheblich, verschwindet aber im Mittel der drei Stände fast ganz, wie die folgende Uebersicht zeigt. Die

Zahlen bedeuten die Aenderung der Zenithdistanz durch Anbringung der Theilungsfehler.

Z	0°	120°	240°	Mittel
52°	— 1″06	+ 1″36	+ 0″16	+ 0″15
48	— 1.33	+ 1.22	+ 0.13	+ 0.01
44	— 1.53	+ 1.16	— 0.09	— 0.15
40	— 1.54	+ 1.26	— 0.02	— 0.10
36	— 1.54	+ 1.38	+ 0.08	— 0.03
32	— 1.55	+ 1.42	+ 0.17	+ 0.01
28	— 1.52	+ 1.32	+ 0.17	— 0.01
24	— 1.30	+ 1.23	+ 0.16	+ 0.03

Die individuellen Theilungsfehler sind nicht unbeträchtlich; als eine allerdings vielleicht besonders ungünstige Stelle (273° 0′ bis 275° 30′) deswegen untersucht wurde, indem die Grösse der auf einander folgenden 5′-Intervalle gemessen wurde, ergab sich bei Berücksichtigung des mittleren Ablesefehlers von ± 0″4 der mittlere Strichfehler zu ± 1″2; jedenfalls beträgt er ± 1″.

Bemerkt werden mag noch, dass während der ganzen Beobachtungsreihe — im Gegensatz zu den früheren Beobachtern — mit dem Ocularprisma beobachtet wurde, weil bei diesem eine bequemere und in beiden Kreislagen gleichmässigere Kopfhaltung möglich war; die Verringerung des Gesichtsfeldes machte sich nie in störender Weise geltend.

Beobachtungs-Programm und Methode.

Das frühere Beobachtungsprogramm ist auch jetzt unverändert beibehalten worden. Nach demselben wurden abwechselnd Circummeridianhöhen von Nord- und Südsternen gemessen, welche in einer Höhe von $\varphi \pm 10°$, d. h. zwischen 28° 40′ und 48° 40′ Zenithdistanz culminiren. Ganz strenge sind diese Grenzen nicht eingehalten worden, da es öfters nothwendig war, dieselben, um eine möglichst gleiche mittlere Zenithdistanz der Süd- und Nordsterne für sich zu erreichen, ein wenig zu überschreiten; doch wurde bei den Südsternen nicht über 20′, bei den Nordsternen nicht über 3° nach beiden Seiten hinausgegangen. Dies letztere war in der unteren Culmination schon etwas misslich, weil die Beobachtung dann ganz dicht über

einem anderen Dache hinweg geschah. Es wurde beabsichtigt, an jedem Abend 3 bis 4 Sternpaare zu beobachten, und zwar sollten dieselben Sterne in drei um 120° getrennten Kreisständen (Zenithpunkt: 0°, 120°, 240°) und in jedem an zwei aufeinanderfolgenden Abenden, im Ganzen also an sechs Abenden, beobachtet werden. Zwar konnte dieses Programm im Einzelnen nicht genau eingehalten werden, da durch ungewöhnlich ungünstiges Wetter einzelne Gruppen beeinträchtigt wurden. Im Grossen und Ganzen ist aber danach verfahren worden; lagen einzelne unvollständige Beobachtungsabende vor, so wurde derselbe Kreisstand, wenn es die Zeit erlaubte, noch an den nächsten Abenden beibehalten. Sämmtliche zu beobachtenden Sterne wurden dem Fundamental-Catalog der A. G. entnommen. Im Ganzen gelangten neun solcher Sterngruppen zur Beobachtung, von denen allerdings die achte nur an einem Abend vollständig beobachtet werden konnte. Die übrigen acht Gruppen sind an 4 bis 10 Abenden beobachtet worden.

Bei der Auswahl einer solchen Sterngruppe, deren Beobachtung im Durchschnitt etwa zwei Stunden dauerte, war besonders darauf zu achten, dass im Mittel die Zenithdistanz der Südsterne der der Nordsterne möglichst gleich war. Denn abgesehen von der dadurch fast vollständig erreichten Elimination der Unsicherheit in der Refraction und in den systematischen Theilungsfehlern des Kreises wird zugleich auch der Einfluss der Biegung, d. h. des Unterschiedes zwischen den aus Nord- und Südsternen ermittelten Polhöhen, gänzlich beseitigt. Welche Annahme man nämlich auch über die Abhängigkeit dieser Biegung von der Zenithdistanz machen mag, sei es, dass sie dem $\sin z$ proportional oder überhaupt unabhängig von ihr, d. h. constant sei, das betreffende Abendmittel wird dasselbe sein, wenn man zunächst die beiden Sternarten für sich mittelt und es daraus durch Mittelung bildet. Nur bei der ersten Sterngruppe ist, wie die unten folgende Uebersicht zeigt, auf diese Gleichheit der mittleren Zenithdistanzen noch nicht genügend geachtet worden, da die Biegung für kleiner gehalten wurde, als sie sich später ergab. Andere Gesichtspunkte bei der Auswahl der Sterngruppen waren die, dass Nord- und Südsterne mit einander abwechselten — doch ist hierauf nicht mit absoluter Strenge gehalten worden —, und dass die Beobachtungen möglichst nahe dem Meridian stattfanden. Bei Südsternen wurde über einen

Stundenwinkel von zwölf Minuten nicht hinausgegangen; bei Nordsternen wurden, besonders im weiteren Verlauf der Beobachtungsreihe, um die Beobachtungszeit nicht unnütz auszudehnen, bisweilen grössere Stundenwinkel zugelassen, ja bei der Gruppe VII ist α Urs. min. als einziger Nordstern in vier verschiedenen Stundenwinkeln beobachtet worden. Indessen erwies sich dies, trotzdem die Beobachtungen einigermassen symmetrisch zum Meridian vertheilt waren, als nicht rathsam, da die gemessenen Polhöhen deutlich einen Einfluss des Stundenwinkels verrathen (vergl. Sch. S. 274).

Natürlich ging an unvollständigen Beobachtungsabenden, die theils durch eintretende Bewölkung, theils durch mangelhaftes Functioniren des Chronographen verursacht wurden, ein Theil der Vortheile wieder verloren; z. B. stimmte bei den beobachteten Sternen die mittlere Zenithdistanz der Nord- und Südsterne nicht mehr überein; doch ist die Zahl dieser Fälle nur mässig. Die folgende Tabelle enthält die einzelnen Sterngruppen.

Tabelle II.

Uebersicht der einzelnen Sterngruppen.

Gruppe I.

	α	δ	z_N	z_S
30 Hev. Cam.. . . .	$10^h\ 18^m.4$	83° 6′	31° 46′	
l Leonis	43.7	11° 6′		40° 14′
Br. 1508.	51.6	78° 20′	27° 0′	
ι Leonis	11 18.4	11° 7′		40° 13′
γ Cephei U. C. . . .	34.9	77° 2′	51° 38′	
o Virginis	59.8	9° 19′		42° 1′
4 Hev. Drac.	12 7.4	78° 12′	26° 52′	
		Mittel:	34° 19′	40° 49′

Gruppe II.

	α	δ	z_N	z_S
43 Hev. Ceph. U. C. .	$12^h\ 54^m.0$	85° 41′	42° 59′	
ε Virginis	56.9	11° 32′		39° 48′
α Urs. min. U. C. . .	13 19.0	88° 45′	39° 55′	
τ Bootis	42.3	17° 59′		33° 21′
4 Urs. min.	14 9.4	78° 3′	26° 43′	
π Bootis pr.	35.8	16° 52′		34° 28′
		Mittel:	36° 32′	35° 52′

Gruppe III.

	α	δ	z_N	z_S
τ^1 Serpentis	$15^h\ 20^m.9$	15° 48′		35° 32′
ζ Urs. min.	47.9	78° 7′	26° 47′	
γ Serpentis	51.6	16° 0′		35° 20′
Gr. 750 U. C.	16 3.2	85° 17′	43° 23′	
β Herculis	25.7	21° 43′		29° 37′
ε Urs. min.	57.0	82° 13′	30° 53′	
		Mittel:	33° 41′	33° 30′

Gruppe IV.

	α	δ	z_N	z_S
β Ophiuchi	$17^h\ 38^m.3$	4° 37′		46° 43′
δ Urs. min.	18 6.7	86° 37′	35° 17′	
109 Herculis	19.2	21° 43′		29° 37′
110 Herculis	41.2	20° 27′		30° 53′
51 Hev. Ceph. U. C. .	50.6	87° 13′	41° 27′	
ζ Aquilae	19 0.6	13° 42′		37° 38′
δ Aquilae	20.2	2° 54′		48° 26′
λ Urs. min.	29.6	88° 58′	37° 38′	
		Mittel:	38° 7′	38° 39′

Gruppe V.

	α	δ	z_N	z_S
γ Sagittae	$19^h\ 54^m.1$	19° 12′		32° 8′
λ Urs. min.	28.0	88° 59′	37° 39′	
β Delphini	20 32.6	14° 14′		37° 6′
76 Draconis	50.2	82° 9′	30° 49′	
α Equulei	21 10.6	4° 49′		46° 31′
1 Hev. Drac. U. C. . .	22.0	81° 47′	46° 53′	
ε Pegasi	39.0	9° 24′		41° 56′
30 Hev. Cam. U. C. .	22 18.3	83° 5′	45° 35′	
		Mittel:	40° 14′	39° 25′

Gruppe VI.

	α	δ	z_N	z_S
30 Hev. Cam. U. C. .	22h 18m.3	83° 5′	45° 35′	
ζ Pegasi	36.2	10° 17′		41° 3′
Br. 1508 U. C. . . .	51.6	78° 20′	50° 20′	
70 Pegasi	23 23.8	12° 11′		39° 9′
γ Cephei	35.0	77° 3′	25° 43′	
ω Piscium	53.9	6° 17′		45° 3′
4 Hev. Drac. U. C. . .	0 7.2	78° 12′	50° 28′	
δ Piscium	43.2	7° 1′		44° 19′
		Mittel:	43° 2′	42° 24′

Gruppe VII.

	α	δ	z_N	z_S
α Urs. min.	1h 20m.6	88° 45′	37° 25′	
ε Piscium	0 57.5	7° 20′		44° 0′
α Urs. min.	1 20.6			
η Piscium	1 25.9	14° 48′		36° 32′
α Urs. min.	1 20.6			
α Arietis	2 1.3	22° 58′		28° 22′
α Urs. min.	1 20.6			
μ Ceti	2 39.3	9° 40′		41° 40′
		Mittel:	37° 25′	37° 38′

Gruppe VIII.

	α	δ	z_N	z_S
ζ Urs. min. U. C. . .	3h 47m.8	78° 7′	50° 33′	
δ Tauri	4 16.9	17° 18′		34° 2′
Gr. 750	3.7	85° 17′	33° 57′	
π5 Orionis	48.8	2° 16′		49° 4′
ε Urs. min. U. C. . .	56.7	82° 12′	46° 28′	
γ Orionis	5 19.5	6° 15′		45° 5′
φ1 Orionis	29.1	9° 25′		41° 55′
δ Urs. min. U. C. . .	6 5.9	86° 36′	42° 4′	
		Mittel:	43° 16′	42° 32′

Gruppe IX.

	α	δ	z_N	z_S
δ Urs. min. U. C. . .	6h 6m.0	86° 36′	42° 4′	
S Monocerotis . . .	35.2	10° 0′		41° 20′
ζ Geminorum. . . .	57.9	20° 44′		30° 36′
51 Hev. Ceph. . . .	51.6	87° 13′	35° 53′	
β Canis min.	7 21.5	8° 30′		42° 50′
λ Urs. min. U. C. . .	26.9	88° 58′	39° 42′	
		Mittel:	39° 13′	38° 15′

Auch die Beobachtungsart jedes einzelnen Sternes blieb dieselbe wie früher. Jeder Stern wurde zuerst in der einen, dann in der andern Kreislage an den beiden horizontalen Fäden eingestellt, wobei stets die letzte Drehung der Feinbewegung — wie auch bei der Mikroskopablesung — in dem Sinne gemacht wurde, dass die Schrauben hineingedreht wurden. Ferner wurde nach H_2 stets an demjenigen Faden zuerst beobachtet, welchen der Stern bei dieser Art der Feinbewegung zuerst passirte, d. h. in der Kreislage rechts am oberen, links am unteren Faden. Sonach ist durch die Angabe, dass mit Kreislage rechts resp. links begonnen wurde, der ganze Verlauf der Beobachtung des Sterns gegeben. Die Momente der Bisection des Sternbildes durch den Faden wurden fast ausschliesslich registrirt, nur an wenigen Abenden, an denen sich der Chronograph in Reparatur befand oder schlecht functionirte, wurde mit einem Chronometer beobachtet. Bei Südsternen wurde stets, bei Nordsternen meistens diese Bisection dadurch erzielt, dass man den Stern vermöge seiner Bewegung auf den Faden laufen liess. Dabei wurden also die Feinbewegungen in Höhe und Azimuth zum Schluss gar nicht benutzt, vielmehr beide einige Zeit (ca. 30s) vorher so eingestellt, dass die Bisection ungefähr in der Mitte des Gesichtsfeldes stattfinden musste. So wurde erreicht, dass das ganze Instrument einige Zeit vor dem Moment der Registrirung völlig unberührt dastand.

Betreffs der Zeitbestimmungen und der zur Berechnung der Refraction erforderlichen meteorologischen Daten kann auf die früheren Arbeiten verwiesen werden.

Die Reduction der Beobachtungen erfolgte naturgemäss in der Weise, dass zunächst für jeden Faden die von den perio-

dischen Schraubenfehlern, dem Run, dem Niveau und den Theilungsfehlern des Kreises befreite Kreisablesung ermittelt wurde. An diese wurde dann die Reduction auf den Meridian und die Refraction angebracht. So ergab sich für jeden Faden eine Meridianzenithdistanz, woraus beiläufig der Werth der Fadendistanz entnommen werden konnte. Dann wurde für beide Kreislagen das Mittel beider Fäden gebildet und hieraus sowohl Zenithpunkt, wie Meridianzenithdistanz abgeleitet, woraus mit Benutzung der Declinationen der Sterne die gewünschte Polhöhe folgte.

Im Ganzen wurden an 58 Abenden 357 einzelne Breiten aus 51 Sternen, und zwar 182 Breiten aus 36 Südsternen und 175 Breiten aus 15 Nordsternen, erhalten. Auf jeden Abend vom Gewicht eins — 4 Abende erhielten wegen zu geringer Sternzahl (unter 4) halbes Gewicht — kommen also durchschnittlich 6.4 Sterne.

Die Ableitung der Sternpositionen.

Die beobachteten Sterne gehören sämmtlich dem Fundamental-Catalog der A. G. an, dem anfänglich ihre Positionen unverändert entnommen wurden. Dabei konnten die Rectascensionen direct den Ephemeriden des Berliner Jahrbuchs entlehnt werden. Bei den Nordsternen war an dieselben noch die tägliche Aberration anzubringen, bei den Südsternen überstieg sie nie $0\overset{s}{.}01$. Die scheinbaren Declinationen hingegen wurden auf $0\overset{''}{.}01$ genau nach den Angaben des B. J. neu berechnet und dabei auch die kleinen, schnell veränderlichen Mondglieder mit berücksichtigt, die tägliche Aberration überstieg nur zuweilen bei einigen Nordsternen $0\overset{''}{.}01$ und wurde dann angebracht.

Als nach Beendigung der Rechnung eine eingehende Discussion des gesammten Beobachtungsmaterials vorgenommen wurde, zeigte sich bald, wie auch schon bei den früheren Beobachtern, dass manche Sterne erheblich von den übrigen abweichende Werte lieferten. Wenn diese Erscheinung auch grossentheils, abgesehen von der Ungenauigkeit der Beobachtung an sich, den zufälligen Theilungsfehlern des Kreises ihren Ursprung verdanken wird, so entspringt jedenfalls ein Theil auch wirklichen Fehlern der angenommenen Declinationen. Ist es ja auch anderweitig bekannt, dass die Positionen des F. C., dessen

Wirksamkeit ursprünglich gar nicht auf eine seiner mittleren Epoche so fern liegende Zeit wie die jetzige berechnet war, (s. Auwers A. N. Bd. 114, Nr. 2713, S. 6: »Wenn nun der jetzt vorliegende Catalog, welcher bekanntlich für eine ganz beschränkte und kaum über das Jahr 1880 hinaus geplante Anwendung construirt ist, den ihm ursprünglich fremden Zweck eines allgemeinen Fundamental-Catalogs zunächst noch weiter interimistisch zu erfüllen hat, ...«) hauptsächlich infolge ungenügender Kenntniss der Eigenbewegungen zum Theil merkliche Unsicherheiten bieten. Am angegebenen Orte schätzt Auwers (S. 18) den wahrscheinlichen Fehler einer aus den Daten des F. C. abgeleiteten Declination für jetzt zu $\pm$ 0″20. Da nun inzwischen eine Anzahl neuer, guter Beobachtungen der Fundamentalsterne publicirt worden ist, schien es von Interesse mit Benutzung derselben eine Neubestimmung der von mir benutzten Declinationen durchzuführen, da hierdurch erstens das Gewicht jeder Position erheblich steigen, zweitens aber auch die mittlere Epoche der Beobachtungszeit näher gerückt, sonach der Einfluss der nicht genau bekannten Eigenbewegung vermindert werden musste. Dabei wurden nun nicht nur die nach dem Obigen abweichenden Sterne, sondern alle von mir und den früheren Beobachtern benutzten Anhaltsterne — im Ganzen 76 — neu berechnet. Wenn auch der Endwerth der mittleren Polhöhe von Leipzig vermuthlich nur ganz unmerklich dadurch beeinflusst werden konnte, da ja das System des F. C. erhalten bleiben und allein die individuellen Correctionen der einzelnen Sterne ermittelt werden sollten, so musste doch die innere Uebereinstimmung der Reihen vermehrt und ihre Resultate einander genähert werden. In der That findet dies statt. Berechnet man aus den einzelnen Sternen, soweit sie mindestens viermal beobachtet sind, die Breiten für sich und bildet die Abweichungen dieser Sternmittel vom Gruppenmittel, so ergiebt sich für den mittleren Fehler einer solchen, durchschnittlich auf 6 bis 8 Einzelbreiten beruhenden Sternbreite (aus 50 Sternen)

ohne Verbesserung der Declinationen	$\pm$ 0″304
mit » » »	$\pm$ 0″280.

Die Arbeit der Neubestimmung wurde dadurch wesentlich erleichtert, dass die von Auwers (A. N. Bd. 134, Nr. 3195/96) gegebenen Reductionstabellen der einzelnen Cataloge auf das

System des F. C. benutzt werden konnten, worauf nur noch die Vergleichung mit den Angaben des Berliner Jahrbuchs auszuführen war.

Ausser der Hinzuziehung neuer Cataloge wurde aber auch auf die Grundlagen des F. C.[1]) selbst zurückgegangen. Zunächst mussten die dort benutzten Positionen Cambridge 1872, da sie ja implicite in dem hier neu benutzten Catalog Rogers 1875 enthalten sind, ausgeschlossen werden. Dann aber wurde in einigen Fällen eine andere Gewichtsvertheilung eingeführt. Wie nämlich Auwers am oben angeführten Orte (A. N. Nr. 2713, S. 15 u. 16) zeigt, ist das Gewicht des Catalogs Pulkowa 1871 in Rectascension erheblich, in Declination etwas zu hoch angenommen; es wurde von 5 auf 4 herabgesetzt. Aber auch das Gewicht des vorläufigen Catalogs Pulkowa 1865 war zu hoch, da sich nachträglich zeigte, dass seine Positionen häufig nur auf vier Einzelbeobachtungen beruhen. Es wurde daher 4 bis 5 Beobachtungen das Gewicht 4, 6 bis 12 das Gewicht 5, über 12 das Gewicht 6 ertheilt. Hingegen behielten der Einfachheit halber die anderen beim F. C. verwendeten Cataloge die ihnen von Auwers ertheilten Gewichte, auch wurden ihre Positionen unverändert den Angaben des F. C. entnommen.

Die neu benutzten Cataloge und die ihnen ertheilten Gewichte sind:

Romberg 1875: unter 8 B. Gew. 3, 9 bis 16 G. 4, über 16 G. 5.
Rogers 1875: }
Greenwich 1880: } unter 4 B. Gew. 1, 5 bis 10 G. 2, 11 bis 20 G. 3, über 20 G. 4.
Washburn 1890: }
Pulkowa 1885: 8 bis 12 B. Gew. 6, über 12 Gew. 7.

Für einige Sterne konnten Positionen aus Becker: »Resultate aus Beobachtungen von 521 Bradley'schen Sternen« (Beob.-Ergebn. der Sternw. zu Berlin, Heft 1), welche auf vier Einzelbeobachtungen beruhen, entnommen werden; ihnen wurde das Gewicht 2 ertheilt. Für zwei Zusatzsterne (43 Hev. Ceph. und 30 Hev. Cam.) wurde noch eine Position im definitiven Catalog Pulk. 1865 gefunden und auf das System (P_2) des vorläufigen Catalogs, das ja zugleich das System des F. C. ist, nach Romberg (S. 14) reducirt. Endlich erhielt ich nach Abschluss meiner

---

1) Publication Nr. XIV der A. G.

Rechnungen durch die Liebenswürdigkeit von Herrn Professor Küstner für 12 Sterne, für welche die berechneten Correctionen 0″2 überstiegen, die von ihm am grossen Berliner Meridiankreis bestimmten, bisher noch nicht publicirten Correctionen des F. C. mitgetheilt. Zwar konnten dieselben bei der Rechnung nicht mehr benutzt werden; indessen zeigten sie die ausserordentliche Genauigkeit der ohne sie erhaltenen Verbesserungen.

Während die übrigen genannten Cataloge mit Benutzung der erwähnten Auwers'schen Reductionstabellen auf das System des F. C. bezogen werden konnten, waren für Pulk. 1885 und Washburn diese Reductions-Elemente selbst noch abzuleiten. Es ergab sich durch eine Ausgleichung die folgende

Tabelle III.

Reduction der Cataloge Pulkowa$_{1885}$ und Washburn auf das System des F. C.

α	$\Delta\delta_\alpha$ P$_{1885}$	$\Delta\delta_\alpha$ Washb.
0h	+ 0″02	− 0″22
1	+ 0.05	− 0.09
2	− 0.02	− 0.05
3	− 0.08	− 0.02
4	− 0.05	+ 0.02
5	+ 0.01	+ 0.06
6	+ 0.06	+ 0.12
7	+ 0.06	+ 0.19
8	+ 0.05	+ 0.24
9	+ 0.05	+ 0.27
10	+ 0.05	+ 0.30
11	+ 0.04	+ 0.34
12	+ 0.01	+ 0.32
13	− 0.02	+ 0.29
14	− 0.02	+ 0.27
15	+ 0.01	+ 0.24
16	+ 0.04	+ 0.18
17	+ 0.06	0.00
18	+ 0.06	− 0.18
19	+ 0.04	− 0.26
20	+ 0.01	− 0.36
21	− 0.03	− 0.46
22	− 0.05	− 0.46
23	− 0.03	− 0.35

δ	$\Delta\delta_\delta$ P$_{1885}$	$\Delta\delta_\delta$ Washb.	Unt. Culm.
−15°	− 0″25	0″00	
−10	− 0.09	+ 0.11	
− 5	+ 0.07	+ 0.20	
0	+ 0.17	+ 0.28	
+ 5	+ 0.22	+ 0.33	
10	+ 0.25	+ 0.35	
15	+ 0.26	+ 0.37	
20	+ 0.27	+ 0.38	
25	+ 0.26	+ 0.38	
30	+ 0.24	+ 0.38	
35	+ 0.21	+ 0.32	
40	+ 0.11	+ 0.10	
45	− 0.02	− 0.12	
50	− 0.05	− 0.20	
55	− 0.03	− 0.22	
60	− 0.03	− 0.20	− 0″09
65	− 0.06	− 0.15	− 0.08
70	− 0.10	− 0.12	− 0.08
75	− 0.08	− 0.15	− 0.08
80	− 0.06	− 0.16	− 0.07
85	− 0.06	− 0.16	− 0.06
90	− 0.06	− 0.16	− 0.06

Da für die in Betracht kommenden Declinationen (+ 2° bis + 23° und 77° bis 90°) die Correctionen für beide Cataloge nahezu constant sind, wurden die folgenden Mittelwerthe angewendet:

Südsterne: P_{1885}: + 0.″25, WASHB.: + 0.″34,
Nordsterne: P_{1885}: — 0.″06, WASHB. O. C.: — 0.″17, U. C.: — 0.″07

und mit den von der Rectascension abhängigen Correctionen, die bei P_{1885} beinahe zu vernachlässigen waren, vereinigt.

Nur für die Sterne, bei denen entweder die Position von Greenwich 1861, auf der die Eigenbewegungen des F. C. wesentlich beruhen, stark abweicht, oder die Correctionen der Position des F. C. mit der Zeit erheblich zunehmen, wurde eine Verbesserung der Eigenbewegung abzuleiten gesucht; es traf dies für 7 Sterne zu. Diese Ableitung sollte indessen keinen definitiven Charakter haben, sondern es nur ermöglichen, einigermassen sichere Positionen für die Beobachtungszeit abzuleiten. Daher wurden ausser Bradley — dessen Position nach Auwers-Bradley mit der im F. C. gegebenen Eigenbewegung auf 1875.0 gebracht wurde — keine älteren Cataloge zu Rathe gezogen und die Verbesserung der E. B. nicht auf 0.″001, sondern nur auf 0.″005 angesetzt, da eine genauere Bestimmung für den vorliegenden Zweck keine Bedeutung gehabt hätte. Im Folgenden sind nun die Correctionen, wie sie bei der Rechnung benutzt wurden, zusammengestellt, bei den Sternen mit verbesserter E. B. ist die Correction für 1895.0 angegeben, mit Ausnahme von 24 Vulpeculae und τ Virginis, bei welchen sie, da diese Sterne nur in der Reihe Sch vorkommen, für 1886.0 angesetzt ist.

Tabelle IV.

Die angewandten Correctionen der Declinationen des F. C.

	Nr. im F. C.	$\Delta\delta$		Nr. im F. C.	$\Delta\delta$
1) δ Piscium .	342	+ 0.″11	8) Gr. 750 . .	68	+ 0.″20
2) 43 Hev. Ceph.	344	— 0.27	9) δ Tauri . .	71	0.00
3) ε Piscium. .	15	— 0.08	10) π^5 Orionis .	78	+ 0.40
4) α Urs. min. .	19	— 0.08	11) γ Orionis. .	91	— 0.02
5) η Piscium .	22	+ 0.07	12) φ^1 Orionis .	376	+ 0.15
6) α Arietis . .	33	— 0.10	13) α Orionis. .	102	— 0.11
7) μ Ceti . . .	42	— 0.16	14) γ Geminor. .	107	+ 0.10

	Nr. im F. C.	$\Delta\delta$		Nr. im F. C.	$\Delta\delta$
15) *S* Monocer. .	108	− 0″.10	46) γ Serpentis .	218	− 0″.08
16) 51 Hev. Ceph.	111	+ 0.03	47) γ Herculis .	225	− 0.09
17) ζ Geminor. .	113	− 0.03	48) β Herculis .	228	+ 0.04
18) λ Geminor. .	114	− 0.08	49) 49 Herculis .	478	+ 0.02
19) β Canis min.	118	− 0.06	50) κ Ophiuchi .	233	− 0.14
20) β Cancri . .	123	+ 0.07	51) ε Urs. min. .	235	− 0.03
21) δ Cancri . .	126	− 0.09	52) α Ophiuchi .	241	0.00
22) ϑ Hydrae .	134	− 0.02	53) β Ophiuchi .	245	− 0.14
23) 1 Hev. Drac.	137	+ 0.08	54) 67 Ophiuchi	253	− 0.06
24) π Leonis . .	423	− 0.01	55) 72 Ophiuchi	254	− 0.07
25) α Leonis . .	146	0.00	56) δ Urs. min. .	256	− 0.07
26) 30 Hev. Cam.	425	− 0.16	57) 109 Herculis	258	+ 0.18
27) *l* Leonis . .	432	+ 0.08	58) 110 Herculis	263	+ 0.18
28) Br. 1508 . .	433	− 0.14	59) ζ Aquilae .	270	+ 0.07
29) χ Leonis . .	434	− 0.01	60) ω Aquilae .	495	− 0.18
30) ϑ Leonis . .	157	− 0.20	61) δ Aquilae .	274	+ 0.11
31) ι Leonis . .	161	− 0.02	62) γ Aquilae .	277	− 0.05
32) υ Leonis . .	438	− 0.05	63) λ Urs. min. .	284	+ 0.03
33) β Leonis . .	164	0.00	64) γ Sagittae .	286	− 0.24
34) β Virginis .	165	+ 0.05	65) 24 Vulp. . .	501	+ 0.42
35) *o* Virginis .	167	+ 0.05	66) β Delphini .	292	+ 0.11
36) 4 Hev. Drac.	168	− 0.21	67) α Delphini .	293	− 0.02
37) ε Virginis. .	176	0.00	68) 76 Draconis.	508	+ 0.15
38) τ Bootis . .	180	− 0.02	69) α Equulei .	304	− 0.08
39) τ Virginis .	183	+ 0″.54	70) ε Pegasi . .	309	+ 0.03
40) 4 Urs. min. .	459	− 0.57	71) ϑ Pegasi . .	314	− 0.23
41) π Bootis pr.	194	+ 0.34	72) ζ Pegasi . .	321	+ 0.07
42) τ^1 Serpentis	468	− 0.28	73) α Pegasi . .	329	− 0.12
43) α Serpentis.	212	+ 0.13	74) 70 Pegasi. .	535	+ 0.15
44) ε Serpentis .	216	+ 0.01	75) γ Cephei . .	334	+ 0.44
45) ζ Urs. min. .	217	− 0.05	76) ω Piscium .	336	− 0.17

Schliesst man die drei schon von Auwers ihrer abweichenden Bestimmung in Greenwich 1861 halber als unsicher bezeichneten Positionen von π^5 Orionis, 4 Urs. min. und 24 Vulpeculae aus, so ergiebt sich als durchschnittliche Correction für 1895.0: ± 0″.107, und zwar

für Hauptsterne: ± 0″.103 (Nord: ± 0″.122, Süd: ± 0″.099)
für Zusatzsterne: ± 0″.126 (Nord: ± 0″.180, Süd: ± 0″.104).

Es ist also nur ein geringer Unterschied in der Genauigkeit

der Haupt- und Zusatzsterne des F. C., während die Nordsterne (± 0."138) ungenauer sind als die Südsterne (± 0."100). Da man im Allgemeinen annehmen kann, — und dies wird durch die nachträglich hinzugekommenen Küstner'schen Beobachtungen bestätigt — dass diese Correctionen eher noch zu klein sind, so wird der mittlere Fehler der Declination eines Fundamentalsterns jetzt kaum weniger als ± 0."2 betragen.

Für 34 von 76 Sternen überschreiten die Correctionen 0."1, für 13 0."2. Diese letzteren folgen hier, nach den einzelnen Bestimmungen aufgeführt; dabei sind auch die Küstner'schen Beobachtungen mitgenommen, so dass die hier abgeleiteten Endwerthe bisweilen von den obigen ein wenig abweichen; das Gewicht 4 wurde 5 bis 10 Beobachtungen, 5 für 11 bis 20 B., 6 über 20 B. ertheilt. Die Tabelle Va enthält die ohne Aenderung der E. B. ermittelten Correctionen von 6 Sternen, Tabelle Vb die verbesserten Eigenbewegungen von 6 weiteren Sternen, bei diesen erreicht die Correction der Declination jetzt schon 0."5. Da bei π Bootis pr. und τ^1 Serpentis erst nachträglich die Verbesserung der E. B. eingeführt wurde, so weichen die hier ermittelten Correctionen von den wirklich benutzten erheblich ab. In der Zusammenstellung giebt die Zeile F. C. an, welche Correction die Position des F. C. allein auf Grund der oben erwähnten Aenderungen der in ihm benutzten Cataloge (Ausschluss von Cambridge 1872, andere Gewichtsvertheilung bei Pulk._{1865} und Pulk._{1871}) erfährt, dazu die Gewichtsbestimmung. Die Gewichtszahlen erreichen jetzt mehr als das Doppelte von denen des F. C.

Tabelle V^a.

Declinations-Verbesserungen über 0."2.

2) 43 Hev. Ceph.

	$\Delta\delta$	Gew.
F. C.	+ 0."02	7
Romberg . .	— 0.05	4
Pulk._{1865} . .	— 0.53	5
Rogers . . .	— 0.12	3
Greenwich_{1880}	— 0.48	4
Pulk._{1885} . .	— 0.30	7
Washburn . .	— 0.53	4
Küstner . . .	— 0.28	4
Mittel:	— 0."27	38

8) Gr. 750

	$\Delta\delta$	Gew.
F. C.	— 0."02	11
Romberg . .	+ 0.27	5
Rogers . . .	— 0.09	4
Greenwich_{1880}	+ 0.75	3
Pulk._{1885} . .	+ 0.40	7
Washburn . .	+ 0.29	4
Küstner . . .	+ 0.28	6
Mittel:	+ 0."21	40

30) ϑ Leonis

	$\Delta\delta$	Gew.
F. C.	— 0″.02	12
Romberg . .	— 0.37	5
Greenwich_{1880}	— 0.26	3
Pulk._{1885} . .	— 0.35	6
Washburn. .	— 0.36	2
Küstner. . .	— 0.27	4
Mittel:	— 0″.21	32

36) 4 Hev. Drac.

	$\Delta\delta$	Gew.
F. C.	— 0″.12	15
Romberg . .	— 0.19	5
Rogers . . .	— 0.23	4
Greenwich_{1880}	+ 0.10	3
Pulk._{1885} . .	— 0.47	7
Washburn. .	— 0.32	4
Küstner. . .	— 0.30	5
Mittel:	— 0″.22	43

64) γ Sagittae

	$\Delta\delta$	Gew.
F. C.	— 0″.01	7
Romberg . .	— 0.32	5
Becker . . .	— 0.10	2
Greenwich_{1880}	— 0.34	1
Pulk._{1885} . .	— 0.40	6
Washburn. .	— 0.69	3
Küstner. . .	— 0.32	4
Mittel:	— 0″.26	28

71) ϑ Pegasi

	$\Delta\delta$	Gew.
F. C.	— 0″.15	10
Romberg . .	— 0.29	5
Rogers . . .	[+ 0.49	4]
Greenwich_{1880}	— 0.52	1
Becker . . .	— 0.30	2
Pulk._{1885} . .	— 0.19	6
Washburn. .	— 0.28	4
Mittel:	— 0″.23	28

Tabelle V^b^.

Verbesserte Eigenbewegungen.

10) π^5 Orionis

	Ep.	Gew.	$\Delta\delta$	B.—R.
Bradley . . .	1755.0	6 Beob.	— 1″.74	— 0″.72
Pulk._{1845} . .	1847.3	—	— 0.21	— 0.11
Greenwich_{1861}	1858.1	—	— 2.04	— 2.05
Pulk._{1865} . .	1873.1	5	+ 0.35	+ 0.19
Romberg . .	1877.0	4	+ 0.30	+ 0.10
Greenwich_{1880}	1879.8	1	+ 0.69	+ 0.46
Pulk._{1885} . .	1884.0	6	+ 0.22	— 0.05
Küstner. . .	1888.3	4	+ 0.02	— 0.29
Washburn . .	1889.9	3	+ 0.23	— 0.10

$$\Delta\delta = +0''.18 + 0''.01\,(t - 1875.0)$$

40) 4 Urs. min.

	Ep.	Gew.	$\Delta\delta$	B.—R.
Bradley . . .	1751.7	2 Beob.	+ 1″.01	— 0″.56
Greenwich_{1861}	1837	—	+ 1.22	+ 0.93
Pulk._{1871} . .	1871	4	— 0.20	+ 0.02
Greenwich_{1872}	1876.3	1	— 0.23	+ 0.07

	Ep.	Gew.	$\Delta\delta$	B.—R.
Romberg . .	1875.1	5	— 0″.09	+ 0″.19
Rogers . . .	1876.3	4	— 0.30	0.00
Becker . . .	1876.9	2	— 0.30	+ 0.01
Greenwich$_{1880}$	1880.4	3	— 0.65	— 0.29
Küstner. . .	1888.4	4	— 0.56	— 0.08
Washburn .	1889.5	4	— 0.47	+ 0.03

$\Delta\delta = -0''.28 - 0''.015\,(t - 1875.0)$

41) π Bootis pr.

	Ep.	Gew.	$\Delta\delta$	B.—R.
Bradley . . .	1754.4	3 Beob.	— 1″.62	+ 1″.00
Pulk.$_{1845}$ . . .	1846.4	--	— 0.36	— 0.04
Greenwich$_{1864}$	1851.1	—	— 0.81	— 0.86
Pulk.$_{1865}$ . . .	1871.1	4	+ 0.20	— 0.10
Rogers . . .	1875	3	+ 0.47	+ 0.07
Becker . . .	1876.4	2	0.00	— 0.44
Romberg . .	1876.8	5	+ 0.44	0.00
Greenwich$_{1880}$	1878.8	2	+ 0.23	— 0.27
Pulk.$_{1885}$ . .	1884.9	6	+ 1.04	+ 0.39
Küstner . . .	1888.7	4	+ 0.54	— 0.20

$\Delta\delta = +0''.40 + 0''.025\,(t - 1875.0)$

42) τ^1 Serpentis

	Ep.	Gew.	$\Delta\delta$	B.—R.
Bradley . . .	1754.5	2 Beob.	+ 0″.19	— 0″.66
Greenwich$_{1864}$	1866.4	1	+ 0.09	+ 0.35
Pulk.$_{1871}$ . .	1871	4	— 0.03	+ 0.28
Romberg . .	1875.0	4	— 0.17	+ 0.18
Washburn . .	1889.0	3	— 0.99	— 0.50
Küstner . . .	1889.5	5	— 0.65	— 0.15

$\Delta\delta = -0''.35 - 0''.04\,(t - 1875.0)$

65) 24 Vulpeculae

	Ep.	Gew.	$\Delta\delta$	B.—R.
Bradley . . .	1754.0	3 Beob.	— 1″.46	+ 0″.05
Greenwich$_{1864}$	1859.7	—	— 1.50	— 1.57
Pulk.$_{1871}$ . .	1871.0	4	+ 0.30	+ 0.06
Rogers . . .	1875.0	2	— 0.56	— 0.86
Romberg . .	1877.0	4	+ 0.42	+ 0.09
Berl. Zonen .	1881.5	4	+ 0.51	+ 0.11
Greenwich$_{1880}$	1886.3	1	+ 0.16	— 0.31
Küstner . . .	1888.0	4	+ 0.57	+ 0.07
Washburn . .	1889.1	3	+ 0.78	+ 0.27

$\Delta\delta = +0''.30 + 0''.015\,(t - 1875.0)$

75) γ Cephei

	Ep.	Gew.	$\Delta\delta$	B.—R.
Bradley . . .	1751.3	6 Beob.	$-0''.42$	$+0''.53$
Pulk.$_{1845}$ . . .	1846.1	—	-0.11	-0.11
Greenwich$_{1864}$	1859.7	—	-0.10	-0.24
Pulk.$_{1865}$ . . .	1867.3	5	-0.11	-0.35
Greenwich$_{1872}$	1872.5	4	$+0.32$	$+0.06$
Rogers . . .	1876.4	4	$+0.13$	-0.17
Romberg . .	1876.5	5	$+0.13$	-0.17
Greenwich$_{1880}$	1882.4	4	$+0.58$	$+0.22$
Pulk.$_{1885}$ . . .	1884.9	7	$+0.57$	$+0.18$
Washburn . .	1889.3	4	$+0.50$	$+0.07$
Küstner . . .	1889.7	4	$+0.64$	$+0.20$

$$\Delta\delta = +0''.29 + 0''.01\,(t - 1875.0)$$

Gesondert muss der Stern τ Virginis, welcher nur in der Reihe Sch vorkommt, erwähnt werden, da sich für ihn eine veränderliche E. B. herausstellte, wie aus der folgenden Uebersicht und den daraus gebildeten Normalorten folgt:

39) τ Virginis

Bradley . . .	1756.0	10 Beob.	$+0''.21$
Pulk.$_{1845}$ . .	1847.0	3	-0.16
Greenwich$_{1850}$	1852.2	3	$+0.08$
Greenwich$_{1860}$	1856.6	4	$+0.05$
Greenwich$_{1864}$	1863.4	2	-0.72
Leipzig . . .	1867.4	2	-0.21
Pulk.$_{1865}$ . .	1869.4	5	$+0.24$
Greenwich$_{1872}$	1872.3	3	$+0.04$
Rogers . . .	1874.5	4	$+0.61$
Romberg . .	1877.0	5	$+0.50$
Greenwich$_{1880}$	1883.8	4	$+0.83$
Pulk.$_{1885}$ . .	1883.9	6	$+0.85$
Washburn . .	1888.7	2	$+0.97$
Küstner . . .	1889.5	4	$+0.70$

Normalorte:

I	1756.0	—	$+0''.21$
II	1852.4	10	0.00
III	1867.6	9	-0.07
IV	1875.0	12	$+0.42$
V	1885.9	16	$+0.82$

Eine eingehendere Untersuchung dieser Eigenthümlichkeit würde nicht hierher gehören, sie bildet den Gegenstand eines demnächst erscheinenden Aufsatzes in den Astron. Nachr. Hier mag nur bemerkt werden, dass τ Virginis zwar als weiter Doppelstern (78″, $4^m\!.5$ und $8^m\!.5$) bekannt ist, dass aber bei so grosser Distanz an eine Bahnbewegung wohl nicht gedacht werden kann.

Aus den beiden letzten Normalorten folgt

$$\Delta\delta = +\,0''\!.60 + 0''\!.037\,(t - 1880.0).$$

Danach erreicht jetzt die Correction der Declination von τ Virginis schon 1″.

Mit den so abgeleiteten mittleren Oertern wurden nun nach den Daten des Berl. Jahrb. die folgenden scheinbaren Oerter für die Beobachtungszeiten berechnet.

Tabelle VI.

Scheinbare Oerter der Sterne.

a) Südsterne.

	α app.	δ app.
δ Piscium.		
1894 Nov. 1	0h43m14s.49	7° 0′54″.19
6	14.48	54.25
7	14.48	54.22
15	14.45	54.08
Dec. 1	14.36	53.64
3	14.34	53.58
9	14.30	53.14
ε Piscium.		
1894 Nov. 30	0 57 29.98	7 19 34.98
Dec. 1	29.97	34.95
10	29.91	34.42
11	29.90	34.38
1895 Jan. 19	29.52	32.12
η Piscium.		
1894 Dec. 1	1 25 52.29	14 48 24.14
10	52.24	23.88
11	52.24	23.88
1895 Jan. 14	51.91	21.68
18	51.86	22.27
19	51.85	22.18
α Arietis.		
1894 Dec. 1	2 1 15.79	22 58 7.81
10	15.76	7.92
11	15.76	7.95
α Arietis.		
1895 Jan. 14	2h 1m15s.45	22°58′ 7″.75
18	15.40	7.48
19	15.39	7.41
μ Ceti.		
1894 Dec. 10	2 39 16.66	9 40 22.71
11	16.66	22.66
1895 Jan. 14	16.46	21.25
18	16.41	20.95
δ Tauri.		
1895 Febr. 15	4 16 53.51	17 17 54.68
π⁵ Orionis.		
1895 Febr. 15	4 48 47.88	2 16 10.52
γ Orionis.		
1895 Febr. 15	5 19 31.04	6 15 20.13
März 4	30.79	19.56
φ¹ Orionis.		
1895 Febr. 15	5 29 4.54	9 25 11.09
März. 4	4.29	10.59
S Monocerot.		
1895 März 3	6 35 13.10	9 59 36.95
5	13.07	36.91
7	13.04	36.91
8	13.02	36.96
9	13.01	36.99

	α app.	δ app.
ζ Geminor.		
1895 März 3	$6^h57^m54^s.51$	$20^\circ43'32''.91$
5	54.48	32.94
7	54.46	32.99
8	54.44	33.06
9	54.43	33.11
β Canis min.		
1895 März 3	7 21 28.98	8 30 4.24
5	28.96	4.17
8	28.92	4.18
9	28.91	4.21
l Leonis.		
1894 März 30	10 43 42.94	11 6 15.15
31	42.93	15.21
April 1	42.92	15.26
3	42.91	15.42
6	42.89	15.63
7	42.89	15.68
8	42.88	15.71
9	42.88	15.73
10	42.87	15.74
12	42.86	15.77
ι Leonis.		
1894 März 31	11 18 25.74	11 6 38.89
April 1	25.73	38.96
3	25.72	39.12
6	25.70	39.35
7	25.70	39.40
8	25.69	39.44
9	25.69	39.46
10	25.68	39.48
12	25.67	39.53
β Leonis.		
1894 März 30	11 43 41.13	15 9 43.22
o Virginis.		
1894 März 30	11 59 50.48	9 19 7.21
31	50.48	7.24
April 1	50.48	7.29
3	50.48	7.43
6	50.49	7.68
7	50.49	7.74
8	50.49	7.77
9	50.49	7.80
10	50.49	7.81
12	50.49	7.84
ε Virginis.		
1894 April 23	12 56 56.06	11 31 32.03
25	56.06	32.16
Mai 6	56.05	33.23
8	56.04	33.45
ε Virginis.		
1894 Mai 9	$12^h56^m56^s.04$	$11^\circ31'33''.52$
15	56.02	34.10
16	56.02	34.23
24	55.94	34.98
τ Bootis.		
1894 April 23	13 42 15.68	17 58 52.86
25	15.69	53.17
Mai 6	15.72	54.73
8	15.73	55.04
9	15.73	55.13
15	15.72	55.95
16	15.72	56.13
19	15.72	56.63
24	15.70	57.22
π Bootis pr.		
1894 Mai 6	14 35 46.89	16 52 7.32
16	46.93	8.82
19	46.95	9.37
24	46.96	10.07
τ^1 Serpentis.		
1894 Juni 22	15 20 54.75	15 47 55.23
23	54.75	55.36
27	54.74	56.02
28	54.73	56.20
30	54.73	56.49
γ Serpentis.		
1894 Juni 22	15 51 35.85	16 0 18.41
23	35.85	18.56
28	35.82	19.44
30	35.82	19.78
Juli 1	35.81	19.92
β Herculis.		
1894 Juni 17	16 25 42.27	21 43 5.56
22	42.28	6.43
23	42.28	6.60
28	42.28	7.68
30	42.28	8.10
Juli 1	42.28	8.29
κ Ophiuchi.		
1894 Juni 17	16 52 41.57	9 32 14.06
β Ophiuchi.		
1894 Juli 12	17 38 16.89	4 36 36.49
21	16.89	37.50
23	16.88	37.74
25	16.88	38.05
109 Herculis.		
1894 Juli 12	18 19 13.56	21 43 14.42
21	13.56	16.26
23	13.56	16.66
25	13.55	17.13

	α app.	δ app.
4 Urs. min.		
O. C.		
1894 Mai 16	14h 9m23s.75	78° 2′41″.46
19	23.62	42.42
24	23.36	43.50
ζ Urs. min.		
O. C.		
1894 Juni 22	15 47 56.59	78 7 12.79
23	56.51	13.03
27	56.25	14.01
28	56.17	14.26
30	56.03	14.71
U. C.		
1895 Febr. 15	15 47 49.30	78 6 32.49
ε Urs. min.		
O. C.		
1894 Juni 17	16 56 58.37	82 12 34.48
22	58.06	35.82
23	57.99	36.09
28	57.60	37.60
30	57.43	38.21
Juli 1	57.34	38.48
U. C.		
1895 Febr. 15	16 56 40.65	82 12 6.18
März 3	43.32	4.97
δ Urs. min.		
O. C.		
1893 Juli 12	18 6 44.23	86 36 42.11
21	39.17	44.55
23	38.75	45.09
25	38.27	45.67
U. C.		
1895 Febr. 15	18 5 53.26	86 36 19.91
März 3	58.27	17.40
4	58.57	17·30
5	58.88	17.20
7	59.49	16.95
8	59.82	16.83
9	6 0.16	16.71

	α ppp.	δ app.
λ Urs. min.		
O. C.		
1894 Juli 12	19h29m40s.99	88°58′26″.24
23	36.89	29.79
25	36.13	30.48
Oct. 5	28 19.57	47.08
11	10.65	47.37
21	27 56.22	47.83
23	53.12	47.78
24	51.66	47.74
27	47.61	47.64
U. C.		
1895 März 3	19 26 52.01	88 58 17.41
5	53.60	17.06
8	56.00	16.44
9	56.92	16.23
76 Drac. O. C.		
1894 Sept. 30	20 50 13.90	82 8 37.73
Oct. 5	13.15	38.99
9	12.53	39.76
11	12.22	40.05
21	10.58	41.77
23	10.24	42.00
24	10,07	42.09
27	9.56	42.35
γ Cephei U. C.		
1894 März 31	23 34 52.23	77 2 21.64
April 1	52.27	21.34
3	52.35	20.72
6	52.50	19.83
7	52.55	19.58
8	52.58	19.35
9	52.63	19.13
10	52.68	18.92
12	52.79	18.41
O. C.		
1894 Nov. 1	23 35 3.00	77 2 57.41
6	2.72	58.84
7	2.66	59.07
Dec. 1	0.85	3 3.92
3	0.69	4.17

Es folgt nun eine kurze Zusammenstellung der gesammten Beobachtungen. Neben dem Beobachtungsdatum und der Bezeichnung des Sterns findet sich die Angabe des Zenithpunktes und unter I die direct aus den Beobachtungen berechnete Polhöhe. Die Columnen II und III, die sich bei Berücksichtigung der Biegung ergeben, werden später besprochen werden. Nach

der Aufzählung der an einem Abend beobachteten Sterne ist das Abendmittel gebildet und den Columnen II und III der mittlere Fehler einer einzelnen Sternbreite, berechnet aus den Abweichungen vom Abendmittel, hinzugefügt worden. Die in eckige Klammern gesetzten Zahlen haben wie überall im Folgenden nur halbes Gewicht.

Tabelle VII:

Resultate der Beobachtungen.

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20′ I	II	III
		359°59′			
März 30.	*l* Leonis . . .	9″.59	6″.35	4″.93	4″.85
	β Leonis . . .	12.60	8.31	6.89	6.95
	o Virginis . . .	12.26	7.18	5.76	5.62
	4 Hev. Drac.. .	10.55	3.20	4.62	4.75
	Abendmittel	11.25	5.24	5.55	5.54
	M. F. eines Sterns			± 1.01	± 1.02
März 31.	30 Hev. Cam. .	10.53	5.26	6.68	6.81
	l Leonis . . .	12.12	5.25	3.83	3.75
	Br. 1508 . . .	12.51	4.65	6.07	6.20
	ι Leonis . . .	14.10	6.26	4.84	4.76
	γ Cephei U. . .	[14.43]	[4.13]	[5.55]	[5.42]
	o Virginis . . .	14.46	6.47	5.05	4.91
	4 Hev. Drac.. .	13.04	4.04	5.46	5.59
	Abendmittel	12.92	5.28	5.34	5.34
	M. F. eines Sterns			± 0.95	± 1.03
April 1.	30 Hev. Cam. .	12.74	3.41	4.83	4.96
	l Leonis . . .	13.87	8.85	7.43	7.35
	Br. 1508 . . .	13.90	2.73	4.15	4.28
	ι Leonis . . .	15.36	9.15	7.73	7.65
	γ Cephei U. . .	12.71	3.16	4.58	4.45
	o Virginis . . .	13.27	7.53	6.11	5.97
	4 Hev. Drac.. .	15.34	2.61	4.03	4.16
	Abendmittel	13.88	5.74	5.55	5.55
	M. F. eines Sterns			± 1.55	± 1.46
		120°1′			
April 3.	30 Hev. Cam. .	46.15	3.39	4.52	4.65
	l Leonis. . . .	46.25	5.97	4.84	4.76

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20′		
			I	II	III
		120°1′			
April 3.	Br. 1508 . . .	[46″.12]	[2″.87]	[4″.00]	[4″.13]
	ι Leonis	48.51	7.20	6.07	5.99
	γ Cephei U. . .	48.51	3.54	4.67	4.54
	o Virginis . . .	49.24	6.18	5.05	4.91
	4 Hev. Drac. . .	49.15	3.94	5.07	5.20
	Abendmittel	47.83	4.98	4.96	4.94
	M. F. eines Sterns			± 0.60	± 0.57
April 6.	30 Hev. Cam. .	48.29	4.31	5.44	5.57
	l Leonis	49.58	5.45	4.32	4.24
	ι Leonis	50.38	5.98	4.85	4.77
	γ Cephei U. . .	49.73	4.34	5.47	5.34
	o Virginis . . .	50.33	5.44	4.31	4.47
	4 Hev. Drac. . .	50.58	4.51	5.64	5.77
	Abendmittel	49.82	5.00	5.00	4.98
	M. F. eines Sterns			± 0.55	± 0.67
		240°1′			
April 7.	30 Hev. Cam. .	33.86	2.00	4.64	4.77
	l Leonis	32.99	8.11	5.47	5.39
	Br. 1508 . . .	34.98	3.36	6.00	6.13
	ι Leonis	33.14	8.18	5.54	5.46
	γ Cephei U. . .	34.50	2.02	4.66	4.53
	o Virginis . . .	35.02	8.85	6.21	6.07
	4 Hev. Drac. . .	34.04	2.60	5.24	5.37
	Abendmittel	34.08	5.44	5.39	5.39
	M. F. eines Sterns			± 0.60	± 0.60
April 8.	30 Hev. Cam. .	31.60	2.44	5.08	5.21
	l Leonis	31.49	8.69	6.05	5.97
	Br. 1508 . . .	33.12	3.96	6.60	6.73
	ι Leonis	32.48	8.42	5.78	5.70
	γ Cephei U. . .	33.63	2.51	5.15	5.02
	o Virginis . . .	[34.06]	[8.41]	[5.77]	[5.63]
	4 Hev. Drac. .	32.87	3.64	6.28	6.41
	Abendmittel	32.65	5.83	5.82	5.82
	M. F. eines Sterns			± 0.58	± 0.64
		59°59′			
April 9.	30 Hev. Cam. .	54.79	1.85	4.49	4.62
	l Leonis	56.12	9.06	6.42	6.34

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20′ I	II	III
		59°59′			
April 9.	Br. 1508 . . .	56″.90	3″.36	6″.00	6″.13
	ι Leonis	56.24	8.33	5.69	5.61
	γ Cephei U. . .	56.72	2.13	4.77	4.64
	o Virginis . . .	57.08	8.97	6.33	6.19
	4 Hev. Drac. . .	56.60	3.15	5.79	5.92
	Abendmittel	56.35	5.70	5.64	5.64
	M. F. eines Sterns			± 0.74	± 0.72
April 10.	30 Hev. Cam. .	55.38	2.17	4.81	4.94
	l Leonis	55.89	8.08	5.44	5.36
	Br. 1508 . . .	55.98	2.76	5.40	5.53
	ι Leonis	54.43	8.30	5.66	5.58
	γ Cephei U. . .	57.00	2.18	4.82	4.69
	o Virginis . . .	56.30	8.83	6.19	6.05
	4 Hev. Drac. . .	55.46	2.21	4.85	4.98
	Abendmittel	55.78	5.37	5.31	5.30
	M. F. eines Sterns			± 0.52	± 0.47
		179°59′			
April 12.	30 Hev. Cam. .	56.16	3.66	5.08	5.21
	l Leonis	56.23	7.52	6.10	6.02
	Br. 1508 . . .	55.80	3.88	5.30	5.43
	ι Leonis	56.30	6.89	5.47	5.39
	γ Cephei U. . .	55.68	4.15	5.57	5.44
	o Virginis . . .	56.60	6.57	5.15	5.01
	Abendmittel	56.13	5.44	5.44	5.42
	M. F. eines Sterns			± 0.37	± 0.34
April 23.	ε Virginis . . .	56.32	6.66	5.24	5.18
	α Urs. min. U. .	60.46	[4.05]	[5.57]	[5.44]
	τ Bootis	58.39	6.33	4.91	5.06
	Abendmittel	58.39	5.27	5.17	5.18
	M. F. eines Sterns			±[0.32]	±[0.18]
April 25.	43 Hev. Ceph. U.	45.77	3.60	5.02	4.89
	ε Virginis . . .	45.94	7.50	6.08	6.02
	α Urs. min. U. .	46.61	4.47	5.89	5.76
	τ Bootis	45.09	5.79	4.37	4.52
	Abendmittel	45.85	5.34	5.34	5.30
	M. F. eines Sterns			± 0.79	± 0.71

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20′ I	II	III
		179°59′			
Mai 6.	43 Hev. Ceph. U.	52″.07	3″.98	5″.40	5″.27
	ε Virginis . . .	52.67	6.85	5.43	5.37
	α Urs. min. U. .	53.68	3.66	5.08	4.95
	τ Bootis. . . .	52.82	6.41	4.99	5.14
	4 Urs. min. . .	54.58	3.25	4.67	4.80
	π Bootis pr. . .	52.66	6.84	5.42	5.54
	Abendmittel	53.08	5.16	5.16	5.18
	M. F. eines Sterns			± 0.31	± 0.27
		119°59′			
Mai 8.	43 Hev. Ceph. U.	40.65	4.49	5.62	5.49
	ε Virginis . . .	40.56	6.82	5.69	5.63
	α Urs. min. U. .	41.91	4.48	5.61	5.48
	τ Bootis	42.09	6.49	5.36	5.51
	Abendmittel	41.30	5.57	5.57	5.53
	M. F. eines Sterns			± 0.14	± 0.07
Mai 9.	43 Hev. Ceph. U.	39.08	2.97	4.10	3.97
	ε Virginis . . .	40.32	6.47	5.34	5.28
	α Urs. min. U. .	39.92	4.78	5.91	5.78
	τ Bootis	40.70	6.18	5.05	5.20
	Abendmittel	40.00	5.10	5.10	5.06
	M. F. eines Sterns			± 0.76	± 0.77
Mai 15.	43 Hev. Ceph. U.	38.62	2.81	3.94	3.81
	ε Virginis . . .	39.45	6.96	5.83	5.77
	α Urs. min. U. .	39.98	3.99	5.12	4.99
	τ Bootis	38.90	5.47	4.34	4.49
	4 Urs. min. . .	[40.18]	[4.26]	[5.39]	[5.52]
	Abendmittel	39.34	4.89	4.87	4.85
	M. F. eines Sterns			± 0.80	± 0.81
Mai 16.	43 Hev. Ceph. U.	37.90	2.89	4.02	3.89
	ε Virginis . . .	38.26	6.26	5.13	5.07
	α Urs. min. U. .	37.67	4.24	5.37	5.24
	τ Bootis	38.34	6.68	5.55	5.70
	4 Urs. min. . .	39.24	3.79	4.92	5.05
	π Bootis pr. . .	39.27	6.19	5.06	5.18
	Abendmittel	38.45	5.01	5.01	5.02
	M. F. eines Sterns			± 0.53	± 0.60

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20′ I	II	III
		240° 0′			
Mai 19.	α Urs. min. U. .	6″.71	2″.65	5″.29	5″.16
	τ Bootis	7.24	8.46	5.82	5.97
	4 Urs. min. . .	7.40	2.16	4.80	4.93
	π Bootis pr. . .	7.00	8.95	6.31	6.43
	Abendmittel	7.09	5.56	5.56	5.62
	M. F. eines Sterns			± 0.67	± 0.70
Mai 24.	43 Hev. Ceph. U.	5.25	2.63	5.27	5.14
	ε Virginis . . .	4.84	7.81	5.17	5.11
	α Urs. min. U. .	4.67	2.99	5.63	5.50
	τ Bootis	5.83	7.22	4.58	4.73
	4 Urs. min. . .	5.94	2.21	4.85	4.98
	π Bootis pr. . .	5.09	8.14	5.50	5.62
	Abendmittel	5.27	5.17	5.17	5.18
	M. F. eines Sterns			± 0.40	± 0.33
		239°59′			
Juni 17.	Gr. 750 U. . . .	58.78	3.47	6.11	5.98
	β Herculis . . .	58.68	6.94	4.30	4.59
	ϰ Ophiuchi . . .	59.46	8.12	5.48	5.36
	ε Urs. min. . .	58.96	3.32	5.96	6.09
	Abendmittel	58.97	5.46	5.46	5.50
	M. F. eines Sterns			± 0.82	± 0.69
		240° 0′			
Juni 22.	τ¹ Serpentis . .	11.34	6.97	4.33	4.41
	ζ Urs. min. . .	10.97	3.22	5.86	5.99
	γ Serpentis . .	11.18	8.29	5.65	5.74
	Gr. 750 U.. . .	10.53	4.05	6.69	6.56
	β Herculis . . .	12.74	7.60	4.96	5.25
	ε Urs. min. . .	12.24	2.44	5.08	5.21
	Abendmittel	11.50	5.43	5.43	5.53
	M. F. eines Sterns			± 0.82	± 0.74
		119°59′			
Juni 23.	τ¹ Serpentis . .	57.04	7.29	6.16	6.24
	ζ Urs. min. . .	57.99	4.64	5.77	5.90
	γ Serpentis . .	57.18	6.72	5.59	5.67
	Gr. 750 U.. . .	58.22	5.04	6.17	6.04

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20'		
			I	II	III
		119°59'			
Juni 23.	β Herculis . . .	57.″96	6.″16	5.″03	5.″32
	ε Urs. min. . .	57.10	3.24	4.37	4.50
	Abendmittel	57.58	5.52	5.52	5.61
	M. F. eines Sterns			± 0.70	± 0.63
Juni 27.	τ¹ Serpentis . .	57.30	6.52	5.39	5.47
	ζ Urs. min. . .	58.52	4.22	5.35	5.48
	Abendmittel	57.91	[5.37]	[5.37]	[5.48]
		120°0'			
Juni 28.	τ¹ Serpentis . .	3.02	7.25	6.12	6.20
	ζ Urs. min. . .	3.42	3.22	4.35	4.48
	γ Serpentis . .	2.00	6.14	5.01	5.09
	Gr. 750 U.. . .	3.33	4.15	5.28	5.15
	β Herculis . . .	3.05	7.03	5.90	6.19
	ε Urs. min. . .	3.94	2.77	3.90	4.03
	Abendmittel	3.13	5.09	5.09	5.19
	M. F. eines Sterns			± 0.86	± 0.88
		0°0'			
Juni 30.	τ¹ Serpentis . .	4.11	6.29	4.87	4.95
	ζ Urs. min. . .	5.92	2.82	4.24	4.37
	γ Serpentis . .	4.97	7.00	5.58	5.66
	Gr. 750 U.. . .	6.26	5.26	6.68	6.55
	β Herculis . . .	5.66	5.97	4.55	4.84
	ε Urs. min. . .	5.72	4.64	6.06	6.19
	Abendmittel	5.44	5.33	5.33	5.43
	M. F. eines Sterns			± 0.94	± 0.85
Juli 1.	γ Serpentis . .	5.32	6.38	4.96	5.04
	β Herculis . . .	5.38	6.09	4.67	4.96
	ε Urs. min. . .	6.00	4.65	6.07	6.20
	ε Urs. min. . .	6.23	4.42	5.84	5.97
	Abendmittel	5.73	5.38	5.38	5.54
	M. F. eines Sterns			± 0.68	± 0.63

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20′ I	II	III
		0°0′			
Juli 12.	β Ophiuchi . .	8″.83	6″.43	5″.01	4″.73
	δ Urs. min. . .	9.58	2.87	4.29	4.42
	109 Herculis . .	9.40	5.69	4.27	4.56
	110 Herculis . .	13.56	5.66	4.24	4.48
	51 Hev. Ceph. U.	13.82	3.68	5.10	4.97
	λ Urs. min. . .	13.65	3.30	4.72	4.85
	Abendmittel	{ 9.27 {13.68	4.60	4.60	4.67
	M. F. eines Sterns			± 0.39	± 0.22
Juli 21.	β Ophiuchi . .	9.68	6.26	4.84	4.56
	δ Urs. min. . .	8.55	3.40	4.82	4.95
	109 Herculis . .	8.50	6.12	4.70	4.96
	110 Herculis . .	8.28	5.85	4.43	4.67
	Abendmittel	8.75	4.74	4.70	4.78
	M. F. eines Sterns			± 0.19	± 0.20
Juli 23.	β Ophiuchi . .	8.05	6.62	5.20	4.92
	δ Urs. min. . .	7.96	3.95	5.37	5.50
	109 Herculis . .	8.29	5.67	4.25	4.54
	110 Herculis . .	8.01	5.94	4.52	4.76
	51 Hev. Ceph. U.	8.01	3.50	4.92	4.79
	ζ Aquilae . . .	7.34	6.01	4.59	4.60
	δ Aquilae . . .	8.58	5.81	4.39	4.07
	λ Urs. min. . .	8.15	3.92	5.34	5.47
	Abendmittel	8.05	4.90	4.82	4.83
	M. F. eines Sterns			± 0.44	± 0.48
		120° 0′			
Juli 25.	β Ophiuchi . .	42.70	7.03	5.90	5.62
	δ Urs. min. . .	42.14	3.25	4.38	4.51
	109 Herculis. .	42.34	6.49	5.36	5.65
	110 Herculis . .	43.48	6.15	5.02	5.26
	51 Hev. Ceph. U.	42.44	3.65	4.78	4.65
	ζ Aquilae . . .	41.15	6.61	5.48	5.49
	δ Aquilae . . .	41.96	6.90	5.77	5.45
	λ Urs. min. . .	41.70	3.68	4.81	4.94
	Abendmittel	42.24	5.08	5.19	5.20
	M. F. eines Sterns			± 0.53	± 0.44

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20' I	II	III
		120° 0'			
Sept. 30.	β Delphini. . .	40″.96	8″.07	6″.94	6″.97
	76 Draconis . .	41.84	4.39	5.52	5.65
	α Equulei . . .	42.47	7.45	6.32	6.04
	1 Hev. Drac. U..	[40.59]	[4.80]	[5.93]	[5.80]
	ϑ Pegasi . . .	42.35	5.69	4.56	4.31
	30 Hev. Cam. U.	43.74	4.85	5.98	5.85
	Abendmittel	42.12	5.86	5.87	5.77
	M. F. eines Sterns			± 0.84	± 0.90
Oct. 5.	γ Sagittae . . .	42.64	5.97	4.84	5.04
	λ Urs. min. . .	40.71	3.76	4.89	5.02
	β Delphini. .	40.65	6.89	5.76	5.79
	76 Draconis . .	41.55	3.98	5.11	5.24
	α Equulei . . .	41.15	6.11	4.98	4.70
	1 Hev. Drac. U..	41.10	3.72	4.85	4.72
	ε Pegasi. . . .	41.48	6.34	5.23	5.09
	Abendmittel	41.33	5.07	5.09	5.09
	M. F. eines Sterns			± 0.33	± 0.37
Oct. 9.	γ Sagittae . . .	39.44	6.54	5.41	5.61
	β Delphini. . .	39.56	6.39	5.26	5.29
	76 Draconis . .	[39.54]	[4.81]	[5.94]	[6.07]
	α Equulei . . .	40.19	6.33	5.20	4.92
	1 Hev. Drac. U..	49.32	4.26	5.39	5.26
	ε Pegasi. . . .	49.36	6.62	5.49	5.35
	ϑ Pegasi . . .	[49.70]	[5.68]	[4.55]	[4.30]
	30 Hev. Cam. U.	50.15	4.43	5.56	5.43
	Abendmittel	{39.70 49.62	5.41	5.36	5.29
	M. F. eines Sterns			± 0.31	± 0.42
		240° 0'			
Oct. 11.	γ Sagittae . . .	23.53	8.98	6.34	6.54
	λ Urs. min. . .	23.00	2.23	4.87	5.00
	β Delphini. . .	23.84	7.14	4.50	4.53
	76 Draconis . .	23.79	2.98	5.62	5.75
	α Equulei . . .	22.54	7.07	4.43	4.15
	1 Hev. Drac. U..	23.43	2.46	5.10	4.97

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20'		
			I	II	III
		240° 0'			
Oct. 11.	ε Pegasi. . . .	23.″19	7.″37	4.″73	4.″59
	30 Hev. Cam. U.	23.14	2.42	5.06	4.93
	Abendmittel	23.31	5.08	5.08	5.06
	M. F. eines Sterns			± 0.63	± 0.76
Oct. 18.	γ Sagittae . . .	21.19	8.12	5.48	5.68
Oct. 21.	γ Sagittae . . .	20.68	8.61	5.97	6.17
	λ Urs. min. . .	21.00	2.47	5.11	5.24
	β Delphini. . .	20.95	7.53	4.89	4.92
	76 Draconis . .	20.20	2.39	5.03	5.16
	α Equulei . . .	20.13	7.80	5.16	4.89
	1 Hev. Drac. U..	20.20	2.52	5.16	5.03
	ε Pegasi. . . .	21.25	8.53	5.89	5.75
	30 Hev. Cam. U.	19.20	2.32	4.96	4.83
	Abendmittel	20.53	5.27	5.29	5.29
	M. F. eines Sterns			± 0.40	± 0.46
		0° 0'			
Oct. 23.	γ Sagittae . . .	18.75	6.57	5.15	5.35
	λ Urs. min. . .	16.95	3.50	4.92	5.05
	β Delphini. . .	17.63	6.04	4.62	4.65
	76 Draconis . .	17.71	4.60	6.02	6.15
	α Equulei . . .	18.40	7.34	5.92	5.64
	1 Hev. Drac. U..	18.55	3.04	4.46	4.33
	ε Pegasi. . . .	19.38	6.75	5.33	5.19
	30 Hev. Cam. U.	17.75	3.92	5.34	5.21
	Abendmittel	18.14	5.22	5.22	5.20
	M. F. eines Sterns			± 0.56	± 0.56
Oct. 24.	γ Sagittae . . .	17.42	6.48	5.06	5.26
	λ Urs. min. . .	16.47	4.06	5.48	5.61
	β Delphini. . .	17.09	7.35	5.93	5.96
	76 Draconis . .	17.84	4.19	5.61	5.74
	Abendmittel	17.20	5.52	5.52	5.64
	M. F. eines Sterns			± 0.36	± 0.29
Oct. 27.	γ Sagittae . . .	17.56	7.85	6.43	6.63
	λ Urs. min. . .	16.73	3.50	4.92	5.05
	β Delphini. . .	16.62	7.12	5.70	5.73
	76 Draconis . .	16.97	4.26	5.68	5.81

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20′ I	II	III
		0° 0′			
Oct. 27.	α Equulei . . .	17″.75	7″.40	5″.98	5″.70
	1 Hev. Drac. U..	17.30	3.76	5.18	5.05
	ε Pegasi. . . .	16.96	8.57	7.15	7.01
	30 Hev. Cam. U.	16.89	2.95	4.37	4.24
	Abendmittel	17.10	5.68	5.68	5.65
	M. F. eines Sterns			± 0.87	± 0.89
Nov. 1.	30 Hev. Cam. U.	24.71	3.18	4.60	4.47
	ζ Pegasi. . . .	24.44	5.98	4.56	4.46
	Br. 1508 U. . .	25.42	4.41	5.83	5.70
	70 Pegasi . . .	23.48	5.77	4.35	4.32
	γ Cephei . . .	25.02	3.56	4.98	5.11
	ω Piscium . . .	25.64	7.01	5.59	5.36
	4 Hev. Drac. U..	25.87	4.77	6.19	6.06
	δ Piscium . . .	26.90	6.62	5.20	4.99
	Abendmittel	25.18	5.16	5.16	5.06
	M. F. eines Sterns			± 0.66	± 0.62
Nov. 6.	ζ Pegasi. . . .	14.40	7.12	5.70	5.60
	70 Pegasi . . .	14.30	5.70	4.28	4.25
	γ Cephei . . .	15.22	4.20	5.62	5.75
	ω Piscium . . .	15.04	7.57	6.15	5.92
	4 Hev. Drac. U..	15.98	4.35	5.77	5.64
	δ Piscium . . .	15.66	6.74	5.32	5.11
	Abendmittel	15.10	5.53	5.47	5.38
	M. F. eines Sterns			± 0.64	± 0.62
Nov. 7.	30 Hev. Cam. U.	29.58	3.72	5.14	5.01
	ζ Pegasi . . .	28.79	6.59	5.17	5.07
	Br. 1508 U. . .	29.15	3.96	5.38	5.25
	70 Pegasi . . .	28.16	7.08	5.66	5.63
	γ Cephei . . .	29.56	3.65	5.07	5.20
	ω Piscium . . .	28.92	7.35	5.93	5.70
	4 Hev. Drac. U. .	29.60	4.39	5.81	5.68
	δ Piscium . . .	29.24	6.94	5.52	5.31
	Abendmittel	29.12	5.46	5.46	5.36
	M. F. eines Sterns			± 0.32	± 0.28
		240° 0′			
Nov. 15.	30 Hev. Cam. U.	46.73	2.99	5.63	5.50
	ζ Pegasi. . . .	48.18	6.54	3.90	3.80

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51° 20′ I	II	III
		240° 0′			
Nov. 15.	Br. 1508 U. . .	48″.20	3″.40	6″.04	5″.91
	70 Pegasi . . .	47.04	7.75	5.11	5.08
	4 Hev. Drac. U. .	47.71	3.53	6.17	6.04
	δ Piscium . . .	48.22	8.57	5.93	5.72
	Abendmittel	47.68	5.46	5.46	5.34
	M. F. eines Sterns			± 0.85	± 0.83
Nov. 30.	α Urs. min. . .	47.07	2.65	5.29	5.42
	ε Piscium . . .	46.77	8.62	5.98	5.78
	α Urs. min. . .	47.66	2.64	5.28	5.41
	Abendmittel	47.17	[5.63]	[5.52]	[5.54]
	M. F. eines Sterns			[± 0.40]	[± 0.21]
Dec. 1.	30 Hev. Cam. U.	41.56	2.28	4.92	4.79
	ζ Pegasi . . .	41.86	7.01	4.37	4.27
	Br. 1508 U. . .	41.15	3.09	5.73	5.60
	70 Pegasi . . .	41.76	6.82	4.18	4.15
	γ Cephei . . .	43.04	2.37	5.01	5.14
	ω Piscium . . .	42.26	7.63	4.99	4.76
	4 Hev. Drac. U. .	42.20	2.96	5.60	5.47
	δ Piscium . . .	42.06	7.48	4.84	4.63
	ε Piscium . . .	42.39	8.10	5.46	5.26
	α Urs. min. . .	42.39	2.84	5.48	5.61
	η Piscium . . .	43.93	7.70	5.06	5.10
	α Urs. min. . .	42.84	1.33	3.97	4.10
	α Arietis . . .	42.69	7.02	4.38	4.72
	α Urs. min. . .	[42.85]	[2.47]	[5.11]	[5.24]
	Abendmittel	42.34	4.94	4.93	4.90
	M. F. eines Sterns			± 0.55	± 0.52
		120° 0′			
Dec. 3.	30 Hev. Cam. U.	59.80	5.13	6.26	6.13
	ζ Pegasi . . .	58.82	5.58	4.45	4.35
	Br. 1508 U. . .	58.76	4.94	6.07	5.94
	70 Pegasi . . .	59.23	5.49	4.36	4.33
	γ Cephei . . .	59.50	4.63	5.76	5.89
	ω Piscium . . .	58.55	6.52	5.39	5.16
	4 Hev. Drac. U. .	58.98	4.18	5.31	5.18
	δ Piscium . . .	58.23	6.59	5.46	5.25
	Abendmittel	58.98	5.38	5.38	5.28
	M. F. eines Sterns			± 0.69	± 0.69

1894	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51° 20′ I	II	III
		120° 1′			
Dec. 9.	30 Hev. Cam. U.	2″.74	5″.48	6″.61	6″.48
	ζ Pegasi.	2.51	6.69	5.56	5.46
	Br. 1508 U. . .	3.51	4.71	5.84	5.71
	70 Pegasi . . .	2.53	5.27	4.14	4.11
	δ Piscium . . .	2.06	6.38	5.23	5.02
	Abendmittel	2.67	5.60	5.48	5.36
	M. F. eines Sterns			± 0.90	± 0.88
		120° 0′			
Dec. 10.	α Urs. min. . .	59.41	4.17	5.30	5.43
	ε Piscium . . .	62.20	6.77	5.64	5.44
	α Urs. min. . .	60.55	5.26	6.39	6.52
	η Piscium . . .	61.59	5.24	4.11	4.15
	α Urs. min. . .	60.74	5.40	6.53	6.66
	α Arietis . . .	60.60	5.42	4.29	4.63
	μ Ceti	60.18	5.87	4.74	4.61
	Abendmittel	60.75	5.38	5.29	5.35
	M. F. eines Sterns			± 0.96	± 0.97
Dec. 11.	α Urs. min. . .	61.47	4.15	5.28	5.41
	ε Piscium . . .	62.68	7.04	5.91	5.71
	α Urs. min. . .	62.36	4.05	5.18	5.31
	η Piscium . . .	62.42	7.02	5.89	5.93
	α Urs. min. . .	61.51	3.61	4.74	4.87
	α Arietis . . .	62.17	6.38	5.25	5.59
	α Urs. min. . .	59.85	3.00	4.13	4.26
	μ Ceti	61.67	6.55	5.42	5.29
	Abendmittel	61.77	5.22	5.22	5.30
	M. F. eines Sterns			± 0.58	± 0.52
1895		0° 2′			
Jan. 14.	α Urs. min. . .	3.88	3.66	4.48	4.61
	η Piscium . . .	4.79	5.82	5.00	5.04
	α Urs. min. . .	4.84	3.74	4.56	4.69
	α Arietis . . .	6.10	6.42	5.60	5.94
	α Urs. min. . .	5.42	3.34	4.16	4.29
	μ Ceti	6.63	5.65	4.83	4.70
	Abendmittel	5.28	4.77	4.77	4.88
	M. F. eines Sterns			± 0.50	± 0.57

1895	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20′ I	II	III
		0° 2′			
Jan. 18.	α Urs. min. . .	1″.29	5″.44	6″.26	6″.39
	η Piscium . . .	2.99	6.25	5.43	5.47
	α Urs. min. . .	1.87	4.22	5.04	5.17
	α Arietis . . .	3.20	6.53	5.71	6.05
	α Urs. min. . .	2.19	4.07	4.89	5.02
	μ Ceti	3.89	6.62	5.80	5.67
	Abendmittel	2.57	5.52	5.52	5.63
	M. F. eines Sterns			± 0.51	± 0.52
Jan. 19.	α Urs. min. . .	5.14	5.60	6.42	6.55
	ε Piscium . . .	6.26	6.74	5.92	5.72
	α Urs. min. . .	4.76	5.43	6.25	6.38
	η Piscium . . .	6.57	6.29	5.47	5.51
	α Urs. min. . .	4.44	4.97	5.79	5.92
	α Arietis . . .	5.48	5.77	4.95	5.29
	α Urs. min. . .	4.42	4.99	5.81	5.94
	Abendmittel	5.30	5.76	5.80	5.90
	M. F. eines Sterns			± 0.49	± 0.45
		0° 1′			
Febr. 15.	ζ Urs. min. U. .	54.02	4.64	5.46	5.33
	δ Tauri	53.96	6.27	5.45	5.58
	Gr. 750	54.26	3.43	4.25	4.38
	π^5 Orionis. . .	53.92	6.80	5.98	5.63
	ε Urs. min. U. .	54.16	4.47	5.29	5.16
	γ Orionis . . .	55.88	6.09	5.27	5.04
	φ^1 Orionis . . .	54.54	6.63	5.81	5.68
	δ Urs. min. U. .	53.77	4.80	5.62	5.49
	Abendmittel	54.31	5.39	5.39	5.29
	M. F. eines Sterns			± 0.52	± 0.43
März 3.	δ Urs. min. U. .	55.02	4.65	5.47	5.34
	S Monocerotis .	54.15	7.02	6.20	6.09
	ζ Geminorum .	54.82	6.01	5.19	4.44
	51 Hev. Ceph. .	54.70	5.38	6.20	6.33
	β Can. min. . .	55.14	7.20	6.38	6.22
	λ Urs. min. . .	55.03	5.16	5.98	5.85
	Abendmittel	54.81	5.90	5.90	5.88
	M. F. eines Sterns			± 0.47	± 0.41

1895	Stern	Zenithpkt.	Polhöhe = 51°20′ I	II	III
		0° 2′			
März 4.	ε Urs. min. U. .	0″.48	5″.90	6″.72	6″.59
	γ Orionis . . .	1.14	6.58	5.76	5.53
	φ¹ Orionis. . .	0.75	6.55	5.73	5.60
	δ Urs. min. U. .	0.35	5.17	5.99	5.86
	Abendmittel	0.68	6.05	6.05	5.90
	M. F. eines Sterns			± 0.46	± 0.48
		0° 1′			
März 5.	δ Urs. min. U. .	60.19	5.19	6.01	5.88
	S Monocerotis .	60.99	6.59	5.77	5.66
	ζ Geminorum .	60.64	5.72	4.90	5.15
	51 Hev. Ceph. .	61.12	5.18	6.00	6.13
	β Canis min.. .	60.20	7.39	6.57	6.41
	λ Urs. min. U. .	59.77	5.07	5.89	5.76
	Abendmittel	60.48	5.86	5.86	5.83
	M. F. eines Sterns			± 0.54	± 0.43
		240° 2′			
März 7.	δ Urs. min. U. .	30.42	4.35	5.62	5.49
	S Monocerotis .	29.86	6.65	5.38	5.27
	ζ Geminorum .	30.12	7.01	5.74	5.99
	51 Hev. Ceph. .	30.05	3.98	5.25	5.38
	Abendmittel	30.11	5.50	5.50	5.53
	M. F. eines Sterns			± 0.22	± 0.32
März 8.	δ Urs. min. U. .	28.70	5.05	6.32	6.19
	S Monocerotis .	28.80	7.14	5.87	5.76
	ζ Geminorum .	28.66	6.66	5.39	5.64
	51 Hev. Ceph. .	28.96	3.70	4.97	5.10
	β Can. min. . .	29.69	6.73	5.46	5.30
	λ Urs. min. U. .	28.37	4.43	5.70	5.57
	Abendmittel	28.86	5.62	5.62	5.59
	M. F. eines Sterns			± 0.46	± 0.38
		120° 2′			
März 9.	δ Urs. min. U. .	16.47	5.61	6.07	5.94
	S Monocerotis .	16.20	6.03	5.57	5.46
	ζ Geminorum .	16.66	5.58	5.12	5.37
	51 Hev. Ceph. .	15.38	5.02	5.48	5.61
	β Can. min. . .	16.25	6.92	6.46	6.30
	λ Urs. min. U. .	16.18	5.12	5.58	5.45
	Abendmittel	16.19	5.71	5.71	5.69
	M. F. eines Sterns			± 0.48	± 0.36

Discussion der Beobachtungsergebnisse.

Beim ersten Anblick tritt auch hier der starke Unterschied zwischen Nord- und Südsternen in Evidenz und zwar variirt derselbe wieder mit den Kreisständen. Um diesen Unterschied, den man gewöhnlich als Biegung zu bezeichnen und dem Sinus der Zenithdistanz proportional anzunehmen pflegt, zu eliminiren, musste auch hier eine Annahme über seine Abhängigkeit von der Zenithdistanz gemacht werden.

Es schien am bequemsten, ihn als constant anzusehen, da sich unter dieser Annahme die Rechnung am einfachsten gestaltet, — man hat nur für jeden Abend das Mittel der Polhöhen aus den Nordsternen, φ_N, und den Südsternen, φ_S, zu bilden, dann ist $b = \frac{1}{2}(\varphi_S - \varphi_N)$ die mit passendem Vorzeichen an beide Sternarten anzubringende Biegungscorrection und $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_S + \varphi_N)$ der Abendmittelwerth der Polhöhe — und, wie schon oben bemerkt, der Einfluss verschiedener Annahmen bei der getroffenen Auswahl der Sterne auf das Abendmittel sehr gering ist.

So wurde zunächst für jeden einzelnen Abend eine solche Biegungsconstante b abgeleitet und dann auch in grösserer Zusammenfassung aus den aufeinanderfolgenden Abenden gleichen Kreisstandes. Eine Zusammenstellung der so erhaltenen Werthe der Biegungsconstanten (s. Tabelle VIII) ergab, dass dieselben zwar für die einzelnen Kreisstände merklich verschieden, aber für einen bestimmten Stand längere Zeit hindurch als constant anzusehen sind, und dass man sonach für diese Zeit Mittelwerthe anwenden kann. Die gesammte Beobachtungsreihe war nur in zwei Theile zu zerlegen, zwischen denen in allen drei Ständen eine erhebliche Verminderung der Biegung eingetreten ist. Der erste Theil umfasst den weitaus grössten Abschnitt der Beobachtungsreihe mit 48 Abenden, der zweite die letzten 10 Abende. Ob diese Aenderung des Zustandes des Instrumentes mit einer grösseren Reinigung, die dasselbe um Mitte December 1894 erfuhr, — ohne auseinander genommen zu werden — zusammenhängt, muss dahingestellt bleiben. Im Folgenden sind sämmtliche Abendwerthe und die zusammenfassenden Gruppenwerthe für die Biegungsconstante angeführt, wobei noch neben jede Sterngruppe die mittlere Zenithdistanz derselben gesetzt ist, damit man über eine etwaige Abhängigkeit der Biegung von der Zenithdistanz ein Urtheil gewinnen kann. Alle Abendwerthe, zu denen nicht wenigstens je zwei Nord-

und Südsterne verwendet werden konnten, erhielten halbes Gewicht. Als mittlerer Fehler eines einzigen Abendwerthes für die Biegung findet sich: ± 0″4.

Tabelle VIII.
Uebersicht der Werthe der Biegungsconstanten.
1894 März — December.

Gruppe.	Stand 0° Datum	Stand 0° Abend-Mittel	Stand 0° Gruppen-Mittel	Stand 120° Datum	Stand 120° Abend-Mittel	Stand 120° Gruppen-Mittel	Stand 240° Datum	Stand 240° Abend-Mittel	Stand 240° Gruppen-Mittel
I. 37°6	Mrz. 30	[2″04]		April 3	1″47		April 7	2″94	
	31	0.71		6	0.62		8	2.69	
	April 1	2.77					9	3.08	
	12	1.55	1″74			1″06	10	3.04	2″94
II. 36°2	Apr. 23	[1.22]		Mai 8	1.09		Mai 19	3.45	
	25	1.30		9	1.22		24	2.56	
	Mai 6	1.54		15	1.33				
			1.41	16	1.37	1.27			2.79
III. 33°6	Juni 30	1.09		Juni 23	1.21		Juni 17	2.07	
	Juli 1	0.85		27	[1.45]		22	2.19	
			1.02	28	1.71	1.42			2.14
IV. 38°4	Juli 12	1.32		Juli 25	1.55				
	21	[1.34]							
	23	1.11	1.24			[1.55]			
V. 39°8	Oct. 23	1.46		Spt. 30	1.21		Oct. 11	2.56	
	24	1.40		Oct. 5	1.25		21	2.85	
	27	2.06	1.68	9	0.97	1.13			2.72
VI. 42°7	Nov. 1	1.18		Dec. 3	0.66		Nov. 15	2.16	
	6	1.25		9	0.51		Dec. 1	2.28	
	7	1.53	1.34			0.61			2.23
VII. 37°5				Dec. 10	0.44		Nov. 30	[2.99]	
				11	1.52	1.03	Dec. 1	2.72	2.74
Mittel:		1″42 ± 0.12			1″13 ± 0.10			2″64 ± 0.10	

1895 Januar — März.

Gruppe.	Stand 0° Datum	Abend-	Gruppen-Mittel	Stand 120° Datum	Abend-	Gruppen-Mittel	Stand 240° Datum	Abend-	Gruppen-Mittel
VII. 37°5	Jan. 14	1''19							
	18	0.94							
	19	0.51	0''84						
VIII. 42°9	Fbr. 15	1.06							
	März 4	0.52	0.88						
IX. 38°7	März 3	0.84		März 9	0''46		März 7	1''33	
	5	0.71	0.77				8	1.22	1''27
Mittel:		0''82 ± 0.10			0''46 ± 0.4			1''27 ± 0.3	

Mit diesen Mittelwerthen

$b_0 = 1''42$, $b_{120} = 1''13$, $b_{240} = 2''64$ für den ersten Theil
$b_0 = 0''82$, $b_{120} = 0''46$, $b_{240} = 1''27$ » » zweiten »

der Beobachtungsreihe sind nun sämmtliche Beobachtungen reducirt worden. Dabei wurde jetzt das Abendmittel der Polhöhe als Mittel sämmtlicher Sterne des betreffenden Abends gebildet; dasselbe wird mit dem früheren natürlich übereinstimmen, sobald die gleiche Anzahl von Nord- und Südsternen vorliegt, und sonst nur ein wenig abweichen. So ergaben sich die in der früheren Uebersicht (Tab. VII) unter II aufgeführten Werthe.

Bemerkt mag hier noch werden, dass eine Nichtberücksichtigung der systematischen Theilungsfehler des Kreises auch weder eine bessere Uebereinstimmung der Werthe der Biegungsconstanten in den drei Ständen, noch eine wesentliche Verringerung derselben bewirkt hätte; denn gerade im dritten Kreisstande ($Z = 240°$) mit der grössten Biegungsconstanten ist der Einfluss der Theilungsfehler sehr gering.

Es war nun noch zu untersuchen, ob die über die Constanz der Biegung für verschiedene Zenithdistanzen gemachte Annahme berechtigt gewesen war. Denn wenn auch die Abendmittel dadurch nur wenig beeinflusst wurden, so musste doch ihr Einfluss auf die einzelnen Sternbreiten ein merklicher sein. Bei

den geringen Unterschieden in Zenithdistanz, in der die beobachteten Sterne culminiren, konnte aus einer Discussion der einzelnen Abende, ja auch der einzelnen Sterngruppen, keine Entscheidung hierüber erwartet werden, da die zufälligen Beobachtungs- und Theilungsfehler sie vereiteln mussten. Eine Betrachtung der Gruppenwerthe der Biegungsconstanten liess auch keinen sicheren Schluss über eine etwaige Abhängigkeit von der Zenithdistanz zu, was auch bei den geringen Unterschieden in der mittleren Zenithdistanz der einzelnen Gruppen nicht weiter wunderbar ist. Indessen konnte erwartet werden, dass eine Discussion des gesammten Beobachtungsmaterials mehr ergeben würde. Daher wurden für jeden einzelnen Stern, der an mindestens vier Abenden beobachtet war, das Mittel der aus ihm allein folgenden Polhöhenwerthe und dessen Abweichung vom Mittel der gesammten Sterngruppe gebildet; diese Abweichung konnte — natürlich noch implicite den Fehler der angenommenen Declination des Sterns enthaltend — als Correction der gemessenen Zenithdistanz angesehen werden. Oder, was dasselbe ist, es wurde für jeden Stern die Verbesserung seiner Declination, bezogen auf das Mittel der Sterne derselben Gruppe, abgeleitet und diese Werthe nach der Zenithdistanz geordnet. War die Biegung nicht constant, sondern in irgend einer Weise von der Zenithdistanz abhängig, so musste sich in den Correctionen diese Abhängigkeit aussprechen. In der Tabelle IX sind die in Tab. VII unter II aufgeführten einzelnen Polhöhen nach Gruppen zusammengefasst, die Abendmittel, Gruppenmittel und Sternmittel gebildet und letzteren der mittlere Fehler einer Bestimmung hinzugefügt.

Tabelle IX.

Zusammenstellung der Resultate nach Sterngruppen.

Gruppe I.

Datum	30 Hev. Cam.	l Leonis	Br. 1508	ι Leonis	γ Cephei	o Virginis	4 Hev. Drac.	φ
1894 März 30	—	4″.98	—	(6″.89)*)	—	5″.76	4″.62	[5″.55]
31	6″.68	3.83	6″.07	4.84	[5″.55]	5.05	5.46	5.34
April 1	4.83	7.43	4.15	7.73	4.58	6.11	4.03	5.55
3	4.52	4.84	[4.00]	6.07	4.67	5.05	5.07	4.96
6	5.44	4.32	—	4.85	5.47	4.34	5.64	5.00
7	4.64	5.47	6.00	5.54	4.66	6.21	5.24	5.39

*) An diesem Tage ist nicht ι, sondern β Leonis beobachtet.

Datum	30 Hev. Cam.	l Leonis	Br. 1508	ι Leonis	γ Cephei	o Virginis	4 Hev. Drac.	φ
1894 April 8	5″.08	6″.05	6″.60	5″.78	5″.15	[5″.77]	6″.28	5″.82
9	4.49	6.42	6.00	5.69	4.77	6.33	5.79	5.64
10	4.81	5.44	5.40	5.66	4.82	6.19	4.85	5.31
12	5.08	6.10	5.30	5.47	5.57	5.15	—	5.44
Mittel	5.06	5.48	5.54	5.74	5.00	5.58	5.44	5.39
M. F. einer Best.	±0.68	±1.15	±0.88	±0.85	±0.40	±0.69	±0.71	

Gruppe II.

Datum	43 Hev. Ceph.	e Virginis	α Urs. min.	τ Bootis	4 Urs. min.	π Bootis pr.	φ
1894 April 23	—	5″.24	[5″.57]	4″.91	—	—	[5″.17]
25	5″.02	6.08	5.89	4.37	—	—	5.34
Mai 6	5.40	5.43	5.08	4.99	4″.67	5″.42	5.16
8	5.62	5.69	5.61	5.36	—	—	5.57
9	4.10	5.34	5.91	5.05	—	—	5.10
15	3.94	5.83	5.12	4.34	[5.39]	—	4.87
16	4.02	5.13	5.37	5.55	4.92	5.06	5.01
19	—	—	5.29	5.82	4.80	6.31	5.56
24	5.27	5.17	5.63	4.58	4.85	5.50	5.17
Mittel	4.77	5.49	5.49	5.00	4.87	5.35	5.22
M. F. einer Best.	±0.72	±0.38	±0.31	±0.52	±0.23	±0.53	

Gruppe III.

Datum	τ^1 Serpentis	ζ Urs. min.	γ Serpentis	Gr. 750	β Herculis	ε Urs. min.	$\varkappa$ Ophiuchi	φ
1894 Juni 17	—	—	—	6″.11	4″.30	5″.96	5″.48	5″.46
22	4″.33	5″.86	5″.65	6.69	4.96	5.08	—	5.43
23	6.16	5.77	5.59	6.17	5.03	4.87	—	5.52
27	5.39	5.35	—	—	—	—	—	[5.37]
28	6.12	4.35	5.04	5.28	5.90	3.90	—	5.09
30	4.87	4.24	5.58	6.68	4.55	6.06	—	5.33
Juli 1	—	—	4.96	—	4.67	{6.07 {5.84	—	5.38
Mittel	5.37	5.11	5.36	6.19	4.90	5.22		5.37
M. F. einer Best.	±0.79	±0.77	±0.34	±0.60	±0.56	±0.93		

Gruppe IV.

Datum	β Ophiuchi	δ Urs. min.	109 Herc.	110 Herc.	51 Hev. Ceph.	ζ Aquilae	δ Aquilae	λ Urs. min.	φ
1894 Juli 12	5″.01	4″.29	4″.27	4″.24	5″.10	—	—	4″.72	4″.60
21	4.84	4.82	4.70	4.43	—	—	—	—	4.70
23	5.20	5.37	4.25	4.52	4.92	4″.59	4″.39	5.34	4.82
25	5.90	4.38	5.36	5.02	4.78	5.48	5.77	4.81	5.19
Mittel	5.24	4.72	4.65	4.55	4.98	5.04	5.08	4.96	4.83
M. F. ein. Best.	±0.47	±0.49	±0.52	±0.33	±0.16	—	—	±0.34	

Gruppe V.

Datum	γ Sagittae	λ Urs. min.	β Delph.	76 Drac.	α Equulei	1 Hev. Drac.	ε Pegasi	ϑ Pegasi	30 Hev. Cam.	φ
1894 Sept. 30	—	—	6″.94	5″.52	6″.32	[5″.93]	—	4″.56	5″.98	5″.87
Oct. 5	4″.84	4″.89	5.76	5.11	4.98	4.85	5″.23	—	—	5.09
9	5.41	—	5.26	[5.94]	5.20	5.39	5.49	[4.55]	5.56	5.36
11	6.34	4.87	4.50	5.62	4.43	5.10	4.78	—	5.06	5.08
18	5.46	—	—	—	—	—	—	—	—	—
21	5.97	5.11	4.89	5.03	5.16	5.16	5.89	—	4.96	5.27
23	5.15	4.92	4.62	6.02	5.92	4.46	5.33	—	5.34	5.22
24	5.06	5.48	5.93	5.61	—	—	—	—	—	5.52
27	6.43	4.92	5.70	5.68	5.98	5.18	7.15	—	4.37	5.68
Mittel	5.58	5.03	5.45	5.54	5.43	5.09	5.64	—	5.21	5.39
M. F. einer Best.	±0.57	±0.24	±0.81	±0.35	±0.67	±0.41	±0.83		±0.55	

Gruppe VI.

Datum	30 Hev. Cam.	ζ Pegasi	Br. 1508	70 Pegasi	γ Cephei	ω Piscium	4 Hev. Drac.	δ Piscium	φ
1894 Nov. 1	4″.60	4″.56	5″.83	4″.35	4″.98	5″.59	6″.19	5″.20	5″.16
6	—	5.70	—	4.28	5.62	6.15	5.77	5.32	5.47
7	5.14	5.17	5.88	5.66	5.07	5.93	5.81	5.52	5.16
15	5.63	3.90	6.04	5.11	—	—	6.17	5.93	5.46
Dec. 1	4.92	4.37	5.73	4.18	5.01	4.99	5.60	4.84	4.96
3	6.26	4.45	6.07	4.36	5.76	5.39	5.31	5.46	5.38
9	6.61	5.56	5.84	4.14	—	—	—	5.23	5.48
Mittel	5.53	4.82	5.82	4.58	5.29	5.51	5.81	5.36	5.34
M. F. ein. Best.	±0.79	±0.67	±0.25	±0.58	±0.37	±0.47	±0.35	±0.34	

Gruppe VII.

Datum	α Urs. min.	ε Piscium	α Urs. min.	η Piscium	α Urs. min.	α Arietis	α Urs. min.	μ Ceti	φ
1894 Nov. 30	5″.29	5″.98	5″.28	—	—	—	—	—	5″.52
Dec. 1	—	5.46	5.48	5″.06	3″.97	4″.38	[5″.14]	—	4.89
10	5.30	5.64	6.39	4.11	6.53	4.29	—	4″.74	5.29
11	5.28	5.91	5.18	5.89	4.74	5.25	4.13	5.42	5.22
1895 Jan. 14	—	—	4.48	5.00	4.56	5.60	4.16	4.83	4.77
18	—	—	6.26	5.43	5.04	5.71	4.89	5.80	5.52
19	6.42	5.92	6.25	5.47	5.79	4.95	5.81	—	5.80
Mittel	5.57	5.78	5.62	5.16	5.10	5.03	4.79	5.20	5.27
M. F. ein. Best.	±0.57*)	±0.20	±0.71	±0.64	±0.90	±0.60	±0.74	±0.50	

*) Zieht man alle Beobachtungen von α Urs. min. zusammen, so folgt: 5″.29 und als mittlerer Fehler einer Bestimmung: ± 0″.57.

Gruppe VIII.

Datum	ζ Urs. min.	δ Tauri	Gr. 750	π^4 Orionis	ε Urs. min.	γ Orionis	φ^1 Orionis	δ Urs. min.	φ
1895 Febr. 15	5".46	5".45	4".25	5".98	5".29	5".27	5".84	5".62	5".39
März 4	—	—	—	—	6.72	5.76	5.73	5.99	6.05

Gruppe IX.

Datum	δ Urs. min.	S Monoc.	ζ Gemin.	51 Hev. Ceph.	β Can. min.	λ Urs. min.	φ
1895 März 3	5".47	6".20	5".19	6".20	6".38	5".98	5".90
5	6.01	5.77	4.90	6.00	6.57	5.89	5.86
7	5.62	5.38	5.74	5.25	—	—	5.50
8	6.32	5.87	5.39	4.97	5.46	5.70	5.62
9	6.07	5.57	5.12	5.48	6.46	5.58	5.71
Mittel	5.90	5.76	5.27	5.58	6.22	5.79	5.72
M. F. einer Best.	±0.35	±0.34	±0.32	±0.51	±0.51	±0.18	

Wir bilden jetzt Mittelwerthe aus den Abweichungen der einzelnen Sternmittel vom Gruppenmittel, indem wir die Südsterne zu je 5° Zenithdistanz zusammenfassen, hingegen bei den Nordsternen die oberen und unteren Culminationen in je zwei Gruppen zerlegen, und bestimmen die mittlere Verbesserung Δz der gemessenen Zenithdistanz, welche diese Abweichungen zum Verschwinden bringen würde; so ergiebt sich das folgende Resultat:

Südsterne.

		$28^\circ < z < 33^\circ$	$33^\circ < z < 38^\circ$	$38^\circ < z < 43^\circ$	$43^\circ < z < 48^\circ$
Mittl. Zenithdist.		30°12′	35°23′	41°1′	45°19′
Zahl der Sterne		6	6	10	5
$\Delta z =$	I	+0".24	−0".01	−0".04	−0".24
	II	+0.275	+0.032	−0.057	−0.254

Nordsterne.

		Obere Culmination		Untere Culmination	
		$\delta < 85^\circ$	$\delta > 85^\circ$	$\delta > 85^\circ$	$\delta < 85^\circ$
Mittlere Zenithdistanz		28°19′	36°33′	41°35′	48°59′
Zahl der Sterne		8	4	6	5
$\Delta z =$	I	−0".10	−0".10	+0".17	+0".05
	II	−0.100	−0.125	+0.153	+0.058

Hierin unterscheiden sich die Zeile I und II derart, dass I die zuerst erhaltenen Resultate giebt. Infolge der Correctionen, zu denen die unten folgende Discussion dieser Tabelle führt, werden die Gruppenmittel zum Theil ein wenig verändert und auf diese veränderten Gruppenmittel beziehen sich die Werthe der Zeile II. Eine nochmalige Vornahme dieser Operation führt keine merklichen Aenderungen mehr herbei.

Wenn die Abhängigkeit der Biegung von der Zenithdistanz durch die Form $b \sin z$ dargestellt würde, so müssten, da die Zenithdistanzen von mir stets zu gross erhalten sind, die Correctionen für grössere Zenithdistanzen als die mittlere negativ, für kleinere positiv sein. Die Tabelle zeigt nun ein verschiedenes Verhalten der Süd- und Nordsterne. Während die Südsterne mit der Annahme $b \sin z$ sehr gut übereinstimmen, ist bei den Nordsternen gerade das Gegentheil der Fall. Betrachten wir zunächst die Südsterne genauer. Der Verlauf der Correctionen ist so augenscheinlich abhängig von der Zenithdistanz, dass man sie ohne Weiteres in der Form $a_1 + b_1 \sin z$ ansetzen kann. Berechnet man aus den unter II gegebenen Werthen nach der Methode der kleinsten Quadrate a_1 und b_1, so folgt:

$$a_1 = +1''46, \quad b_1 = -2''39.$$

Mit den unter der Annahme $\Delta z = 1''46 - 2''39 \sin z$ berechneten Correctionen werden jene Gruppenwerthe II so dargestellt:

$$B - R: \ -0''015, \quad +0''051, \quad -0''045, \quad +0''017,$$

also in völlig genügender Weise. Nun war unsere frühere Biegungsconstante, wenn man aus allen einzelnen Abendwerthen (s. Tab. VIII) ohne Rücksicht auf Standänderung das Mittel bildet:

$$b = -1''53.$$

Vereinigt man beide Correctionen, so ergiebt sich allein aus der Discussion der Südsterne die Biegung in der Form:

$$B = -0''07 - 2''39 \sin z,$$

also in geradezu überraschender Weise mit $\sin z$ proportional.

Es waren, um dies noch sicherer zu bestätigen, noch die einzelnen Kreisstände getrennt zu discutiren. Denn da die früher ermittelten Biegungsconstanten in den verschiedenen Kreisständen so sehr verschieden waren, so müsste auch die

jetzt bestimmte Verbesserung der angewandten Biegungswerthe nach den Kreisständen verschieden ausfallen. Indessen reicht hierzu das Beobachtungsmaterial nicht mehr aus; zwar zeigt sich in allen drei Ständen dieselbe Erscheinung, dass nämlich die Biegung nicht als constant, sondern noch ein Glied von der Form $b \sin z$ enthaltend angenommen werden muss, d. h. dass die kleineren Zenithdistanzen eine positive, die grösseren eine negative Correction erfordern, indessen sind die zufälligen Fehler zu gross, als dass diese Correctionen mit den früheren Biegungsconstanten eine völlige Analogie aufweisen könnten. Infolge dessen schien es am rathsamsten zu sein, die soeben ermittelte Correction: $1''.46 - 2''.39 \sin z$ an alle Südsternbreiten unabhängig vom Kreisstande anzubringen, wozu die folgende Tabelle diente:

δ	$\Delta\varphi$	δ	$\Delta\varphi$
$+3°$	$+0''.33$	$15°$	$-0''.05$
6	$+0.24$	18	-0.16
9	$+0.15$	21	-0.26
12	$+0.05$	24	-0.37

Die Nordsterne zeigen, wie schon bemerkt, ein abweichendes Verhalten. Bei ihnen erfordern gerade die grösseren Zenithdistanzen eine positive, die kleineren eine negative Correction. Auch sonst zeigen die Zahlen der obigen Tabelle keine deutliche Abhängigkeit der gegebenen Correctionen von der Zenithdistanz. Hingegen ist ziemlich deutlich ein constanter Unterschied zwischen oberer und unterer Culmination ausgesprochen. Auch dieser Unterschied zeigt sich bei genauerer Untersuchung in merklicher Uebereinstimmung bei allen drei Kreisständen, sodass es am besten schien, als Ergebniss dieser Betrachtung die Nordsternbreiten in der oberen Culmination um $+0''.13$ zu vermehren, in der unteren um denselben Betrag zu vermindern. Es kommt dies offenbar darauf hinaus, den Declinationen der Nordsterne die constante Correction $+0''.13$ hinzuzufügen. Ob dieser Umstand auf einer verschiedenen Auffassung der beiden Culminationen beruht — was allerdings nicht wahrscheinlich ist, da wohl ebenso oft in positiven wie in negativen Stundenwinkeln beobachtet ist —, ob vielleicht die verschiedene Umgebung des Beobachtungsraums auf der Nord- und Südseite einen

Einfluss geäussert hat, oder ob hierdurch eine systematische Correction der Declinationen der Nordsterne angezeigt wird, muss dahingestellt bleiben. Alle anderen Ursachen, wie ungenügend eliminirte Refraction oder Theilungsfehler des Kreises, hätten auf die Zenithdistanzen der Nord- und Südsterne ein und denselben Einfluss haben müssen.

Die in der soeben besprochenen Art verbesserten Breiten der Süd- und Nordsterne enthält die Columne III in Tabelle VII.

Hierdurch werden auch die einzelnen Abendmittel und die Gruppenmittel etwas beeinflusst, da die Correctionen ja für beide Sternarten in keinem Zusammenhang stehen und sonach die früher betonte Gleichheit der mittleren Zenithdistanz beider Sternarten nutzlos wird. Hingegen ist der Einfluss auf das Endresultat ganz verschwindend ($< 0''01$).

Es wurde noch der Versuch gemacht, eine ähnliche Discussion der älteren Beobachtungsreihen vorzunehmen. Bezüglich der Südsterne ist indessen das Material nicht gross genug, um sichere Schlüsse daraus ziehen zu können. Für die Nordsterne, bei denen es sich nur um die Constatirung des Unterschieds zwischen oberer und unterer Culmination handelt, gab die Reihe H_4 als Reduction der einzelnen Sternbreiten auf das Abendmittel

aus oberen Culminationen: $-0''28$
» unteren » : $+0.21$

Dabei ist aber noch zu beachten, dass daselbst von vornherein die Biegung in der Form $b \sin z$ angesetzt ist. Reducirt man jene Zahlen auf constante Biegung, wie es bei der vorliegenden Reihe geschehen ist, so nähern sie sich einander beträchtlich und werden: $-0''19$, $+0''11$. Daraus folgt in auffallender Uebereinstimmung mit dem Resultate meiner Reihe als Correction der Declinationen der Nordsterne: $+0''15$. Die Reihen Sch und H_2 geben zwar für diese Correction dasselbe Vorzeichen, jedoch ist ihr brauchbares Material nur gering.

Ehe wir nun auf die Ableitung der Endresultate eingehen, soll noch über die mit dem Wanschaff'schen Universalinstrumente zu erlangende Genauigkeit Einiges gesagt werden, da die vorliegende Reihe ein weit umfangreicheres Material als die früheren dazu liefert, und zwar zunächst über den Ablesefehler der Mikroskope, die individuellen Strichfehler des Kreises und den Pointirungsfehler.

Für den mittleren Fehler einer Mikroskop-Ablesung fand sich oben bei der Bestimmung der periodischen Schraubenfehler ± 0.″4. Etwas grösser (± 0.″56) folgt er aus den Ablesungen während der Beobachtungsreihe selbst. Da oft die beiden in derselben Kreislage ausgeführten Einstellungen in dasselbe Kreisintervall fielen, so konnte er aus diesen doppelten Ausmessungen desselben Intervalls erschlossen werden. Dass er sich hierbei etwas grösser ergab, ist nicht zu verwundern, da erstens die Beleuchtung der Mikroskope doch oft mit der Tagesbeleuchtung nicht zu vergleichen war und zweitens abends oft mit grösserer Eile zur Vermeidung grösserer Stundenwinkel beobachtet wurde.

Viel grösser ist der Einfluss der individuellen Strichfehler des Kreises. Benutzt man die aufeinanderfolgenden in verschiedene Kreisintervalle fallenden Einstellungen der beiden Horizontalfäden des Fernrohrs, so erhält man nach Abzug des soeben angegebenen Ablesefehlers für den mittleren Fehler eines Kreisintervalls: ± 1.″37, demnach eines einzigen Striches: ± 0.″97, nur wenig von dem früher durch directe Ausmessung erhaltenen Werthe abweichend. Auch wird der Einfluss dieses individuellen Strichfehlers auf eine Sternbreite noch dadurch vermehrt, dass, wie schon erwähnt, oft die beiden aufeinanderfolgenden Einstellungen in dasselbe Kreisintervall fallen, die Ablesungen also auf denselben beiden Strichen beruhen, und ferner an Abenden gleichen Kreisstandes fast genau dieselben Striche wieder benutzt werden. Daher beträgt der mittlere Fehler einer Sternbreite, soweit er allein von den Strichfehlern herrührt, etwa ± 0.″3.

Die Bestimmung der Fadendistanz, die einen Maassstab für den mittleren Pointirungsfehler liefert, geschieht aus den Einstellungen an den beiden Horizontalfäden des Fernrohrs. Bei den früheren Beobachtern hatten sich hierbei auffallende Unterschiede sowohl zwischen Nord- und Südsternen, als auch zwischen den beiden Kreislagen gezeigt, nämlich:

	N — S	Krs. rechts — links	
		N.	S.
Schnauder	+ 0.″80	+ 0.″56	+ 0.″28
Hayn	+ 0.50	+ 0.54	0.00
Hartmann	+ 0.28	+ 0.54	+ 0.31

Bei der vorliegenden Beobachtungsreihe sind diese Unterschiede völlig verschwunden, wie die folgende Uebersicht zeigt. Die Beobachtungsreihe wurde dazu in sechs nahezu gleich grosse Gruppen getheilt, indem die Beobachtungen der Sterngruppe IV mit III vereinigt und die Gruppen VI-IX in zwei durch einen von Beobachtungen freien Monat (1894 Dec. 10 — 1895 Jan. 11) getrennte Zeiträume zerlegt wurden. So umfassen die Gruppen folgende Zeiträume: I. (1894 März 30 bis April 12), II. (April 23 bis Mai 24), III. (Juni 17 bis Juli 25), IV. (Sept. 30 bis Oct. 27), V. (Nov. 1 bis Dec. 10), VI. (1895 Jan. 14 bis März 9). Die folgende Tabelle giebt die Fadendistanz D, und zwar D_L aus Kreislage links, D_R aus Kreislage rechts, den mittleren Fehler eines Gruppenmittels und einer einzelnen Bestimmung und die Anzahl der Bestimmungen. Die letzte Columne giebt den Unterschied für die beiden Kreislagen an.

Tabelle X.

Die Fadendistanz.

Nordsterne.

Gruppe	D_L	M. F.	M. F. einer Best.	Anzahl d. Best.	D_R	M. F.	M. F. einer Best.	Anzahl d. Best.	Mittel	$D_R - D_L$
I	46''.35	±0''.16	±0''.89	30	46''.43	±0''.21	±1''.12	29	46''.39	+0''.08
II	46.29	±0.17	±0.75	20	46.28	±0.18	±0.82	20	46.28	—0.01
III	46.20	±0.17	±0.86	26	46.35	±0.15	±0.74	25	46.28	+0.15
IV	46.71	±0.19	±1.02	28	46.41	±0.18	±0.92	26	46.56	—0.30
V	46.16	±0.19	±1.16	35	46.28	±0.13	±0.79	36	46.22	+0.12
VI	46.46	±0.14	±0.74	29	46.41	±0.15	±0.81	80	46.44	—0.05
Mittel	46''.36		±0.90		46''.36		±0.87			

Südsterne.

Gruppe	D_L	M. F.	M. F. einer Best.	Anzahl d. Best.	D_R	M. F.	M. F. einer Best.	Anzahl d. Best.	Mittel	$D_R - D_L$
I	45''.88	±0''.20	±0''.98	23	45''.82	±0''.21	±1''.02	23	45''.85	—0''.06
II	46.13	±0.15	±0.70	21	46.38	±0.25	±1.10	20	46.26	+0.25
III	46.44	±0.18	±1.02	33	46.15	±0.16	±0.86	30	46.30	—0.29
IV	46.67	±0.16	±0.87	29	46.74	±0.17	±0.95	31	46.70	+0.07
V	46.64	±0.14	±0.87	37	46.34	±0.14	±0.88	37	46.49	—0.30
VI	46.67	±0.17	±0.91	29	46.66	±0.17	±0.88	28	46.66	—0.01
Mittel	46''.40		±0.89		46''.35		±0.95			

Die Unterschiede der beiden Kreislagen wechseln ohne erkennbares Gesetz fortwährend ihr Zeichen, allerdings sind sie wohl nicht rein zufälliger Natur; denn die Differenzen zeigen die auffallende Erscheinung, dass sie für Nord- und Südsterne stets entgegengesetztes Zeichen haben. Der Unterschied der Fadendistanz aus den beiden getrennten Sternarten zeigt ferner eine mit der Zeit fortschreitende Aenderung:

Gruppe	N — S	Gruppe	N — S
I	+ 0.″54	IV	— 0.″14
II	+ 0.02	V	— 0.27
III	— 0.02	VI	— 0.22

Im Beginn entspricht das Zeichen den früheren Beobachtungsreihen, während es am Schluss gerade das entgegengesetzte ist. Uebrigens scheint auch bei jenen Reihen dieser Unterschied sich allmählich zu verringern. Die von den früheren Resultaten abweichende Erscheinung kann zunächst in den mit dem Instrumente vorgenommenen Aenderungen ihre Ursache haben, indem jetzt die Nachziehungen, die früher nach dem Umlegen des Instruments, wie überhaupt nach jeder grösseren Azimuthbewegung erfolgten, fast ganz verschwunden sind. Wenn ferner die Unterschiede früher auf systematischen Pointirungsfehlern auf die beiden nicht ganz gleich starken Fäden beruhten, die von der verschiedenen Kopfhaltung abhingen, so kann hier die Anwendung des Ocularprismas, welche eine ganz gleichmässige Kopfhaltung in beiden Kreislagen ermöglicht, einigen Einfluss ausgeübt haben. Endlich aber zeigt unsere obige Uebersicht, dass es verkehrt wäre, aus einzelnen Gruppen schon endgültige Schlüsse ziehen zu wollen, dass vielmehr erst die hier so viel grössere Zahl der Beobachtungen eine zuverlässige Bestimmung ermöglicht.

Als mittleren Fehler einer Bestimmung der Fadendistanz erhalten wir im Durchschnitt

für Nordsterne: ± 0.″885
für Südsterne: ± 0.920

Die Beobachtung der Nordsterne ist daher ein wenig genauer als die der Südsterne, aber lange nicht in dem Betrage, wie z. B. bei der Reihe Sch, wo die entsprechenden Zahlen ± 1.″08 und ± 1.″37 waren. Der mittlere Fehler einer einzelnen Einstellung, der sich aus dem eigentlichen Pointirungsfehler, d. h. dem Fehler

in der registrirten Zeit der Bisection, dem Ablesefehler des Kreises und des Niveaus, den Veränderungen, die der Zenithpunkt während der beiden Einstellungen (3^m bis 4^m) erlitten, und zum Theil auch individuellen Strichfehlern, sobald verschiedene Kreisintervalle zur Ablesung kamen, zusammensetzt, folgt hieraus zu $\pm 0''64$.

Der Zenithpunkt hat sich, wie auch früher, gut gehalten, wenn auch öfters eine mit der Zeit proportionale Veränderlichkeit hervortritt. Die Berechnung des mittleren Fehlers unterblieb deshalb, zumal doch erst der mittlere Fehler einer Sternbreite selbst einen Maassstab für die Genauigkeit der Beobachtungen zu liefern vermag. Nach dem Obigen hätte sich dieser mittlere Fehler zu $\pm 0''32$ ergeben sollen; in Wirklichkeit aber ist er erheblich höher, da hierzu noch ein grosser Theil der individuellen, dann die ungenaue Kenntniss der systematischen Strichfehler, sowie die Aenderungen des Zenithpunkts hinzukommen. Im Folgenden ist derselbe auf zwei, im Wesentlichen übereinstimmende Resultate liefernde Arten berechnet worden, erstens aus den Abweichungen der einzelnen Sternbreiten vom Abendmittel und zweitens aus ihren Abweichungen vom Sternmittel; die betreffenden Werthe sind schon in Tabelle VII, resp. VIII aufgeführt.

Zieht man die in Tabelle VII sowohl für Columne II, als auch für III gegebenen mittleren Fehler einer Sternbreite, gebildet in Bezug auf das jedesmalige Abendmittel, nach Ständen zusammen, so ergiebt sich das folgende Resultat:

	0°	120°	240°	Mittel
II	$\pm 0''56$	$\pm 0''62$	$\pm 0''59$	$\pm 0''59$
III	$\pm 0''53$	$\pm 0''62$	$\pm 0''57$	$\pm 0''57$

Man erkennt hieraus beiläufig den günstigen Einfluss, den die in Columne III berücksichtigte Form der Biegung gegenüber der Annahme ihrer Constanz in II äussert.

Als Controle konnte noch eine andere Bestimmung dienen, welche für jeden einzelnen Kreisstand einer Sterngruppe eine Biegungsconstante ermittelt, mit dieser die Sternbreiten reducirt und nun den mittleren Fehler einer Sternbreite in Bezug auf das Standmittel — also aus Beobachtungen mehrerer Abende — bestimmt. Es ergab sich in naher Uebereinstimmung die folgende

Uebersicht. Hinzugefügt sind derselben sogleich die auf die zweite Art, Abweichung der einzelnen Sternbreiten vom Sternmittel, berechneten, der Tabelle VIII entnommenen und nach Sterngruppen zusammengefassten mittleren Fehler einer Sternbreite.

Gruppe	0°	120°	240°	N	S
I	± [0."99]	± 0."62	± 0."55	± 0."67	± 0."90
II	0.47	0.60	0.49	0.42	0.48
III	0.71	0.68	0.60	0.77	0.56
IV	0.34	0.32	—	0.33	0.44
V	0.64	0.60	0.53	0.39	0.72
VI	0.56	0.54	0.59	0.44	0.51
VII	0.67	0.77	0.66	0.57	0.48
VIII	0.61	—	—	—	—
IX	0.51	0.53	0.39	0.35	0.38
Mittel	± 0."59	± 0."58	± 0."54	± 0."49	± 0."56

Ein erheblicher Unterschied der einzelnen Kreisstände tritt nicht hervor; ferner zeigt sich auch hier, dass die Beobachtungen der Nordsterne etwas genauer sind als die der Südsterne; nur in 2 von 8 Gruppen ist die Genauigkeit der Südsterne grösser, und in Gruppe VII beruht dies allein darauf, dass die Beobachtungen von α Urs. min. in verschiedenen Stundenwinkeln systematische Unterschiede zeigen.

In der ersten Art der Berechnnng ergiebt sich als mittlerer Fehler einer Sternbreite: ± 0."57, in der zweiten: ± 0."52. Der erstere Werth muss ein wenig grösser sein wegen der unvollkommenen Elimination der Biegung, der systematischen Theilungsfehler und der Fehler der angenommenen Declinationen, der letztere wird nur durch den Unterschied der drei Kreisstände, der die erste Art der Berechnung nicht beeinflusst, erhöht. Sonach wird man etwa ± 0."58 als mittleren Fehler einer Sternbreite anzusehen haben.

Gegen die früheren Beobachtungsreihen stellt die vorliegende einen merklichen Fortschritt an innerer Uebereinstimmung dar. In der ersten Berechnungsart waren die mittleren Fehler bei:

Sch ± 0."69, H_1 ± 0."64, H_2 ± 0."68,

welche bei Anbringung der Declinationsverbesserungen allerdings ein wenig kleiner werden würden, nach der zweiten bei Sch ± 0.″62. Jedenfalls sind hiernach die Aenderungen am Instrumente auf die Beobachtungen von günstigem Einfluss gewesen.

Ehe nun auf die mittleren Fehler der einzelnen Abendmittel und die Ableitung des Endresultats eingegangen wird, muss noch die Elimination der Polhöhenschwankung erörtert werden. Dabei werden dann zugleich die früheren Beobachtungsreihen hinzugezogen und zum Schluss mit der vorliegenden zu einem Gesammtresultat vereinigt werden.

Elimination der Polhöhenschwankung und Ableitung des Endresultats.

Nach Beendigung der Discussion des Beobachtungsmaterials lag es nahe, zu versuchen, aus den Beobachtungen selbst den Verlauf der Polhöhenschwankung, deren reelle Existenz gegenwärtig ausser allem Zweifel steht, abzuleiten; indessen musste dieser Versuch aus mehrfachen Gründen bald aufgegeben werden. Zunächst war die Bewegung der Erdpole während des Beobachtungszeitraums (März 1894—95) sehr gering, so dass sie sich in den vorliegenden Beobachtungen kaum verrathen haben würde. Dann aber hatten auch die früheren Versuche, aus den älteren Reihen (H_1 und H_2 zusammen) die Polwanderung, die damals weit erheblicher war, abzuleiten, zu keinem günstigen Resultat geführt. Denn vergleicht man den durch die gleichzeitigen Beobachtungen der cooperirenden Sternwarten zu Berlin, Potsdam und Prag sicher gestellten Verlauf des Phänomens mit der in H_2 ermittelten Darstellung, so zeigt sich eher ein Gegensatz als Uebereinstimmung. Nach H_2 hätte z. B. die Polhöhe Anfang October 1891 durch ihren Mittelwerth gehen müssen, während sie in Wirklichkeit genau zu derselben Zeit ein ausgeprägtes Maximum besass. Auch zahlenmässig tritt dies darin hervor, dass bei den älteren Reihen bei Berücksichtigung der anderweitig bestimmten Schwankungen der Polhöhe der mittlere Fehler des Abendmittels nicht ab-, sondern etwas zunimmt, wie sich alsbald zeigen wird. Theils mag dies von den verschiedenen Aenderungen, denen das Instrument während der Beobachtungen unterworfen wurde, herrühren, theils liess es der

mittlere Abendfehler von $\pm$ 0″.3 bis $\pm$ 0″.4 auch nicht erwarten, diese doch geringfügigen Schwankungen genau dargestellt zu sehen. Immerhin ist die geringe Uebereinstimmung auffallend und zeigt, dass man bei dem Versuch, ähnliche Beobachtungsreihen zur Ermittelung der Polhöhenschwankung benutzen zu wollen, sehr vorsichtig sein muss.

Da mithin ein Beitrag zur Frage der Polhöhenschwankung aus dem vorliegenden Material nicht zu gewinnen war, konnte es sich nur darum handeln, die anderweitig ermittelten Reductionen der augenblicklichen auf eine mittlere Polhöhe an die hier abgeleiteten Werthe anzubringen. Dabei wurden auch die älteren Reihen in den Kreis der Betrachtung gezogen und sämmtliche am Wanschaff'schen Universalinstrumente angestellten Polhöhenbeobachtungen, indem sie auf ein und dieselbe mittlere Polhöhe bezogen wurden, zu einem Gesammtmittel vereinigt, das dann für den von den Beobachtungen erfüllten Zeitraum (1885–95) gilt.

Um jene Reductionen zu erhalten, hätte man zunächst eine der von Chandler im »Astronomical Journal« für den Verlauf des Phänomens gegebenen Formeln benutzen können. Indessen schienen diese, wenn sie sich auch in ziemlicher Übereinstimmung mit den Beobachtungen befinden, doch noch nicht endgültiger Natur zu sein; es wurde daher vorgezogen, aus dem zahlreich vorliegenden Beobachtungsmaterial direct jene Reductionen zu entnehmen, zumal die Art der Veröffentlichung desselben in Form graphischer Darstellung dies sehr erleichterte. Zwar erfuhr ich auf eine briefliche Anfrage von Herrn Geheimrat Helmert, dass zu Anfang des Jahres 1896 ein Bericht von Herrn Prof. Albrecht erscheinen und Ephemeriden enthalten würde, aus denen man für einen beliebigen Zeitpunkt und eine gegebene geographische Länge die gewünschten Daten unmittelbar entnehmen könne; indessen brauchte das Erscheinen dieses Berichts nicht abgewartet zu werden, da das bisher publicirte Beobachtungsmaterial dem gewünschten Zwecke schon völlig entsprach[1]).

Die älteste Reihe (1885—86; Beobachter Schnauder) nimmt in gewisser Hinsicht eine Ausnahmestellung ein, da zu dieser

1) Soeben (Mitte Februar 1896) erscheint ein Auszug dieses Berichts in den Astr. Nachr. (Nr. 3333), den ich nachträglich noch für meine eigene Reihe verwendet habe.

Zeit noch nicht systematisch die Bewegung der Erdachse verfolgt wurde. Man könnte nun zwar bei dieser Reihe von einer Berücksichtigung der Breitenschwankung ganz absehen, da sie sich ziemlich gleichmässig über ein volles Jahr erstreckt, sodass im Mittel die Schwankung als eliminirt betrachtet werden kann. Indessen liegt doch eine längere Beobachtungsreihe von Nyrén [1]) vor, welche für diesen Zweck brauchbar ist. Denn wenn sie auch an manchen Stellen ihres zehnjährigen Zeitraums etwas lückenhaft ist, so ist doch gerade für die in Frage kommende Zeit das Material sehr vollständig und gestattet einen ganz sicheren Schluss auf den damaligen Verlauf der Erscheinung. Aus der am angegebenen Orte gezeichneten Curve wurden die folgenden Reductionswerthe der augenblicklichen Polhöhe φ_0 auf eine mittlere φ entnommen, wobei noch zu beachten ist, dass der Phasenunterschied zwischen Pulkowa und Leipzig, der etwa 20 Tage beträgt, berücksichtigt ist und dass als mittlere Polhöhe das Mittel sämmtlicher Maxima und Minima angenommen ist.

Datum			$\varphi - \varphi_0$	Datum			$\varphi - \varphi_0$
1885	April	16	+ 0.″17	1885	Sept.	1	— 0.″12
	Mai	1	+ 0.15			16	— 0.15
		16	+ 0.13		Oct.	1	— 0.17
	Juni	1	+ 0.09			16	— 0.19
		16	+ 0.06		Nov.	1	— 0.20
	Juli	1	+ 0.02			16	— 0.21
		16	— 0.01		Dec.	1	— 0.21
	August	1	— 0.05	1886	März	1	— 0.04
		16	— 0.08			16	— 0.01
					April	1	+ 0.02

Wir stellen nun in Tabelle XI unter I die von Dr. Schumann berechneten Abendwerthe der Reihe Sch, daneben unter II die auf Grund der verbesserten Declinationen erhaltenen, endlich unter III die auf die mittlere Polhöhe reducirten Werthe zusammen, wobei auch hier, wie oben bemerkt, Abende, an denen weniger als vier Sterne beobachtet sind, nur halbes Gewicht erhalten haben.

1) Nyrén: Variations de la latitude de Poulkovo observées au grand cercle vertical dans les années 1882—91; Mél. math. et astr. tirés du Bull. de l'Acad. des sciences de St. Pétersbourg. T. VII.

Tabelle XI.

Die Schnauder'sche Reihe (1885—86).

Datum	I	II	III	Datum	I	II	III
1885				Sept. 2	5″68	5″71	5″59
April 19	4″97	4″98	5″14	5	5.58	5.63	5.50
Mai 19	[6.07]	[6.21]	[6.33]	16	5.14	5.21	5.06
23	5.74	5.66	5.77	Oct. 14	5.36	5.49	5.30
24	5.56	5.53	5.64	Nov. 16	5.52	5.54	5.33
28	5.69	5.76	5.86	17	5.13	5.09	4.88
29	5.69	5.95	6.05	18	5.26	5.26	5.05
Juni 3	5.90	5.82	5.91	19	5.10	5.10	4.89
5	5.84	5.86	5.94	20	[5.70]	[5.68]	[5.47]
16	5.18	5.16	5.22	1886			
19	6.37	6.27	6.32	März 25	5.12	5.08	5.09
24	5.81	5.73	5.77	30	5.06	5.11	5.13
Juli 7	5.59	5.51	5.52	April 1	5.60	5.60	5.62
19	5.21	5.14	5.12	2	5.23	5.24	5.26
21	4.97	5.10	5.08	Mittel	5.48	5.49	5.46
Aug. 4	5.61	5.55	5.49				
5	5.51	5.56	5.50	M. F. eines			
16	5.50	5.51	5.43	Abendmitt. ±	0.336	0.323	0.381

Als Endwerth der Schnauder'schen Reihe ergiebt sich:

$$\varphi = 51^\circ\, 20'\, 5''46 \pm 0''071.$$

Während durch die Verbesserung der Declinationen die innere Uebereinstimmung gewinnt, wird sie durch die Berücksichtigung der Polhöhenschwankung verschlechtert. Uebrigens ist dies hier weiter nicht wunderbar, da an je zehn aufeinanderfolgenden Beobachtungsabenden derselbe Kreisstand beibehalten wurde, sodass schon allein Unterschiede der einzelnen Kreisstände die Erscheinung einer Breitenschwankung hervorrufen können.

Die nun folgenden Reihen von Dr. Hayn und Dr. Hartmann schliessen sich direct an einander an, sodass wir sie hier zusammen behandeln wollen (Reihe H); sie umfassen die Zeit von Dec. 1890—April 1892. In diese Zeit fallen gerade die erwähnten Beobachtungsreihen von Berlin, Prag, Potsdam, Strassburg, Pulkowa (Wannach und Kostinsky), die einen so gleichförmigen Verlauf zeigen, dass aus ihnen mit grösster Sicherheit der Betrag der Schwankungen entnommen werden kann. Da mir der von Prof. Albrecht im Jahrgang 1894 der »Verhandlungen der Con-

ferenz der perm. Comm. der internat. Gradmess.« erstattete »Bericht über den gegenwärtigen Stand der Erforschung der Breitenvariation«, welcher alles bis dahin berechnete Material enthält, erst nachträglich bekannt wurde, entnahm ich die Reductionselemente der gleichfalls in Tome VII des erwähnten »Bull. de l'Acad. de St. Pétersbourg« enthaltenen Abhandlung von KOSTINSKY: »Sur les variations de la latitude de Poulkovo, observées au grand instrument des passages établi dans le premier vertical«. Es ergab sich für den hier in Betracht kommenden Zeitraum die folgende

Tabelle XII.

Reduction der augenblicklichen Polhöhe auf die mittlere für die Reihe H.

Datum			Berlin	Prag	Strassburg	Pulkowa	Mittel
1890	Oct.	22	— 0″16	— 0″17	—	— 0″22	— 0″18
	Nov.	11	— 0.11	— 0.12	—	— 0.14	— 0.12
	Dec.	1	— 0.04	— 0.04	—	— 0.06	— 0.05
		21	+ 0.04	+ 0.04	—	+ 0.03	+ 0.04
1891	Jan.	10	+ 0.11	+ 0.12	—	+ 0.12	+ 0.12
		30	+ 0.18	+ 0.18	—	+ 0.20	+ 0.19
	Febr.	19	+ 0.24	+ 0.22	—	+ 0.26	+ 0.24
	März	11	+ 0.28	+ 0.24	—	+ 0.28	+ 0.27
		31	+ 0.27	+ 0.22	—	+ 0.28	+ 0.25
	April	20	+ 0.20	+ 0.19	—	+ 0.24	+ 0.21
	Mai	10	+ 0.11	+ 0.16	—	+ 0.18	+ 0.15
		30	+ 0.03	+ 0.11	[+ 0.11]	+ 0.09	+ 0.09
	Juni	19	— 0.04	+ 0.06	+ 0.02	+ 0.01	+ 0.01
	Juli	9	— 0.12	— 0.02	— 0.08	— 0.08	— 0.08
		29	— 0.20	— 0.12	— 0.16	— 0.18	— 0.17
	Aug.	18	— 0.28	— 0.24	— 0.22	— 0.26	— 0.25
	Sept.	7	— 0.32	— 0.33	— 0.26	— 0.31	— 0.31
		27	— 0.33	— 0.38	— 0.29	— 0.33	— 0.33
	Oct.	17	— 0.32	— 0.37	— 0.31	— 0.31	— 0.32
	Nov.	6	— 0.31	— 0.34	— 0.30	— 0.26	— 0.29
		26	— 0.27	— 0.29	— 0.25	— 0.20	— 0.25
	Dec.	16	— 0.20	— 0.22	— 0.19	— 0.13	— 0.18
1892	Jan.	5	— 0.11	— 0.16	— 0.11	— 0.07	— 0.11
		25	+ 0.01	— 0.09	— 0.01	— 0.01	— 0.03
	Febr.	14	+ 0.12	— 0.02	+ 0.10	+ 0.05	+ 0.06

Datum	Berlin	Prag	Strassburg	Pulkowa	Mittel
1892 März 5	+ 0″.21	+ 0″.05	+ 0″.20	+ 0″.10	+ 0″.13
25	+ 0.24	+ 0.09	+ 0.28	+ 0.15	+ 0.19
April 14	+ 0.26	+ 0.15	+ 0.30	+ 0.20	+ 0.22
Mai 4	+ 0.26	[+ 0.18]	+ 0.30	+ 0.24	+ 0.25

In welcher Weise sich die beobachteten Maxima und Minima um die angenommenen Mittelwerthe der Polhöhen gruppiren, zeigt die folgende Uebersicht:

Minimum	Berlin	Prag	Pulkowa	Strassburg
1890 Febr.	+ 0″.26	+ 0″.34	—	—
1891 März	+ 0.29	+ 0.24	+ 0″.28	—
1892 April	+ 0.26	+ [0.21]	+ 0.25	+ 0″.29
1893 Mai	—	—	+ [0.32]	+ 0.20
Mittel	+ 0″.27	+ 0″.27	+ 0″.28	+ 0″.24

Maximum	Berlin	Prag	Pulkowa	Strassburg
1889 Aug.	— 0″.26	— 0.21	—	—
1890 Sept.	— 0.22	— 0.23	— 0″.32	—
1891 Oct.	— 0.33	— 0.38	— 0.33	— 0.29
1892 Dec.	—	—	— 0.19	— 0.24
1894 Jan.	—	—	—	— 0.20
Mittel	— 0″.27	— 0″.27	— 0″.28	— 0″.24

Man kann sonach die Reductionen ansehen als bezogen auf eine mittlere Polhöhe für den Zeitraum von 1889 bis 1894. Die nach Schluss der Arbeit verglichene Zusammenstellung von Prof. Albrecht (A. N. Nr. 3333) bestätigt im Ganzen die angewandten Reductionen, sodass eine nachträgliche Berücksichtigung derselben überflüssig erschien.

Analog wie oben folgen jetzt die Abendmittel der Reihe H in den drei verschiedenen, den obigen entsprechenden Columnen.

Tabelle XIII.

Die Hayn-Hartmann'sche Reihe (1890—92).

Datum	I	II	III	Datum	I	II	III
1890				1891			
Dec. 1	5.″16	5.″15	5.″10	August 29	5.″97	5.″93	5.″64
7	6.21	6.19	6.17	31	5.16	5.15	4.86
11/14	5.87	5.86	5.86	Sept. 8	5.75	5.72	5.41
15	5.55	5.47	5.48	9	5.47	5.46	5.15
1891				Oct. 16	5.74	5.73	5.41
Jan. 3	6.05	5.97	6.06	23	6.35	6.31	6.00
29	5.66	5.66	5.84	28	5.85	5.76	5.45
Febr. 9	5.50	5.49	5.71	Nov. 3	5.71	5.67	5.37
10	5.52	5.53	5.75	10	6.53	6.55	6.26
24	5.17	5.17	5.42	12	6.09	6.05	5.77
25	4.94	4.94	5.19	1892			
26	5.14	5.14	5.39	März 21	6.04	6.04	6.22
März 12	5.30	5.27	5.54	22	5.83	5.84	6.02
20	5.44	5.43	5.70	25	5.12	5.13	5.32
April 6	5.83	5.81	6.05	30	4.79	4.80	5.00
19	4.91	4.92	5.13	April 9	5.77	5.78	6.00
Juli 16	5.61	5.60	5.49	10	5.62	5.63	5.85
21	5.18	5.18	5.05	H_1	5.″45	5.″43	5.″50
23	5.23	5.24	5.10	H_2	5.70	5.69	5.55
28	5.35	5.29	5.12	Gesammtmittel	5.″55	5.″54	5.″53
30	5.31	5.30	5.12				
August 5	5.42	5.43	5.23	M.F. ein. H_1 ±	0.″341	0.″331	0.″360
Aug.24/25	[4.92]	[4.89]	[4.62]	Abend- H_2 ±	0.437	0.432	0.448
28	5.56	5.54	5.26	mittels H ±	0.407	0.403	0.398

Als Endwerthe der Reihen folgen:

$$H_1:\quad \varphi = 51^\circ\, 20'\, 5.''50 \pm 0.''079\,,$$

$$H_2:\quad \varphi = 51^\circ\, 20'\, 5.''56 \pm 0.''107\,,$$

beide Reihen zusammen geben:

$$H:\quad \varphi = 51^\circ\, 20'\, 5.''53 \pm 0.''064\,.$$

Auch hier wird bei den einzelnen Reihen die innere Uebereinstimmung durch die verbesserten Declinationen etwas erhöht, durch die Anbringung der Polhöhenschwankung verschlechtert.

Zieht man indess beide Reihen zusammen, so zeigt sich auch hier eine allerdings nur geringe Verbesserung.

Nachdem so für die älteren Reihen die Reduction der augenblicklichen Polhöhe auf eine mittlere ausgeführt war, handelte es sich noch um die von mir angestellte Beobachtungsreihe C. Ursprünglich hatte ich aus den mir durch die Liebenswürdigkeit der Herren Prof. Becker und Dr. Ristenpart mitgetheilten Ergebnissen ihrer in Strassburg und Karlsruhe angestellten Beobachtungen die Reduction auf eine mittlere Polhöhe berechnet. Indessen schien es mir nachträglich rathsamer, die erwähnten Albrecht'schen Werthe (A. N. Nr. 3333) anzuwenden, da sie doch zuweilen merkbar von jenen abwichen. Auffallend ist, dass dieselben, wie aus der folgenden Tabelle ersichtlich, das ganze Jahr hindurch positiv sind, sodass sie den Mittelwerth meiner Reihe um 0."06 erhöhen.

Datum	$\varphi - \varphi_0$	Datum	$\varphi - \varphi_0$
1894		1894	
April 1	— 0."01	Oct. 16	+ 0."09
16	+ 0.01	Nov. 1	+ 0.08
Mai 1	+ 0.02	16	+ 0.07
16	+ 0.03	Dec. 1	+ 0.06
Juni 1	+ 0.04	16	+ 0.05
16	+ 0.05		
Juli 1	+ 0.05	1895	
16	+ 0.06	Jan. 1	+ 0.05
Aug. 1	+ 0.07	16	+ 0.05
16	+ 0.08	Febr. 1	+ 0.06
Sept. 1	+ 0.09	15	+ 0.07
16	+ 0.10	März 1	+ 0.08
Oct. 1	+ 0.10	16	+ 0.09

In Tabelle XIV folgen nun die Abendmittel der vorliegenden Beobachtungsreihe. Dabei sind den in der früheren Uebersicht gegebenen Abendmitteln noch die ganz geringen Verbesserungen, die auf dem bei der Reduction angewandten abgerundeten Werth des Niveaupars (2."00 statt 1."98) beruhen, hinzugefügt. Die erste Columne I giebt — blos des Vergleichs mit den früheren Reihen wegen — die Abendmittel auf Grund der unverbesserten Declinationen, II^a und II^b mit den verbesserten Declinationen, wobei einmal die Biegung in der Form II,

das andere Mal in der Form III (Tab. VII) benutzt wurde, endlich giebt die Columne III die auf eine mittlere Polhöhe reducirten Abendmittel. Auch hier ist die innere Uebereinstimmung durch die Verbesserung der Declinationen, sowie durch die zweite Annahme über die Art der Biegung gefördert worden, während die Berücksichtigung der Polhöhenschwankung wieder einen kleinen Rückschritt verursacht.

Tabelle XIV.

Die Beobachtungsreihe C.

Datum	I	IIa	IIb	III
1894 März 30	[5.″56]	[5.″54]	[5.″53]	[5.″52]
31	5.43	5.33	5.31	5.30
April 1	5.68	5.56	5.56	5.55
3	5.08	4.96	4.94	4.93
6	5.13	5.01	4.99	4.99
7	5.53	5.41	5.41	5.41
8	5.97	5.84	5.84	5.84
9	5.79	5.67	5.67	5.67
10	5.45	5.33	5.34	5.34
12	5.54	5.44	5.42	5.42
23	[5.15]	[5.16]	[5.17]	[5.18]
25	5.28	5.36	5.32	5.34
Mai 6	5.16	5.18	5.19	5.21
8	5.50	5.58	5.54	5.56
9	5.05	5.13	5.09	5.11
15	4.87	4.88	4.86	4.89
16	5.00	5.02	5.03	5.06
19	5.59	5.55	5.61	5.64
24	5.16	5.18	5.19	5.22
Juni 17	5.55	5.47	5.51	5.56
22	5.54	5.44	5.54	5.59
23	5.63	5.53	5.62	5.67
27	[5.54]	[5.38]	[5.49]	[5.54]
28	5.20	5.10	5.20	5.25
30	5.46	5.36	5.46	5.51
Juli 1	5.43	5.41	5.57	5.62
12	4.54	4.56	4.63	4.69
21	4.65	4.69	4.77	4.83
23	4.81	4.85	4.86	4.92

Datum			I	IIa	IIb	III
1894	Juli	25	5″18	5″22	5″23	5″30
	Sept.	30	5.89	5.90	5.80	5.90
	Oct.	5	5.10	5.09	5.09	5.19
		9	5.39	5.37	5.30	5.39
		11	5.09	5.10	5.08	5.17
		21	5.33	5.31	5.31	5.40
		23	5.22	5.23	5.21	5.30
		24	5.52	5.53	5.65	5.73
		27	5.68	5.69	5.66	5.74
	Nov.	1	5.02	5.16	5.06	5.14
		6	5.34	5.48	5.39	5.47
		7	5.32	5.46	5.36	5.44
		15	5.33	5.47	5.35	5.42
		30	[5.59]	[5.51]	[5.53]	[5.59]
	Dec.	1	4.88	4.94	4.92	4.98
		3	5.28	5.42	5.32	5.38
		9	5.44	5.51	5.39	5.44
		10	5.37	5.30	5.36	5.41
		11	5.31	5.24	5.32	5.37
1895	Jan.	14	4.86	4.80	4.91	4.96
		18	5.61	5.55	5.66	5.71
		19	5.86	5.81	5.91	5.96
	Febr.	15	5.33	5.39	5.29	5.36
	März	3	5.97	5.95	5.93	6.01
		4	6.01	6.07	5.92	6.00
		5	5.92	5.90	5.87	5.95
		7	5.55	5.54	5.57	5.65
		8	5.64	5.62	5.59	5.67
		9	5.69	5.67	5.65	5.73
Mittel			5.38	5.37	5.36	5.42
M. F. eines Abendmitt.			±0.333	±0.319	±0.307	±0.312

Als Endwerth meiner Beobachtungsreihe ergiebt sich also:

$$\varphi = 51^\circ\, 20'\, 5''42 \pm 0''042\,.$$

Trennt man noch die einzelnen Kreisstände, um etwaige systematische Unterschiede zu erkennen, so erhält man:

Zenithpunkt									
	0°			120°			240°		
Reihe	Mittel	Zahl der Abende	M. F. eines Abends	Mittel	Zahl der Abende	M. F. eines Abends	Mittel	Zahl der Abende	M. F. eines Abends
Sch	5."79	10	± 0."39	5."41	10	± 0."24	5."19	10	± 0."22
H	5.42	11½	± 0.32	5.51	11	± 0.46	5.55	10	± 0.37
C	5.44	24	± 0.37	5.33	17½	± 0.28	5.41	14½	± 0.23

Sehr merkliche Unterschiede in den verschiedenen Kreisständen zeigt nur die SCHNAUDER'sche Reihe, die allerdings zum Theil darin beruhen werden, dass die Beobachtungen eines Kreisstandes ununterbrochen einander folgen. Dadurch wird dann auch der aus der Gesammtreihe berechnete mittlere Abendfehler viel grösser (± 0."38), als er aus dem Mittel der einzelnen Stände folgt (± 0."28), während bei den anderen Beobachtern grössere Gleichmässigkeit herrscht (H ± 0."40 und ± 0."38, C ± 0."31 und ± 0."29).

Die oben gegebenen mittleren Abendfehler der einzelnen Reihen ändern sich noch ein wenig, wenn man sie auf die gleiche Anzahl Sterne — etwa 6 — reducirt. Die mittlere Anzahl der an einem Abend beobachteten Sterne ist bei Sch: 7.3, H_1: 6.5, H_2: 5.6, C: 6.4. Eine Berücksichtigung kann etwa in der Weise geschehen, dass man

$$a^2 = b^2 + \frac{c^2}{m}$$

setzt, wo a den mittleren Abendfehler, c den mittleren Fehler einer Sternbreite, wie er oben berechnet ist, m die Anzahl der an einem Abend beobachteten Sterne und b einen constanten Tagesfehler bezeichnet. Da a, c, m bekannt sind, kann man a', den auf 6 einzelnen Sternen beruhenden mittleren Abendfehler, aus der Formel

$$a'^2 = b^2 + \frac{c^2}{6}$$

berechnen. Damit ergiebt sich als mittlerer Abendfehler der Reihe

Sch: ± 0."40, H_1: ± 0."37, H_2: ± 0."44, C: ± 0."32,

welche als Endwerthe gelten können.

Vereinigt man die drei Endwerthe der Polhöhe:

$$\begin{array}{ll} \text{Sch: } \varphi = 51^\circ\, 20'\, 5''\!.46 \\ \text{H:} \qquad\qquad\quad\;\; 5''\!.53 \\ \text{C:} \qquad\qquad\quad\;\; 5''\!.42 \end{array}$$

zu einem Mittelwerthe, so erhält man:

$$\varphi = 51^\circ\, 20'\, 5''\!.47.$$

Indem man noch die Reduction auf den Hauptpfeiler der Sternwarte ($\pm$ 0".42) hinzufügt, erhält man als Ergebniss sämmtlicher am Wanschaff'schen Universalinstrument angestellten Beobachtungen für die Polhöhe der Leipziger Sternwarte:

$$\varphi = 51^\circ\, 20'\, 5''\!.89,$$

ungefähr für den Zeitraum 1885—95 gültig.

In der Publication von Dr. Schumann sind noch eine Reihe älterer, in den Jahren 1863—70 angestellter, zum Theil neu reducirter Polhöhenbestimmungen der Leipziger Sternwarte besprochen und ihre Endwerthe auf S. 278 zusammengestellt. Bildet man aus ihnen ohne Rücksicht auf die den einzelnen Werthen zukommende Genauigkeit das Mittel, wobei nur die auf der Pleissenburg beobachtete, gänzlich abweichende Reihe Nr. 7 weggelassen wird, so folgt ein nur um 0".06 grösserer Werth.

Aus der Uebereinstimmung, welche diese verschiedenartig bestimmten Werthe zeigen, wird man schliessen können, dass der oben von mir abgeleitete Endwerth der Leipziger Sternwarte kaum um 0".1 falsch sein dürfte.

Zum Gedächtniss

an

CARL LUDWIG.

Rede,

im Auftrage der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften

gehalten

in der öffentlichen Leibniz-Sitzung

am 14. November 1895

von

Wilhelm His,

o. M.

Carl Ludwig.

Gedächtnissrede im Auftrage der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften,

gehalten den 14. November 1895.

Meine Herren! In ihrer auf den Todestag von Leibniz fallenden öffentlichen Sitzung hat unsere Gesellschaft der Mitglieder zu gedenken, die sie im Laufe des Jahres verloren hat. Der Verlust, der in diesem Jahre unsere mathematisch-physische Klasse betroffen hat, ist ein besonders schmerzlicher gewesen, denn mit C. Ludwig ist ein Mann von uns geschieden, der, dank der Grösse seines wissenschaftlichen und seines persönlichen Charakters, für uns Mitglieder ein berufener Führer, für unsere Gesellschaft aber eine weithin leuchtende Zierde gewesen ist.

In den paar Monaten, die seit Ludwig's Tod verflossen sind, ist sein Andenken schon an sehr verschiedenen Orten und in mancherlei Sprachen gefeiert, und es ist ein reicher Kranz von Erinnerungsblättern auf sein Grab niedergelegt worden. Die meisten der Nachrufe und gehaltenen Reden stammen von früheren Schülern Ludwig's: in vielfach rührenden Ausdrücken legen diese Zeugniss ab von der warmen Verehrung, die sie dem grossen Forscher und Lehrer, und die sie in ganz besonderem Maasse dem edlen selbstlosen Menschen dargebracht haben[1]. Es wäre verlockend, aus diesem, der Erinnerung an den einen Mann gewidmeten Kranze von Kundgebungen ein-

---

1) Die bis jetzt zu meiner Kenntniss gelangten Gedächtnissreden und Nekrologe sind die der Italiener Mosso und Fanno, des Engländers W. Stirling, des Belgiers Heger, des Skandinaviers Tigerstedt und die unserer deutschen Collegen A. Fick, H. Kronecker, J. v. Kries, M. v. Frey und Bernstein.

zelne Blüthen herauszunehmen, sie zusammenzufassen und zu zeigen, wie jeder Darsteller besondere Züge zur Kennzeichnung von Ludwig's Charakter und Leistungen beizubringen weiss. An dieser Stelle ist indessen meine Aufgabe eine bestimmt vorgezeichnete. Bei früherem Anlass hatte ich, im Auftrage der medicinischen Facultät redend, neben Ludwig's allgemein wissenschaftlicher Bedeutung seine Stellung zur Universität hervorzuheben[1]). Heute geziemt es sich, daran zu erinnern, was unser verstorbener Freund für die Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften gewesen ist. Auch habe ich diesmal einige biographische Notizen vorauszuschicken.

Carl Friedrich Wilhelm Ludwig war am 29. December 1816 in Witzenhausen in Kurhessen geboren. Sein Vater war während der napoleonischen Kriegszeit Officier gewesen und hatte dann von dem ihm gewogenen Kurfürsten eine Stellung als Rentmeister in Hanau bekommen. Die fast militärische Ordnungsliebe und Disciplin, durch die sich Ludwig sein Leben lang ausgezeichnet hat, mag er wohl als väterliches Erbtheil übernommen haben.

Ludwig absolvirte sein Gymnasium in Hanau, seine Medicinstudien begann er in Marburg. Infolge eines Conflictes mit den Disciplinarbehörden besuchte er weiterhin ein Jahr lang die Chirurgenschule in Bamberg. Dann aber nach Marburg zurückgekehrt, warf er sich mit voller Energie auf das Studium der Physiologie und ihrer Hilfswissenschaften. Er wurde 1839 promovirt, 1841 als Prosector am anatomischen Institut angestellt und schon 1842 habilitirte er sich für Physiologie. Sein Freund Ludwig Fick kam ihm als Vorsteher des anatomischen Institutes bei seinen damaligen Untersuchungen auf das Bereitwilligste entgegen. Im Jahre 1846 wurde Ludwig zum Professor extraordinarius für vergleichende Anatomie ernannt, und 1849 als Ordinarius für Anatomie und Physiologie nach Zürich berufen. Hier wirkte er bis zum Jahre 1855. Von da ab war er bis 1865, dem Jahr seiner Berufung nach Leipzig, Professor der Physiologie und Zoologie an der medicinischen Militärakademie, dem sog. Josephinum in Wien.

---

1) Karl Ludwig und Karl Thiersch. Akademische Gedächnissrede im Auftrage der medicinischen Facultät zu Leipzig am 13. Juli 1895 gehalten von W. His. Leipzig 1895. Verlag von F. C. W. Vogel.

In Leipzig hat Ludwig zugleich mit dem Lehrauftrage die Aufgabe übernommen, eine allen Anforderungen wissenschaftlicher Arbeit entsprechende physiologische Anstalt zu errichten. Bis zum Tage seiner letzten Erkrankung ist er als Lehrer thätig gewesen. Gestorben ist er am 23. April dieses Jahres an den Folgen einer Influenza. Das Personalverzeichniss der Universität führt als seine Titel auf: Ehrendoctor der Philosophie der Universität Leipzig, Königlich sächsischer Geheimer Rath, Comthur 1. Klasse des Königl. sächs. Albrechtsordens mit dem Stern, Comthur 2. Klasse des Königl. sächs. Verdienstordens, Ritter des Königl. preussischen Ordens pour le mérite und des Königl. bayr. Maximilianordens für Wissenschaft und Kunst, Inhaber der Copley medal of the London Royal Society, Commandeur 1. Klasse des Königl. schwedischen Nordsternordens und Ehrenbürger der Stadt Leipzig. Dazu kommen die Mitgliedschaften der Akademien der Wissenschaften in Berlin, Wien, München, Paris, Petersburg, Rom, Turin, Stockholm, Upsala u. a. m.

Die nackten Umrisse eines Lebenslaufes und selbst die Aufführung von den Ehrungen, die einem Mann während seines Lebens zu Theil geworden sind, geben ein recht dürftiges Bild von dem, was der Mann gewesen und von dem Segen, der von ihm ausgegangen ist. Ludwig's wissenschaftliche Grösse hat in seinen Eigenschaften als Forscher und als Lehrer gelegen. Auf den unübertroffenen Lehrer werde ich nicht noch einmal zurück kommen, dagegen mag es erlaubt sein, dem Forscher eine erneute Betrachtung zu schenken.

Für Ludwig stand die Werthschätzung wissenschaftlicher Forschung unendlich hoch, nicht minder hoch aber waren seine Ansprüche an den Ernst der Forschung und an die Strenge ihrer Methodik. Alles, was nach der Richtung hin Förderung bringen konnte, war bei ihm der warmen, ja oftmals der begeisterten Aufnahme gewiss. »Was giebt es Neues?« pflegte die Anrede zu sein, wenn man sein Zimmer betrat. Das Neue, nach dem er dürstete, waren aber nicht etwa die Nachrichten des Tages, die liessen ihn kühl. Was er erfahren wollte, das waren Fortschritte wissenschaftlicher Arbeit, mochte es sich um neue Probleme, Methoden oder Ergebnisse handeln. Für sterile Naturen und Richtungen hatte er keine Empfindung.

Ludwig selber ist aber ein ebenso energischer als glücklicher Forscher gewesen. Als siegreicher Eroberer ist er vom

Beginn seiner selbständigen Arbeitszeit ab ununterbrochen von einer grundlegenden Entdeckung zur andern fortgeschritten. In die Jahre seiner Marburger Thätigkeit fallen seine berühmten Arbeiten über die Nierensecretion und die so folgenreich gewordene Erfindung des Kymographions. In Zürich folgte die bahnbrechende Entdeckung von der directen Abhängigkeit der Speichelabsonderung vom Nervensystem. Wien brachte neben zahlreichen anderen Arbeiten diejenigen über das Lymphsystem, die Erfindung und erste Verwerthung der Blutgaspumpe, sowie die Feststellung von der Rolle der Gefässnerven und von der merkwürdigen Bedeutung des Pfortadersystemes für die Regelung des arteriellen Blutdruckes. Hier in Leipzig aber hat sich Ludwig's schöpferische Thätigkeit in vielseitigster Weise entfaltet. Gleich die ersten Jahre seines Hierseins brachten die Entdeckung des Gefässnervencentrums, daran schlossen sich die Versuche über den Verlauf der verschiedenen Leitungsbahnen in den Strängen des Rückenmarks, die Entdeckung des beschleunigenden Herznerven und das Studium von den Grundbedingungen der Herzthätigkeit. Er erbaute die Stromuhr und erfand die sinnreiche Methode, Organe im sog. überlebenden Zustande auf ihren Stoffumsatz und besonders auch auf ihren Gaswechsel zu prüfen. Es war eine Zeit reichster Ernte, und von überall her waren die Blicke auf das Leipziger physiologische Institut gerichtet.

Ludwig's Forscherwaffen waren eine ungemein scharfe Analyse der ihm vorliegenden Naturerscheinungen, eine stets klare Fragestellung und eine absolute Sicherheit seiner Methodik. Dabei verfügte er aber auch über eine ausreichende Dosis jenes Findersinnes, ohne den in Erforschung der lebenden Natur selbst die klarsten Denker oft machtlos bleiben. Die Natur lässt sich nicht immer mit Logik zwingen, ihre Wege sind nicht selten versteckt, und sie enthüllen sich nur dem, der sich in ausdauernder und treuer Beobachtung den Blick auch für deren unscheinbare Spuren geschärft hat. Die unmittelbare Liebe zur sinnlichen Beobachtung hat aber Ludwig im hohen Maasse besessen, und für ihn sind ein gelungenes Präparat oder ein schlagender Versuch stets Gegenstand eigentlich ästhetischen Genusses gewesen. Auch hat er für das Studium der lebenden Natur die unmittelbare Anschauung weit über das Arbeiten mit abstracten Begriffen gestellt. Gegen letzteres hegte

er unverholenes Misstrauen. Ludwig's Biographen v. Kries und v. Frey leiten diese von ihnen eingehend erörterte Eigenart aus dessen natürlicher Veranlagung ab. Die Bedeutung der Veranlagung für Ludwig's Denkweise ist natürlich nicht zu bestreiten. Aber mir scheint, als ob diese auch als ein Ergebniss jener reiferen und resignirteren Lebensauffassung zu verstehen sei, die sich bei älteren Naturforschern öfters wiederfindet.

Wer durch längere Jahre im Dienste der Wissenschaft gearbeitet hat, der hat auch den unerbittlichen Zusammensturz zahlloser, zur Erklärung complicirter Vorgänge ersonnener Theorien mit erlebt. Er hat sich ferner überzeugt, wie unermessliche Capitalien von Zeit und von geistiger Arbeitskraft fortwährend in kritiklosem Abmühen mit unzureichenden Methoden und in der Verfolgung unfruchtbarer oder ungenügend begründeter Gedankengänge vergeudet werden. Hat überdies solch ein Forscher erfahren, wie schwer es hält, auch die einfachsten Lebensvorgänge in ihrem Verlauf und in ihren Bedingungen klar und anfechtungsfrei festzustellen, so ergiebt sich für ihn von selbst das Bedürfniss, vor allem die Hilfsmittel zu schärfen, mittelst derer die Erscheinung zu erfassen und unserer Anschauung unmittelbar einzuprägen sind.

Den Zug zu einer scharfen Kritik der Forschungsmethoden hat Ludwig von früh ab entwickelt, und es liegt gerade in der kritischen Arbeit eine Hauptseite seines grossen Physiologiewerkes. Das Bewusstsein aber von der Unzulänglichkeit unserer logischen Operationen dem unerschöpflichen Reichthum der Natur gegenüber, scheint sich bei ihm als Frucht seiner Arbeiten im Laufe der Jahre und in stets zunehmendem Maasse entwickelt zu haben. Von seinem eigenen und seiner Freunde Jugendunternehmen, die Physiologie zu einem Abschnitte der Physik umzubilden, hat er, wie Tigerstedt berichtet, späterhin den Ausspruch gethan: »Wir stellten uns vor, dass es verhältnissmässig leicht sein werde, die ganze Physiologie auf eine physikalisch-chemische Unterlage zu stellen, und sie der Physik ebenbürtig zu machen, aber die Sache war doch schwieriger, als wir gedacht hatten.«

Ludwig's allereigenste Methode war seine Art, im Verein mit jungen Männern zu arbeiten. Wenn wir heute unter einem

wissenschaftlichen Institut eine Schule und Arbeitsstätte freier wissenschaftlicher Forschung verstehen, so ist dies ein Begriff, den erst Ludwig geschaffen und praktisch verkörpert hat. Das von ihm begründete physiologische Institut in Leipzig ist aber das Vorbild geworden für zahllose ähnliche Schöpfungen in den verschiedensten Städten inner- und ausserhalb Europas.

Als Vorsteher einer wissenschaftlich productiven Körperschaft ist denn auch Ludwig gleich nach seinem Hierherkommen mit unserer Gesellschaft in Beziehung getreten. In Wien hatte er seine mit den Schülern unternommenen Arbeiten in den Sitzungsberichten und Abhandlungen der dortigen Akademie niedergelegt, deren Mitglied er war. Es erschien somit völlig selbstverständlich, dass er nach seiner Uebersiedelung hierher die Heimstätte für die Leistungen seiner Anstalt in den Schriften unserer Königl. Gesellschaft der Wissenschaften finden sollte. Die Aufnahme seiner Arbeiten ist ihm auch sofort zugesichert und durch einen besonderen Vertrag gewährleistet worden. Während der Jahre 1865—1876 sind alle von ihm eingereichten Aufsätze in unseren Sitzungsberichten veröffentlicht und diese dadurch zu einer weithin gesuchten Zeitschrift gemacht worden. Diese »Arbeiten aus der Leipziger physiologischen Anstalt« liess dann Ludwig' jährlich zu besonderen Heften zusammenbinden, deren im Ganzen 11 ausgegeben worden sind. Vollständige Sammlungen derselben sind schon sehr selten und stehen bei den Antiquaren in hohem Werth. Ein Theil von diesen Heften trägt auf dem Titelblatte das Medaillonbild des Füsten Jablonowski, weil die von diesem gestiftete Gesellschaft während einiger Jahre Geldbeiträge zu ihrer Publication beigesteuert hat[1]).

Diese Beziehung des physiologischen Institutes zu unserer Gesellschaft, welche sicherlich beiden Theilen zum Vortheil und zur Ehre gereicht hat, ist aber im Jahre 1876 jäh durchrissen worden, und zwar aus prosaisch finanziellen Gründen. Es hatte sich wohl schon seit einigen Jahren zwischen den regelmässigen Einnahmen unserer Klasse, die damals gegen 4000 ℳ. betrugen und ihren Ausgaben ein gewisses Missverhältniss herausgestellt. Zum Theil hing dies zusammen mit der in jene Zeit fallenden

---

1) In den neun Jahren, in denen solche Beiträge geleistet worden sind, haben sie zusammen 6825 ℳ. betragen.

sehr beträchtlichen Steigerung der Druckerpreise, zum Theil aber war es bedingt durch die Mehrkosten infolge der Aufnahme der Arbeiten des physiologischen Institutes in die Sitzungsberichte. An einem schönen Morgen kam es plötzlich heraus, dass die Rechnung unserer Klasse einen Fehlbetrag von 12000 *M*. aufwies. Es war dies für die Klasse und auch für deren Mitglied Herrn Ludwig eine ungeahnte Ueberraschung. Unsere Statuten schreiben zwar (§ 37) vor, dass der Gesellschaft von Seiten der Verwaltung jährlich die Rechnungen vorgelegt werden, aber diese Vorlage ist damals immer nur an den vorsitzenden Secretär erfolgt, und die Rechnungsergebnisse sind nicht zur Kenntniss der übrigen Gesellschaftsmitglieder gelangt. Eine ähnliche Ueberraschung in umgekehrtem Sinn hat sich im Jahre 1883 wiederholt, da sich in gleich ungeahnter Weise fand, dass die Klasse in den vorangegangenen Jahren ein Capital von 20000 *M*. erspart hatte. Das Ministerium, mit solchen Ersparnissen nicht einverstanden, wollte darauf hin den bis dahin gewährten Jahresbeitrag auf die Hälfte herabsetzen.

Die Finanzlage der Klasse im Jahr 1876 verlangte nach zwei Seiten hin Abhilfe: es war das vorhandene Deficit zu decken, und es war eine Erhöhung der Einnahmen anzustreben, um das Gleichgewicht zwischen Einnahmen und Ausgaben für die Zukunft zu sichern. Nach beiden Richtungen hat damals unsere Klasse dem Königl. Ministerium Vorschläge eingereicht, allein sowohl die Deckung des Fehlbetrages, als die Erhöhung des Jahresetats sind von oben her rundwegs abgelehnt worden. Das ministerielle Schreiben weist, unter Bezugnahme auf die Stimmung in den beiden Kammern, jeglichen finanziellen Zuschuss von der Hand und schliesst mit den Worten: »Unter diesen Umständen wird Etwas nicht übrig bleiben, als eine vorläufige gänzliche Sistirung der Veröffentlichungen der mathematisch-physischen Klasse, bis die Schuldenlast mit Hilfe des Etatsquantums allmählich getilgt und letzteres wieder zu neuen Veröffentlichungen verwendbar werden wird.«

Der in dieser Verordnung enthaltene Vorschlag drohte den finanziellen Bankerott unserer Klasse in einen wissenschaftlichen umzuwandeln. Nicht allein wäre dadurch manchen Mitgliedern der Klasse ihr bis dahin benutzter Publicationsweg plötzlich verschlossen worden, sondern es hätte die Klasse auch nach aussen hin eine Erklärung abgeben und allen bisherigen

Tauschverkehr mit anderen gelehrten Gesellschaften einstellen müssen. Die Schwierigkeit der Lage, in welche sich die Klasse versetzt sah, veranlasste Ludwig, noch einmal persönliche Schritte zu versuchen. Eine mündliche Unterredung war von Herrn v. Gerber abgelehnt worden und nun wendete sich Ludwig an ihn mit einer eindringlich geschriebenen besonderen Eingabe. In überzeugender Weise setzte er nochmals die tiefe Schädigung auseinander, welche das Leben und das Ansehen der Gesellschaft erleiden müssten, wenn man die Klasse zwänge, ihre Veröffentlichungen plötzlich zu unterbrechen. Er hob schliesslich hervor, wie bei der Klasse eine Reihe von Manuscripten läge, welche eingereicht worden seien, ehe man den ungünstigen Stand der Finanzen kannte, und er bat den Minister, wenigstens soviel Mittel flüssig zu machen, als nöthig sein würden, um die durch Annahme dieser Manuscripte von der Klasse bereits übernommenen Verpflichtungen zu lösen. Herr v. Gerber blieb unerbittlich und sein in recht ungnädigem Tone geschriebener Brief an Ludwig wies jedes fernere Eingehen auf die Frage von der Hand.

Einige Wochen später konnte das Ministerium der Klasse mittheilen, dass es durch besondere Umstände in den Stand gesetzt worden sei, ihr aus den Ueberschüssen einer Stiftung die zur Schuldendeckung erforderlichen 12000 Mark zur Verfügung zu stellen. Die momentane Verlegenheit war damit gehoben, aber da das Ministerium auf das Bestimmteste verlangte, dass das bisherige Dispositionsquantum in Zukunft nicht mehr überschritten werde, so war der ferneren Aufnahme Ludwig'scher Institutsarbeiten das Urtheil gesprochen. Diese Arbeiten sind von da ab grösstentheils in E. du Bois-Reymond's Archiv für Physiologie veröffentlicht worden. Erst als die Finanzen der Klasse wieder etwas mehr erstarkt waren, hat Ludwig neuerdings angefangen, einzelne, mit grösseren Tafeln ausgestattete Arbeiten in die Abhandlungen der Gesellschaft zu geben.

Ludwig und Herr v. Gerber haben sich wohl gegenseitig nie recht verstanden. Für Ludwig, welcher unter dem Ministerium v. Falkenstein ungewöhnlich hohes Vertrauen und bereitwilligstes Entgegenkommen genossen hatte, war die harte Behandlung durch Herrn v. Gerber besonders empfindlich. Es kommt dazu, dass damals auch seinen Wünschen inbetreff der Institutsdotirung ein »non possumus« entgegengestellt worden ist, und